УДК 330.43

Оптимізаційні задачі еконофізики методами статистичної фізики

Василь Петрович Яцишин,
професор кафедри математики і статистики
Львівського інституту банківської справи
Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ),
кандидат фізико-математичних наук, професор

Роман Васильович Фещур,
завідувач кафедри технологій управління
Національного університету «Львівська політехніка»,
кандидат економічних наук, професор

Василь Степанович Янішевський,
доцент кафедри технологій управління
Національного університету «Львівська політехніка»,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Анотація. Продемонстровано застосування методів статистичної фізики для розв'язування оптимізаційних задач у деяких моделях еконофізики. Підхід ґрунтується на варіаційній нерівності для потенціалу великої статистичної суми. Відповідним вибором пробного гамільтоніану для моделі minore game (гра в меншість) отримано відомі результати в наближені симетричних реплік.

Ключові слова: еконофізика, оптимізація, варіаційний метод, метод реплік.

Постановка проблеми. Останніми роками спостерігається значний розвиток класичної економіки за рахунок використання концепцій і методів, що початково були розроблені у природничих науках. Так, застосування статистичної фізики дало можливість показати основні особливості економічних крахів, побудувати теорію фінансових ризиків, розвинути принцип формування оптимального портфеля, інтерпретувати процеси зміни економічних показників і обмінних курсів валют [1; 2]. Відомо, що в багатьох задачах є неможливим застосування класичних методів оптимізації функцій неперервного і дискретного аргументу, через велику кількість змінних у просторі яких ведеться пошук оптимального розв'язку. Очевидно, у цьому разі можна дослідити лише асимптотику оптимального розв'язку, спрямовуючи кількість змінних задачі до безмежності. У результаті ми приходимо до методів статистичної фізики, яка вивчає системи з великою (макроскопічною) кількістю частинок.

Пошук оптимального значення можна звести до розрахунку статистичної суми, де досліджувану функцію розглядаємо як гамільтоніану системи. Тоді шуканий мінімум функції можна визначити як основний стан системи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Як правило, більшість змістовних задач у такій постановці можна розв'язати лише наближено, використовуючи відповідні методи. Зокрема, одним із широкозастосовуваних методів статистичної фізики є варіаційний метод, в основі якого лежить нерівність для вільної енергії [3]. У ряді випадків варіаційний метод більш зручно застосовувати для потенціалу великої статистичної суми [3; 4]. Зокрема, такий підхід був використаний для аналізу статистичних даних моделей машинного навчання [5], в оптимізаційній задачі моделі minority game [6].

Метою роботи є застосування варіаційного методу в рамках потенціалу великої статистичної суми до оптимізаційної задачі еконофізики, яка дістала назву minore game (гра в меншість).

Як відомо [3], варіаційний метод володіє значною гнучкістю пов'язаною із вибором пробного гамільтоніану. Спосіб вибору пробного гамільтоніану, обраний у цій роботі, дає змогу отримати розв'язки оптимізаційних задач в моделі minority game і моделі Хопфілда.

Виклад основного матеріалу.

Мінімізація в методі великої статистичної суми. Тут ми подамо деякі основні положення і формули статистичної фізики, які використаємо в розв'язанні нашої задачі. Як було зазначено, у багатьох моделях оптимізаційну задачу можна сформулювати як визначення мінімуму деякого гамільтоніану $H(\pi, \alpha)$, заданого на множині динамічних змінних π (α – сукупність параметрів, від яких залежить гамільтоніан). Побудуємо статистичну суму системи:

$$Z(\beta) = \int D\pi \exp\left[-\beta H(\pi, \alpha)\right], \qquad (1)$$

де величина β має зміст оберненої «температури», інтегрування в (1) здійснюється за всією множиною змінних π (для визначеності розглядаємо випадок неперервних змінних). Мінімум гамільтоніану $H(\pi, \alpha)$ визначаємо як вільну енергію [3] для нульової температури:

$$\min_{\pi} H(\pi, \alpha) = \lim_{\beta \to \infty} F(\beta), \quad F(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta). \qquad (2)$$

Шуканий мінімум залежить від множини параметрів α, які в багатьох задачах є випадковими величинами. Тому величину (2) усереднюють за розподілом змінних α. З цією метою використаємо метод реплік [1; 2], розвинутий у теорії невпорядкованих систем.

Для усередненої вільної енергії $F(\beta)$ отримаємо:

$$\overline{F}(\beta) = <F(\beta)>_\alpha = -\frac{1}{\beta} <\ln Z(\beta)>_\alpha = -\frac{1}{\beta}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln <Z(\beta)^n>_\alpha. \quad (3)$$

Тут n позначає кількість реплік, а дужки $<\ldots>_\alpha$ – вказане усереднення. Введемо також позначення статсуми n реплік системи, усередненої за множиною змінних α:

$$\overline{Z}_N = <Z(\beta)^n>_\alpha. \quad (4)$$

Індекс N вказує, що статсума описує систему N частинок. Відповідно, для вільної енергії (3) отримаємо:

$$\overline{F}(\beta) = -\frac{1}{\beta}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln \overline{Z}_N. \quad (5)$$

Таким чином, розрахунок Z_N дозволяє визначити $\overline{F}(\beta)$ і для $\beta \to \infty$ знайти шуканий мінімум

$$F = <\min_\pi H(\pi)>_\alpha = \lim_{\beta\to\infty}\overline{F}(\beta). \quad (6)$$

Подібно як і в задачах статистичної фізики [3; 4], у випадку оптимізаційних задач зручно перейти до великої статистичної суми. Це зумовлено тим, що для статсуми (4) можна побудувати інтегральне представлення:

$$\overline{Z}_N = \int d\gamma \psi(z)^N, \quad (7)$$

де $d\gamma$ позначає елемент гауссової міри інтегрування в деякому просторі; $\psi(z)$ – функція, задана в цьому просторі. Для великої статистичної суми [3; 4] отримаємо:

$$\Xi(0) = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N}\theta^N \overline{Z}_N = \int d\gamma \exp(-H) \quad (8)$$

де введено позначення величини:

$$H = -\theta\, \psi(z), \quad (9)$$

яку також називатимемо гамільтоніаном. Статсуму $\overline{Z}_N$ визначаємо на основі великої статсуми за формулою [4; 7]:

$$\overline{Z}_N = \frac{N!}{2\pi i}\oint \frac{\Xi(\theta)}{\theta^{N+1}} d\theta, \quad (10)$$

де інтегрування в (10) здійснюється в комплексній площині θ вздовж замкнутого контуру, що охоплює точку $\theta = 0$.

Вибір великої статсуми є більш зручним для застосування варіаційного методу завдяки експонентній формі запису (8) (див. також [6]). Варіаційний метод для термодинамічного потенціалу $\Omega(\theta) = -\ln\Xi(\theta)$ ґрунтується на варіаційній нерівності:

$$\Omega(\theta) \le \Omega_0(\theta) + <H - H_0>_0, \quad (11)$$

де H_0 – пробний гамільтоніан системи, а величина $\Omega_0(\theta) = -\ln\Xi(\theta)$ має зміст потенціалу системи з пробним гамільтоніаном.

Усереднення в (11) визначаємо формулою

$$<\ldots>_0 = \frac{1}{\Xi_0(\theta)}\int d\gamma(\ldots)\exp(-H_0), \quad \Xi_0(\theta) = \int d\gamma \exp(-H_0).$$

Відомо, що є два основні критерії вибору пробного гамільтоніану – він повинен бути достатньо простим для аналізу і володіти певними симетрійними властивостями точного гамільтоніану (9). Пробний гамільтоніан також містить сукупність параметрів, варіація за якими дозволяє поліпшити оцінку за нерівністю (11).

Модель minority game (гра в меншість). Модель minority game виникла в результаті застосування підходів і методів статистичної фізики до дослідження фінансових ринків [8–11]. Зокрема, за аналогією з «мікроскопічним» описом фізичних систем, вважається, що глобальні явища на ринку формуються в результаті ігрової взаємодії N агентів (гравців) ринку. У моделі minority game задається, що кожен момент часу t i-й агент ($i = 1, \ldots, N$) може виконувати одну з дій: $a_i(t) = 1$ (купівля) або $a_i(t) = -1$ (продаж). Виграш i-го агента $u_i(t)$, ураховуючи дії всіх агентів, визначаємо формулою

$$u_i(t) = -a_i(t)A(t), \quad A(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t). \quad (12)$$

Очевидно, змінна $A(t)$ описує колективні властивості ринку. У кожен момент часу всіх агентів ринку за обраною дією можна розділити на дві групи: ті, що продають, і ті, що купують. Тип взаємодії (12) визначає правило меншості – виграє той, хто перебуває в меншості (у менш чисельній групі). Виграшну дію i-го агента можна записати також у вигляді $a_i(t) = -\mathrm{sign}[A(t)]$ і його виграш становитиме $|A(t)|$.

Відповідно дію агента, що перебуває в більшості, можна записати так: $a_i(t) = \mathrm{sign}[A(t)]$, його програш становить $-|A(t)|$. Сумарний виграш усіх агентів рівний $\Sigma_i u_i(t) = -A^2(t)$ і завжди від'ємний. Усі агенти ринку мають доступ до загальної інформації, яку моделюють цілим числом $\mu = 1, \ldots, P$. У момент часу t інформація набуває значення $\mu(t)$. Оскільки агент ринку здійснює свій вибір, зважаючи на наявну йому інформацію, будемо позначати його дії через:

$$A^\mu(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i^\mu(t). \quad (13)$$

Маючи певну інформацію, агенти ринку обирають певну стратегію своїх дій. Легко бачити, що існує 2^P стратегій, проте для простоти вважається, що кожен агент обирає їх лише з кількості S. Дію i-го агента, якщо він дотримується стратегії s і використовує інформацію $\mu(t)$, позначимо $a_{s,i}^\mu$. У рівноважному випадку часову змінну t далі опускаємо. У моделі число P розглядається досить великим, так що величина

$\alpha = P / N$ є скінченна для $N >> 1$, $P >> 1$. Змінна μ розглядається як випадкова із розподілом ρ^{μ} (далі вважаємо $\rho^{\mu} = 1 / P$). У моделі задається також, що агенти обирають дії $a_{s,i}^{\mu}$ випадковим чином з імовірностями:

$$P(a_{s,i}^{\mu} = +1) = P(a_{s,i}^{\mu} = -1) = \frac{1}{2}, \tag{14}$$

$$i = 1, ..., N,\ s = 1, ..., S,\ \mu = 1, ..., P. \tag{15}$$

Згідно з основною теоремою теорії ігор [12], для аналізу гри вводяться мішані стратегії $\pi_{s,i}$, що визначають імовірності, з якими i-й агент застосовує дану стратегію (очевидно, виконується умова $\Sigma_s \pi_{s,i} = 1$). Множина змінних $\pi_{s,i}$ визначає фазовий простір моделі [8; 9]. У фазовому просторі визначають середні значення величин

$$< A^{\mu} > = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} \pi_{s,i}\ a_{s,i}^{\mu}. \tag{16}$$

Як було зазначено, величина $< A^{\mu} >$ визначає виграш на ринку.

Динаміка ринку [8–11] описується гамільтоніаном:

$$H = \sum_{\mu=1}^{P} \rho^{\mu} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} \pi_{s,i}\ a_{s,i}^{\mu} \right)^2, \tag{17}$$

що визначає також флуктуації (16). Для гамільтоніану (17) можна визначити симетричний стан з $H = 0$ і асиметричний стан з $H > 0$. У симетричному стані $< A^{\mu} > = 0$ і середній виграш рівний нулю. У випадку асиметрії $< A^{\mu} > \neq 0$ і тим самим існує виграшна стратегія. Власне дослідження основного стану гамільтоніану (17) у моделі minority game дає змогу визначити рівновагу на ринку та умови її порушення.

Статсуму системи n реплік [формула (4)] з гамільтоніаном (17) після усереднення за $a_{s,i}^{\mu}$ запишемо так [8; 9; 11]:

$$\overline{Z}_N = \int d\gamma \overline{\psi}, \tag{18}$$

де позначено:

$$\overline{\psi} = \int_0^1 D\pi \prod_{i,a} \delta\left(\sum_s \pi_{s,i}^a - 1 \right) \prod_{\mu,i,s} \cos\left[\sqrt{\frac{2\beta}{P}} \left(\sum_a z_a^{\mu} \pi_{s,i}^a \right) \right],$$

$$d\gamma = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{a,\mu} \left(z_a^{\mu} \right)^2 \right) \prod_{a,\mu} \frac{dz_a^{\mu}}{\sqrt{2\pi}}, \quad D\pi = \prod_{a,i,s} d\pi_{s,i}^a.$$

Тут індекс $a = 1, ..., n$ нумерує репліки, інтегрування за змінними z_a^{μ} відбувається в межах $z_a^{\mu} \in (-\infty, \infty)$, δ – функція Дірака забезпечує умову повноти суми ймовірностей. При отриманні формули (18) для лінеаризації квадратичних доданків гамільтоніану (17) було використано інтегральне перетворення

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) \exp(ixz).$$

Варіаційна нерівність. Далі обмежимося лише двома станами $S = 2$ [8; 9; 11].

Присутність у (18) функцій Дірака $\delta\left(\pi_{1,i}^a + \pi_{2,i}^a - 1 \right)$ дозволяє простим чином виконати інтегрування за змінними $\pi_{2,i}^a$; ($i = 1, ..., N$, $a = 1, ..., n$) і після нескладних алгебраїчних перетворень отримати представлення для статсуми:

$$\overline{Z}_N = \int d\gamma \psi(z)^N, \tag{19}$$

де введено позначення:

$$\psi(z) = \int_{-1}^{1} \prod_a \frac{d\pi}{2} \prod_{\mu} \cos\left(\frac{1}{2} \sum_a \xi_a^{\mu} (1 + \pi_a) \right) \cos\left(\frac{1}{2} \sum_a \xi_a^{\mu} (1 - \pi_a) \right), \quad \xi_a^{\mu} = \sqrt{\frac{2\beta}{P}} z_a^{\mu}. \tag{20}$$

Формулу (19) можна трактувати як представлення статсуми у просторі польових змінних z_n^{μ}, які є спряженими до частинкових змінних.

Для великої статсуми (8) у гамільтоніан (9) слід підставити значення (20).

Очевидно, що виконати точний розрахунок статсум (8) і (19) неможливо.

Розглянемо структуру функції $\psi(z)$ у степеневий ряд за змінними z_a^{μ}. Виписуючи лише квадратичні члени за степенями z_a^{μ}, отримаємо:

$$\cos\left(\frac{1}{2} \sum_a \xi_a^{\mu} (1 + \pi_a) \right) \cos\left(\frac{1}{2} \sum_a \xi_a^{\mu} (1 - \pi_a) \right) \approx 1 - \frac{\beta}{2P} \left[\left(\sum_a z_a^{\mu} \right)^2 + \left(\sum_a z_a^{\mu} \pi_a \right) \right].$$

Підставляючи у (20) і виконуючи інтегрування за змінними πa, отримаємо представлення $\psi(z)$ і, відповідно, гамільтоніану $H(\theta)$ у вигляді степеневого ряду за змінними z_a^{μ}. Задача точно розв'язується, якщо обмежитися квадратичними членами ряду. Ефективно вищі степені змінних z_a^{μ} можна врахувати, виконуючи перетворення:

$$\left(\sum_a z_a^{\mu} \pi_a \right)^2 = \sum_{a,b} z_a^{\mu} z_b^{\mu} \pi_a \pi_b \rightarrow \sum_{a,b} z_a^{\mu} z_b^{\mu} Q_{a,b}.$$

Ці міркування ми використаємо при виборі пробного гамільтоніану (див. також [6; 13]), отримаємо:

$$H_0 = \theta \psi_0(z), \quad \psi_0(\theta) = 1 - \frac{\beta}{2P} \sum_{\mu} \left[\left(\sum z_a^{\mu} \right)^2 + \sum_{a,b} z_a^{\mu} z_b^{\mu} Q_{a,b} \right]. \tag{21}$$

Введена матриця Q задана у просторі реплічних змінних, елементи якої є також варіаційними параметрами задачі.

Зауважимо, що пробний гамільтоніан (21) є простіший, аніж заданий у роботі [6].

Для пробного гамільтоніану (21) виконаємо розрахунок величин у нерівності (11) (див. також [6]). У результаті отримаємо:

$$\Xi_0(\theta) = e^{\theta} \left(\int Dz\, e^{-<z|\hat{M}|z>} \right)^P, \tag{22}$$

де позначено:

$$\hat{M} = \hat{I} + \frac{\theta\beta}{P}\hat{E} + \frac{\theta\beta}{P}\hat{Q}, \tag{23}$$

$$< z\left|\hat{M}\right|z > = \sum_{a,b} z_a\, M_{a,b}\, z_b, \qquad Dz = \prod_a \frac{dz_a}{\sqrt{2\pi}}.$$

Виконуючи у (22) інтегрування за змінними z_a, одержимо:

$$\Xi_0(\theta) = \frac{e^{\theta}}{\left(\sqrt{\det \hat{M}}\right)^P}. \tag{24}$$

Середнє від пробного гамільтоніану визначимо за допомогою співвідношення:

$$<H_0>_0 = \theta \frac{\partial \Omega_0(\theta)}{\partial \theta}. \tag{25}$$

Відповідно для середнього $<H>_0$, отримаємо:

$$< H >_0 = -\frac{\theta e^{\theta}}{\Xi_0(\theta)} \int D\pi \left(\int Dz\; e^{-<z|\hat{M}|z>} \psi_1(z) \right)^P, \tag{26}$$

де позначено

$$\psi_1(z) = \cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{2P}} \sum_a z_a\,(1+\pi_a)\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{2P}} \sum_a z_a\,(1-\pi_a)\right). \tag{27}$$

Інтегрування за змінними z_a у (26) виконується в замкнутому вигляді, у результаті отримаємо:

$$< H >_0 = -\frac{\theta e^{\theta}}{\Xi_0(\theta)} \int D\pi \left(\frac{\tilde{\psi}_1}{\sqrt{\det \hat{M}}} \right)^P, \tag{28}$$

де

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\beta}{P}<1\left|\hat{M}^{-1}\right|1>\pi} + e^{-\frac{\beta}{P}< \quad \left|\hat{M}^{-1}\right| \quad >} \right]. \tag{29}$$

Тут $\hat{M}^{-1}$ позначає матрицю, обернену до $\hat{M}$, $|1>$ – n-вимірний вектор, усі координати якого рівні 1, $|\pi> = |\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n>$.

Підставляючи вираз для $\Xi_0(\beta)$ у (24), після деяких спрощень отримаємо:

$$< H >_0 = -\theta \int D\pi\, \tilde{\psi}_1^{\,P}. \tag{30}$$

Таким чином, формули (24), (25), (28) і нерівність (11) визначають оцінку для $\Omega(\theta)$. Очевидно, подальші розрахунки можна виконати, задаючи конкретний вигляд матриці $\hat{Q}$.

Наближення симетричних реплік. Варіаційну матрицю задамо $\hat{Q}$ для наближення симетричних реплік [1; 2; 6; 8; 9; 11] подамо так:

$$\hat{Q} = (Q - q)\hat{I} + q\hat{E}, \tag{31}$$

де $\hat{I}$ – одинична матриця n-го порядку; $\hat{E}$ – матриця n-го порядку, всі елементи якої рівні 1. У наближенні симетричних реплік є варіаційні параметри Q, q.

Визначимо лінійні за n внески в потенціал $\Omega(\theta)$. Для цього розглянемо матрицю $\hat{M}$ (23):

$$\hat{M} = \left[1 + \frac{\theta\beta}{P}(Q - q)\right]\hat{I} + \frac{\theta\beta}{P}(1 + q)\,\hat{E}\cdot \tag{32}$$

Визначник матриці $\hat{M}$ для $n \approx 0$ (обмежуємось лінійними членами за n), рівний (див. [6; 9]):

$$\det \hat{M} \approx 1 + n\,(\ln\left[1 + \frac{\beta\theta}{P}(Q - q)\right] + \frac{\frac{\beta\theta}{P}(1 + q)}{1 + \frac{\beta\theta}{P}(Q - q)}. \tag{33}$$

На основі формул (33) і (24), для потенціалу $\Omega(\theta)$ у лінійному наближенні за n, отримаємо:

$$\Omega_0(\theta) \approx -\theta + n\,\Omega_0^{(1)}(\theta),$$
$$\Omega_0^{(1)}(\theta) = \frac{P}{2}\left(\ln\left[1 + \frac{\theta\beta}{P}(Q - q)\right] + \frac{\frac{\theta\beta}{P}(1 + q)}{1 + \frac{\beta\theta}{P}(Q - q)} \right) \tag{34}$$

Відповідно, використовуючи формули (25) і (34), визначаємо:

$$< H_0 >_0 \approx -\theta + n < H_0 >_0^{(1)},$$
$$< H_0 >_0^{(1)} = \frac{P}{2}\left(\frac{\frac{\beta\theta}{P}(Q - q)}{1 + \frac{\beta\theta}{P}(Q - q)} + \frac{\frac{\beta\theta}{P}(1 + q)}{\left[1 + \frac{\beta\theta}{P}(Q - q)\right]^2} \right). \tag{35}$$

Для обчислення величини $<H>_0$ розглянемо обернену матрицю M^{-1}. Зокрема, для $n = 0$ отримаємо [6; 13]:

$$\hat{M}^{-1} \approx m_1\hat{I} + m_2\hat{E}, \tag{36}$$

$$m_1 = \frac{1}{1 + \frac{\beta\theta}{P}(Q - q)}, \qquad m_2 = -\frac{\frac{\beta\theta}{P}(1 + q)}{\left[1 + \frac{\beta\theta}{P}(Q - q)\right]^2}.$$

Відповідно, для головних внесків величин, що входять у формулу (29), для $n \approx 0$ знайдемо:

$$<1\left|\hat{M}^{-1}\right|1> \approx n m_1,$$
$$<\pi\left|\hat{M}^{-1}\right|\pi> \approx m_1 \sum_a \pi_a^2 + m_2 \left(\sum_a \pi_a\right)^2. \tag{37}$$

Щоб виконати інтегрування за змінними π_a у виразі (30), представимо його так:

$$< H >_0 = -\frac{\theta}{2P} \sum_{s=0}^{P} C_P^s\; \psi_1(s) \int D\pi\; \psi_2(s), \tag{38}$$

$$\psi_1(s) = e^{-\beta(P-s)/P\; n m_1},$$

$$\psi_2(s) = e^{-\beta s/P\left[m_1 \sum_a \pi_a^2 + m_2\,(\sum_a \pi_a)^2\right]}.$$

Після цього лінеаризуємо доданок $\left(\sum_a \pi_a\right)^2$, що міститься в експоненті (38), з допомогою інтегрального перетворення

$$e^{\frac{x^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{2} + \rho x}. \tag{39}$$

Після нескладних алгебраїчних перетворень, які ми опускаємо, для $n \approx 0$ отримаємо:

$$< H >_0 \approx -\theta + n < H >_0^{(1)}, \tag{40}$$

$$< H >_0^{(1)} = \frac{1}{2}\beta\theta m_1 - \frac{\theta}{2^P}\sum_{s=0}^{P} C_P^s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \ln\Phi(\rho, s),$$

$$\Phi(\rho, s) = \int_{-1}^{1} \frac{d\pi}{2} \exp\left(-\frac{\beta}{P} s m_1 \pi^2 + \rho\pi\sqrt{\frac{2\beta}{P} s |m_2|} \right).$$

Підсумовуючи складові (34), (35) і (40), отримаємо вираз для складової $\Omega^{(1)}(\theta)$ потенціалу $\Omega(\theta)$:

$$\Omega^{(1)}(\theta) = \Omega_0^{(1)}(\theta) + <H>_0^{(1)} - <H_0>_0^{(1)}. \tag{41}$$

Для визначення вільної енергії $\overline{F}(\beta)$ (5), слід обчислити контурний інтеграл. Легко бачити, що складові $\Omega_0^{(1)}(\theta)$, $<H>_0^{(1)}$, $<H_0>_0^{(1)}$ є аналітичними в області контуру інтегрування і зростають не швидше від деякого степеня θ. Обчислення відповідних інтегралів здійснимо методом перевалу. У результаті для $F(\beta)$ отримаємо такий вираз:

$$\overline{F}(\beta)/N = F_0(\beta) + F_1(\beta) + F_2(\beta),$$

$$F_0(\beta) = \frac{a}{2\beta} \ln(1+\chi) + \frac{1}{2}\frac{1+q}{1+\chi},$$

$$F_1(\beta) = -\frac{1}{2}\frac{Q-q}{(1+\chi)^2} - \frac{1}{2}\frac{1+q}{(1+\chi)^2},$$

$$F_2(\beta) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\chi} - \frac{1}{2\beta}\sum_{s=0}^{P} C_P^s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \ln\tilde{\Phi}(\rho, s), \tag{42}$$

$$\tilde{\Phi}(\rho, s) = \int_{-1}^{1} \exp\left(-\beta\phi(\pi)\right) d\pi,$$

$$\phi(\pi) = \frac{1}{1+\chi}\left(\frac{s\,\pi^2}{P} - \pi\rho\sqrt{\frac{2s}{P}\frac{1+q}{a}} \right), \quad \chi = \frac{\beta}{a}(Q-q).$$

Легко бачити, що отриманий вираз для вільної енергії $\overline{F}(\beta)$ збігається з результатом роботи [6] за іншого вибору пробного гамільтоніану. Розв'язок системи рівнянь для варіаційних параметрів Q, q і виконання границі $\beta \to \infty$ наведено в [6].

У результаті отримуємо вираз для шуканого мінімуму (6):

$$F/N = \frac{1+q}{2a^2}\left[a - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{a}{2(1+q)}} \right) \right]^2 \tag{43}$$

і сприйнятливості

$$\chi = \frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{a}{2\,(1+q)}} \right)}{a - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{a}{2\,(1+q)}} \right)} \tag{44}$$

Наведені формули містять основний висновок щодо розглянутої моделі про порушенням рівноваги на ринку. Для $a_c \cong 0{,}3374$ сприйнятливість $\chi \to \infty$ і $F = 0$; для $a \le a_c$ мінімум $F = 0$, а для $a > a_c$ – $F > 0$. Звідси можна зробити висновок, що порушення рівноваги на ринку відбувається залежно від рівня інформованості агентів ринку.

Висновки. У статті розглянуто деякі можливості застосування відомих методів статистичної фізики до оптимізаційних задач фінансового ринку, продемонстровано ефективність варіаційного методу в рамках моделі minore game (гра в меншість). Також розглянуто модель, гамільтоніан якої $H > 0$. Разом з тим слід зауважити, що спосіб вибору пробного гамільтоніану, запропонований тут, можна застосовувати і для моделей із гамільтоніаном $H < 0$. Ще одне: наведена методика розрахунку мінімуму в методі реплік може бути узагальнена на випадок порушення реплічної симетрії.

Список використаної літератури

1. Hidetoshi Nishimori. Statistical physics of spin glasses and information processing an introduction. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
2. Mezard M., Parisi G. and Virasoro M. A. Spin Glass Theory and Beyond. – World Scientific. – Singapore, 1987.
3. Фейнман Р. Статистическая механика. – М.: Мир, 1975.
4. Керзон Хуанг. Статистическая механика. – М.: Мир, 1966.
5. Dörthe Malzahn and Manfred Opper. A statistical physics approach for the analysis of machine learning algorithms on real data // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. – 2005. – No 11. – P. 11001:1-33.
6. Янішевський В. До задачі оптимізації в моделі minority game // Журнал фізичних досліджень. – 2011. – Т. 15. – № 3. – С. 3601:1-10.
7. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Физматлит, 2005.
8. Challet D., Zhang Y. C. Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 1997. – V. 246. – P. 407–418.
9. Challet D., Zhang Y. C. On the minority game: Analytical and numerical studies // Physica A: Statistical and Theoretical Physics. – 1998. – V. 256. – P. 514–532.
10. Savit R., Manuca R. and Riolo R. Adaptive competition, market efficiency and phase transitions // Physical Review Letters. – 1999. – V. 82. – P. 2203–2206.
11. Coolen C. The Mathematical Theory of Minority Games. Statistical mechanics of interacting agents. – Oxford: University press, 2005.
12. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1972.

13. Блажієвський Л., Янішевський В. Варіаційний метод в оптимізаційній задачі моделі моделі minority game // Журнал фізичних досліджень. – 2009.– Т. 13. – № 2. – С. 1–7.

Summary. An application of the methods of statistical physics to solve optimization problems in some econophysics models was illustrated. The approach is based on the variational inequality for potential of grand partition function. By selection of the trial Hamiltonian for minore game model the well known results in replica symmetric approximation where received.
Keywords: econophysics, optimization, variationals methods, replicas methods.