УДК 330.4:519.86

Узагальнена безперервна модель фінансової взаємодії підприємств при виконанні бюджетних регіональних проектів

Володимир Михайлович Кузніченко,
доцент кафедри економіко-математичних методів та інформаційних технологій
Харківського інституту фінансів
Українського державного університету фінансів та міжнародної торгівлі,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Анотація. Розглянуто ймовірнісний підхід до фінансової взаємодії підприємств при виконанні бюджетних регіональних проектів на базі теорії марковських процесів із безперервним часом.

Показано методику отримання матриць інтенсивностей, які є диференціальними, і перехідних матриць, що відповідають їм, для процесів приходу і витрат.

Для створення безперервної моделі використовувалися функції від матриць, а також перетворення Лапласа, яке дозволило знайти аналітичний вид для перехідних матриць, а значить і вирази для векторів стану системи.

Отримані вирази спрощують аналіз і розрахунок станів системи в порівнянні з іншими методами. Значення безперервних перехідних матриць включають результати дискретної моделі і рівні кратності часу кроку. Безперервна модель поліпшує якість планування і ефективність контролю між виконавцями регіонального проекту.

Ключові слова: ланцюги Маркова, лінійні диференціальні рівняння, *z*-перетворення, перетворення Лапласа, безперервна модель.

Вступ. Сучасний стан розвитку економіки України характеризується певними ризиками: занепад національної промисловості, розвиток тіньової економіки, високий динамізм змін у зовнішньому і внутрішньому економічному середовищі, що зумовлює підвищені ризики для господарської діяльності підприємств. Усе це, безумовно, негативно впливає на загальну економічну ситуацію у країні та висуває на перше місце гостру проблему – забезпечення ефективності державного фінансового контролю. За цих умов реалізація проектів у регіональних програмах усіма виконавцями вимагає посиленого моніторингу з боку місцевих органів і є актуальною темою для розроблення моделей управління товарно-грошовими потоками.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Істотний внесок у дослідження фінансового забезпечення розвитку української промисловості зробили такі вітчизняні і зарубіжні вчені, як А. Акімов, Н. Герасимчук, Н. Чумаченко, Р. Коттер, С. Майєр та інші.

Дослідження проблем формування і використання фінансових ресурсів проводили вітчизняні фахівці – С. Буковинський, О. Кириленко, Ц. Огонь, Н. Старостенко, О. Сунцова, В. Швець, Р. Шинкаренко, С. Юрій та інші.

Стратегічне управління грошовими потоками, які є важливою складовою загальної стратегії розвитку підприємства, вивчалося в роботі [1]. У ній розроблено концептуальну модель стратегічного управління грошовими потоками підприємства, в якій до методів управління відносять прогнозування, моделювання і метод аналізу.

У статті [2] запропоновано концепцію управління діяльності інтегрованих корпоративних структур, у якій підкреслюється необхідність узгодження управління фінансовими ресурсами підприємств корпоративної структури.

У роботі [3] досліджуються процедури визначення інтегральних показників соціально-економічного розвитку регіонів, які базуються на автоматизації методики експертних оцінок і методу головних компонент.

Пропонується механізм інтелектуального аналізу даних соціально-економічного моніторингу на основі експертно-статистичного оцінювання.

Автори роботи [4] запропонували досліджувати грошові потоки підприємств на основі методу регресійної-кореляційної моделі. Вони розглянули структуру грошового потоку як математичну функцію і описали модель оцінки різних методів прогнозування обсягів грошових потоків у майбутніх періодах з метою підвищення надійності прогнозування.

Але питання розподілу коштів між виконавцями регіональних проектів було розглянуто недостатньо. Тому дослідження моделі обігу бюджетних коштів при виконанні регіональних проектів є актуальним.

Невирішені питання і проблеми. Автори робіт [5–8] представили економіко-математичну модель товарно-грошового розподілу загального бюджету проекту в часі на основі ймовірнісного підходу (теорія ланцюгів Маркова). Дослідження ймовірнісної моделі динаміки товарно-грошових потоків між виконавцями проекту було проведено для дискретного часу.

Постановка завдання. ***Метою*** статті є побудова узагальненої безперервної лінійної моделі товарно-грошового обігу загального бюджету проекту між виконавцями проекту на основі ймовірнісного підходу, яка дозволяє розглядати одночасно процеси приходу і витрат. Це дозволить виконувати планування і контроль безперервних у часі грошово-товарних відносин між виконавцями проекту. При цьому встановлюється взаємозв'язок із дискретною і безперервною моделями, тобто аналітичні рішення цих завдань за $t = n$ збігаються.

Основні результати дослідження. Розглянемо регіональну систему, яка складається з n підприємств (учасників регіонального проекту). Тоді дискретний процес товарно-грошового обміну між виконавцями проекту може бути представлений таким модельним реккурентним співвідношенням із квадратною матрицею L-перехідних імовірностей розміру n для ергодичного ланцюга Маркова:

$$\overline{p}(n) = \overline{p}(0)L^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{p}(t) = \overline{p}(t)A, \tag{2}$$

де $\overline{p}(n)$ – вектор імовірностей станів системи через n кроків, а $\overline{p}(t)$ – вектор імовірностей станів системи в момент часу t.

Матриця L є стохастичною ергодичною перехідною матрицею, у якої сума елементів по рядках дорівнює одиниці.

Елементи матриці інтенсивностей A визначають інтенсивності переходів зі стану в стан, а діагональні елементи знаходять з умови, що сума елементів уздовж кожного рядка матриці A дорівнює нулю. Такі матриці називають диференціальними.

Застосуємо до рівняння (2) перетворення Лапласа $[\overline{p}(t) \leftrightarrow \overline{P}(s)]$:

$$s\overline{P}(s) - \overline{p}(0) = \overline{P}(s)A$$

або

$$\overline{P}(s)(sI - A) = \overline{p}(0), \tag{3}$$

де $\overline{P}(s) = \int_0^\infty \overline{p}(t)e^{-st}dt$; I – одинична матриця.

З рівняння (3) маємо:

$$\overline{P}(s) = \overline{p}(0)(sI - A)^{-1}. \tag{4}$$

Матриця $(sI - A)^{-1}$ повністтю описує поведінку марковських процесів із безперервним часом [9].

Відомо, що рішення системи (2) з початковими умовами має вигляд:

$$\overline{p}(t) = \overline{p}(0)e^{At}, \tag{5}$$

де під матричною функцією e^{At} треба розуміти експонентний степеневий ряд

$$I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \ldots,$$

який збігається до e^{At}.

Порівнюючи (1) і (5) для дискретних і безперервних марковських процесів за $t = n$, приходимо до рівності: $e^A = L$

або

$$A = \ln L. \tag{6}$$

Знаходження функцій від матриць через многочлени здійснюється на підставі теореми Гамільтона – Келі та її наслідків і детально описані в літературі [10; 11].

Покажемо методику отримання матриць інтенсивності A_1 і A_2 та відповідних їм матриць переходу H_1 і H_2 для безперервних процесів приходу і витрат на прикладі трьох учасників регіонального проекту.

Розглянемо дискретну задачу лінійної моделі фінансової взаємодії підприємств у виконанні бюджетних регіональних проектів, для якої стохастичні ергодичні матриці ймовірностей переходів єдиного процесу для приходу L_1 і витрат L_2 визначаємо так:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{9}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}, \quad B_2^T = \begin{pmatrix} \frac{55}{96} & \frac{3}{16} & \frac{23}{96} \\ \frac{1}{32} & \frac{15}{16} & \frac{1}{32} \\ \frac{23}{96} & \frac{3}{16} & \frac{55}{96} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$$L_1 = B_1 \times B_2^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad L_2 = B_2^T \times B_1 = \begin{pmatrix} \frac{463}{768} & \frac{11}{96} & \frac{217}{768} \\ \frac{427}{768} & \frac{23}{96} & \frac{157}{768} \\ \frac{271}{768} & \frac{11}{96} & \frac{409}{768} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Застосовуючи z-перетворення [9] до (1), для L_1 і L_2 знаходимо аналітичний вид розв'язку дискретної задачі:

$$\overline{p}_1(n) = \overline{p}_1(0)\left[\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{8}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}\right]; \tag{9}$$

$$\overline{p}_2(n)=\overline{p}_2(0)\left[\begin{pmatrix}\frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168}\\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168}\\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168}\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{4}\right)^n\begin{pmatrix}\frac{9}{32} & 0 & -\frac{9}{32}\\ \frac{29}{32} & 0 & -\frac{29}{32}\\ -\frac{23}{32} & 0 & \frac{23}{32}\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{8}\right)^n\begin{pmatrix}\frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672}\\ -\frac{949}{672} & \frac{73}{84} & \frac{365}{672}\\ \frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672}\end{pmatrix}\right]. \quad (10)$$

Побудуємо безперервну модель цієї задачі. Для цього знайдемо матрицю A_1. Шукаємо, характеристичний поліном матриці L_1:

$$\Delta_L(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{8} & \lambda-\frac{3}{8} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{4})(\lambda-\frac{1}{8}). \quad (11)$$

Усі корені характеристичного полінома прості, тому характеристичний поліном збігається з мінімальним анулюючим поліномом $\psi(\lambda)=\Delta_{L_1}(\lambda)$. Спектр матриці L_1 позначимо через Λ_{L_1}, що дорівнює:

$$\Lambda_{L_1}=\left\{\frac{1}{8};\quad \frac{1}{4};\quad 1\right\}.$$

Функцію $f(\lambda)=\ln(\lambda)$ визначено на спектрі матриці L_1.

Якщо функція $f(\lambda)$ визначена на спектрі матриці L_1 та $g(\lambda)$ – будь-який многочлен, що збігається з $f(\lambda)$ на спектрі матриці L_1 [тобто $f(\Lambda_{L_1})=g(\Lambda_{L_1})$], то за визначенням

$$f(L_1)=g(L_1). \quad (12)$$

Такий многочлен можна отримати різними методами. У нашому варіанті многочлен $g(\lambda)$ найменшого ступеня, однозначно визначений на спектрі матриці L_1, буде такий: $g(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$.

Складемо і вирішимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{c|l} g(1)=f(1)=0=a+b+c & a=\frac{128}{21}\ln(\frac{1}{2})\\ g(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{4})=\ln(\frac{1}{4})=\frac{1}{16}a+\frac{1}{4}b+c & b=-\frac{72}{7}\ln(\frac{1}{2})\\ g(\frac{1}{8})=f(\frac{1}{8})=\ln(\frac{1}{8})=\frac{1}{64}a+\frac{1}{8}b+c & c=\frac{88}{21}\ln(\frac{1}{2})\end{array}\right.$$

Тоді $A_1=\ln(L)=\left(\frac{128}{21}L^2-\frac{72}{7}L+\frac{88}{21}I\right)\ln(\frac{1}{2})=$

$$=\ln(2)\begin{pmatrix}-\frac{32}{21} & \frac{6}{7} & \frac{2}{3}\\ \frac{31}{21} & -\frac{15}{7} & \frac{2}{3}\\ \frac{10}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

Застосуємо до рівняння (5) перетворення Лапласа:

$$sI-A_1=\begin{pmatrix}s+\frac{32}{21}\ln 2 & -\frac{6}{7}\ln 2 & -\frac{2}{3}\ln 2\\ -\frac{31}{21}\ln 2 & s+\frac{15}{7}\ln 2 & -\frac{2}{3}\ln 2\\ -\frac{10}{21}\ln 2 & -\frac{6}{7}\ln 2 & s+\frac{4}{3}\ln 2\end{pmatrix},$$

$$(sI-A_1)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{s^2+\frac{73}{21}s\ln 2+\frac{16}{7}(\ln 2)^2}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} & \frac{\frac{6}{7}\ln 2}{s(s+3\ln 2)} & \frac{\frac{2}{3}\ln 2}{s(s+2\ln 2)}\\ \frac{\frac{31}{21}s\ln 2+\frac{16}{7}(\ln 2)^2}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} & \frac{s^2+\frac{20}{7}s\ln 2+\frac{12}{7}(\ln 2)^2}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} & \frac{\frac{2}{3}\ln 2}{s(s+3\ln 2)}\\ \frac{\frac{10}{21}s\ln 2+\frac{16}{7}(\ln 2)^2}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} & \frac{\frac{6}{7}\ln 2}{s(s+3\ln 2)} & \frac{s^2+\frac{11}{3}s\ln 2+2(\ln 2)^2}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)}\end{pmatrix}.$$

Розкладаючи на прості дроби, отримуємо:

$$(sI-A_1)^{-1}=\frac{1}{s}\begin{pmatrix}\frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7}\\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7}\\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}+\frac{1}{(s+2\ln 2)}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}+\frac{1}{(s+3\ln 2)}\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0\\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0\\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0\end{pmatrix}. \quad (13)$$

Нехай матриця $H_1(t)$ буде зворотним перетворенням матриці $(sI - A)^{-1}$.

Тоді зворотне перетворення переводить рівняння (4) у

$$\overline{p}_1(t) = \overline{p}_1(0)H_1(t). \quad (14)$$

Скориставшись перетворенням Лапласа, отримаємо:

$$\overline{p_1}(t) = \overline{p_1}(0)\left[\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + e^{-2t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + e^{-3t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}\right]. \quad (15)$$

Порівнюючи (9) з (15), ми бачимо, що $H_1(t)$ є виразом в кінцевому варіанті для матриці $e^{A_1 t}$:

$$H_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + e^{-2t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + e^{-3t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

За $t = n$ маємо:

$$H_1(n) = \begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + e^{-2n\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + e^{-3n\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{8}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

А отже, (9) збігається з (15) за $t = n$. Безперервна модель для матриці L_1 побудована.

Побудуємо безперервну модель для матриці L_2. Для цього знайдемо матрицю A_2. Шукаємо характеристичний поліном матриці L_2:

$$\Delta_{L_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{463}{768} & -\frac{11}{96} & -\frac{217}{768} \\ -\frac{427}{768} & \lambda - \frac{23}{96} & -\frac{157}{768} \\ -\frac{271}{768} & -\frac{11}{96} & \lambda - \frac{409}{768} \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{4})(\lambda - \frac{1}{8}). \quad (16)$$

Усі корені характеристичного полінома прості, тому характеристичний поліном збігається з мінімальним анулюючим поліномом $\psi(\lambda) = \Delta_{L_2}(\lambda)$.

Спектр матриці L_2 позначимо через Λ_{L_2}, що дорівнює:

$$\Lambda_{L_2} = \left\{\frac{1}{8};\quad \frac{1}{4};\quad 1\right\}.$$

Функцію $f(\lambda) = \ln(\lambda)$ визначено на спектрі матриці L_2.

Якщо функція $f(\lambda)$ визначена на спектрі матриці L_2 і $g(\lambda)$ – будь-який многочлен, що збігається з $f(\lambda)$ на спектрі матриці L_2 [тобто $f(\Lambda_{L_2}) = g(\Lambda_{L_2})$], то за визначенням

$$f(L_2) = g(L_2). \quad (17)$$

Такий многочлен можна отримати різними методами. У нашому варіанті многочлен $g(\lambda)$ найменшого ступеня, однозначно визначений на спектрі матриці L_2, буде такий: $g(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.

Складемо і вирішимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{c|c} g(1) = f(1) = 0 = a + b + c & a = \frac{128}{21}\ln(\frac{1}{2}) \\ g(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) = \ln(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b + c & b = -\frac{72}{7}\ln(\frac{1}{2}) \\ g(\frac{1}{8}) = f(\frac{1}{8}) = \ln(\frac{1}{8}) = \frac{1}{64}a + \frac{1}{8}b + c & c = \frac{88}{21}\ln(\frac{1}{2}) \end{array}\right.$$

Тоді

$$A_2 = \ln(L_2) = \left(\frac{128}{21}L_2^2 - \frac{72}{7}L_2 + \frac{88}{21}I\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)\begin{pmatrix} -\frac{269}{224} & \frac{11}{28} & \frac{181}{224} \\ \frac{543}{224} & -\frac{73}{28} & \frac{41}{224} \\ \frac{179}{224} & \frac{11}{28} & -\frac{267}{224} \end{pmatrix}.$$

Застосуємо до рівняння (5) перетворення Лапласа:

$$sI - A_2 = \begin{pmatrix} s+\frac{269}{224}\ln 2 & -\frac{11}{28}\ln 2 & -\frac{181}{224}\ln 2 \\ -\frac{543}{224}\ln 2 & s+\frac{73}{28}\ln 2 & -\frac{41}{224}\ln 2 \\ -\frac{179}{224}\ln 2 & -\frac{11}{28}\ln 2 & s+\frac{267}{224}\ln 2 \end{pmatrix},$$

$$(sI - A_2)^{-1} = \begin{pmatrix}
\frac{\begin{vmatrix} s+\frac{73}{28}\ln 2 & -\frac{41}{224}\ln 2 \\ -\frac{11}{28}\ln 2 & s+\frac{267}{224}\ln 2 \end{vmatrix}}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} &
\frac{-\begin{vmatrix} -\frac{543}{224}\ln 2 & -\frac{41}{224}\ln 2 \\ -\frac{179}{224}\ln 2 & s+\frac{267}{224}\ln 2 \end{vmatrix}}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} &
\frac{\begin{vmatrix} -\frac{543}{224}\ln 2 & s+\frac{73}{28}\ln 2 \\ -\frac{179}{224}\ln 2 & -\frac{11}{28}\ln 2 \end{vmatrix}}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} \\
\frac{-\begin{vmatrix} -\frac{11}{28}\ln 2 & -\frac{181}{224}\ln 2 \\ -\frac{11}{28}\ln 2 & s+\frac{267}{224}\ln 2 \end{vmatrix}}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} &
\frac{\begin{vmatrix} s+\frac{269}{224}\ln 2 & -\frac{181}{224}\ln 2 \\ -\frac{179}{224}\ln 2 & s+\frac{267}{224}\ln 2 \end{vmatrix}}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} &
\frac{-\begin{vmatrix} s+\frac{269}{224}\ln 2 & -\frac{11}{28}\ln 2 \\ -\frac{179}{224}\ln 2 & -\frac{11}{28}\ln 2 \end{vmatrix}}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} \\
\frac{\begin{vmatrix} -\frac{11}{28}\ln 2 & -\frac{181}{224}\ln 2 \\ s+\frac{73}{28}\ln 2 & -\frac{41}{224}\ln 2 \end{vmatrix}}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} &
\frac{-\begin{vmatrix} s+\frac{269}{224}\ln 2 & -\frac{181}{224}\ln 2 \\ -\frac{543}{224}\ln 2 & -\frac{41}{224}\ln 2 \end{vmatrix}}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} &
\frac{\begin{vmatrix} s+\frac{269}{224}\ln 2 & -\frac{11}{28}\ln 2 \\ -\frac{543}{224}\ln 2 & s+\frac{73}{28}\ln 2 \end{vmatrix}}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)}
\end{pmatrix}^T.$$

Розкладаючи на прості дроби, отримуємо

$$(sI - A_2)^{-1} = \frac{1}{s}\begin{pmatrix} \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \end{pmatrix} + \frac{1}{(s+2\ln 2)}\begin{pmatrix} \frac{9}{32} & 0 & -\frac{9}{32} \\ \frac{29}{32} & 0 & -\frac{29}{32} \\ -\frac{23}{32} & 0 & \frac{23}{32} \end{pmatrix} + \frac{1}{(s+3\ln 2)}\begin{pmatrix} \frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672} \\ -\frac{949}{672} & \frac{73}{84} & \frac{365}{672} \\ -\frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Нехай матриця $H_2(t)$ буде зворотним перетворенням матриці $(sI - A_2)^{-1}$.

Тоді зворотне перетворення переводить рівняння (4) у

$$\overline{p}_2(t) = \overline{p}_2(0)H_2(t). \quad (19)$$

Скориставшись перетворенням Лапласа, отримаємо:

$$\overline{p}_2(t) = \overline{p}_2(0)\left[\begin{pmatrix} \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \end{pmatrix} + e^{-2t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{9}{32} & 0 & -\frac{9}{32} \\ \frac{29}{32} & 0 & -\frac{29}{32} \\ -\frac{23}{32} & 0 & \frac{23}{32} \end{pmatrix} + e^{-3t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672} \\ -\frac{949}{672} & \frac{73}{84} & \frac{365}{672} \\ -\frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672} \end{pmatrix}\right]. \quad (20)$$

Порівнюючи (10) з (20), ми бачимо, що $H_2(t)$ є виразом у кінцевому варіанті для матриці $e^{A_1 t}$:

$$H_2(t)=\begin{pmatrix} \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \end{pmatrix} + e^{-2t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{9}{32} & 0 & -\frac{9}{32} \\ \frac{29}{32} & 0 & -\frac{29}{32} \\ -\frac{23}{32} & 0 & \frac{23}{32} \end{pmatrix} + e^{-3t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672} \\ -\frac{949}{672} & \frac{73}{84} & \frac{365}{672} \\ -\frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672} \end{pmatrix}.$$

За $t = n$ маємо:

$$H_2(n)=\begin{pmatrix} \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \end{pmatrix} + e^{-2n\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{9}{32} & 0 & -\frac{9}{32} \\ \frac{29}{32} & 0 & -\frac{29}{32} \\ -\frac{23}{32} & 0 & \frac{23}{32} \end{pmatrix} + e^{-3n\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672} \\ -\frac{949}{672} & \frac{73}{84} & \frac{365}{672} \\ -\frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \\ \frac{85}{168} & \frac{11}{84} & \frac{61}{168} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n\begin{pmatrix} \frac{9}{32} & 0 & -\frac{9}{32} \\ \frac{29}{32} & 0 & -\frac{29}{32} \\ -\frac{23}{32} & 0 & \frac{23}{32} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{8}\right)^n\begin{pmatrix} \frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672} \\ -\frac{949}{672} & \frac{73}{84} & \frac{365}{672} \\ \frac{143}{672} & -\frac{11}{84} & -\frac{55}{672} \end{pmatrix}.$$

А отже, (10) збігається з (20) за $t = n$.

Висновки. Побудовано узагальнену безперервну лінійну модель взаємодії підприємств при виконанні бюджетних регіональних проектів. Вона дозволяє вивчати в часі процеси багатосторонніх приходів і витрат між учасниками регіонального проекту. Показано методику отримання матриць інтенсивностей і відповідних їм перехідних матриць для процесів приходів і витрат. Значення безперервних перехідних матриць включають результати дискретної моделі в моменти часу, рівні кратності часу кроку. Безперервна модель поліпшує якість планування і ефективність контролю відносин між виконавцями проекту.

Список використаної літератури

1. Шпирко О. М. Методичний підхід до вибору стратегії управління грошовими потоками підприємств водного транспорту / О. М. Шпирко, С. М. Семенова // Проблеми економіки. – 2013. – № 2. – С. 181–189.
2. Тельнова Г. В. Особливості управління фінансами інтегрованих корпоративних структур / Г. В. Тельнова // Проблеми економіки. – 2013. – № 1. – С. 255–260.
3. Пурський О. І. Визначення інтегральних показників соціально-економічного розвитку регіонів на основі експертних оцінок та методу головних компонент / О. І. Пурський, І. О. Мороз // Проблеми економіки. – 2013. – № 2. – С. 230–236.
4. Тян Р. Б. Структурний аналіз грошових потоків з метою підвищення надійності їх прогнозування / Р. Б. Тян, О. В. Лисенко // Фінанси України. – 2012. – № 5. – С. 110–120.
5. Кузніченко В. М. Метод Z-перетворень у моделі фінансової взаємодії співвиконавців інвестиційного проекту / В. М. Кузніченко, В. І. Лапшин, Т. В. Стеценко // Вісник економіки транспорту і промисловості. – 2012. – № 37. – С. 52–55.
6. Кузніченко В. М. Дефіцитна модель фінансової взаємодії підприємств у регіонах / В. М. Кузніченко, В. І. Лапшин, Т. В. Стеценко // Фінансово-кредитна діяльність: проблеми теорії та практики : зб. наук. пр. – 2013. – Вип. 1(14). – С. 145–150.
7. Кузніченко В. М. Модель фінансової взаємодії підприємств у регіонах / В. М. Кузніченко, В. І. Лапшин // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2013. – № 2. – С. 87–93.
8. Кузніченко В. М. Дефіцитна модель управління інвестиційними проектами в регіонах / В. І. Лапшин, В. М. Кузніченко // Бизнес Информ. – 2013. – № 6. – С. 57–62.
9. Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы / Р. А. Ховард. – М. : «Советское радио», 1964. – 195 с.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – 4-е изд. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
11. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. третье, перераб. – М. : Наука, 1979. – 400 с.

Summary. A probabilistic approach to financial interaction between enterprises in the budget of regional projects based on the theory of Markov processes with continuous time was considered. The method of obtaining matrices of intensities that are differential, and transition matrices corresponding to them for coming and spending processes was shown. To create a continuous model used functions of matrices, and the Laplace transform , which allow to find an analytical form of transition matrices, and hence the expression for the state vector of the system. The expressions simplify the analysis and calculation of the states of the system when compared to other methods. The values of continuous transition matrices include the results of the discrete model and the level of the multiplicity of the time step. Continuous model improves the quality of planning and performance monitoring between performers of regional project.
Keywords: Markov chains, linear differential equations, z-transform, Laplace transform, continuous model.