УДК 347.734:519.6

Використання нестандартних інтервальних арифметичних операцій для зменшення невизначеності у процесі виконання фінансово-економічних розрахунків

Валерій Юрійович Дубницький,
завідувач лабораторії
Харківського інституту банківської справи
Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ),
кандидат технічних наук, старший науковий співробітник

Анатолій Михайлович Кобилін,
доцент кафедри інформаційних технологій
Харківського інституту банківської справи
Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ),
кандидат технічних наук, доцент

Анотація. Запропоновано для зменшення невизначеності у процесі виконання фінансово-економічних розрахунків використовувати систему нестандартних інтервальних арифметичних операцій. Показано її ефективність у порівнянні з результатами аналогічних обчислень, виконаних на основі класичної інтервальної математики.

Ключові слова: банківські операції, фінансова математика, інтервальні обчислення, інтервальний аналіз.

Постановка проблеми. У процесі виконання фінансово-економічних розрахунків показників може статися дві ситуації. У першій треба визначити ці показники в умовах повної поінформованості про їхні значення. У другій, наприклад у процесі побудови економетричної моделі, можна визначити статистичні характеристики спостережень, а саме: закони розподілу та оцінки параметрів цих законів. У такому разі говорять, що має місце статистична невизначеність параметрів. В умовах швидкоплинного зовнішнього економічного середовища важко робити якісь прогнози, засновані на методах статистики, можна лише визначити можливий інтервал значень змінних, які входять до складу моделей економічних процесів. Таку невизначеність називають нестохастичною. Результатом розрахунків у таких умовах буде інтервал, у якому може бути визначено вихідний результат моделювання. Сучасні методи інтервального аналізу мають достатньо розвинуті засоби для розв'язку багатьох задач, але загальний недолік цих методів – широкі інтервали, в яких лежать оцінки результату обчислень, що несприятливе не тільки для проведення практичних розрахунків, а й для дальшого аналізу такої моделі. Проблема полягає в тому, що треба обрати таку схему обчислень, для якої вихідний інтервал буде якомога меншим. Є два шляхи розв'язання цієї проблеми. Перший – зменшення інтервалу вхідних даних. Для цього не завжди існують реальні можливості. Другий – вибір схеми розрахунків, яка зменшує інтервал отриманого результату. Ми обрали другий варіант.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для виконання дій з інтервальними числами розроблено систему аксіом, яка обґрунтована в роботах [1; 2]. Інтервальне число A визначають таким чином: $A=|\underline{a},a|$, де $\underline{a}$ – ліва границя інтервалу, a права границя інтервалу, за умови, що $\underline{a} < \overline{a}$. Арифметичні дії з інтервальними числами виконують згідно з такими правилами:

$$A+B=\left[\underline{a};\overline{a}\right]+\left[\underline{b};\overline{b}\right]=\left[\underline{a}+\underline{b};\overline{a}+\overline{b}\right]; \tag{1}$$

$$A-B=\left[\underline{a};\overline{a}\right]+\left[\underline{b};\overline{b}\right]=\left[\underline{a}-\overline{b};\overline{a}-\underline{b}\right]; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} A\cdot B &= \left[\underline{a};\overline{a}\right]\cdot\left[\underline{b};\overline{b}\right]= \\ &= \left[\min\left\{\underline{a}\cdot\underline{b},\underline{a}\cdot\overline{b},\overline{a}\cdot\underline{b},\overline{a}\cdot\overline{b}\right\},\max\left\{\underline{a}\cdot\underline{b},\underline{a}\cdot\overline{b},\overline{a}\cdot\underline{b},\overline{a}\cdot\overline{b}\right\}\right]; \end{aligned} \tag{3}$$

$$A/B=\left[\underline{a};\overline{a}\right]/\left[\underline{b};\overline{b}\right]=\left[\underline{a},\overline{a}\right]\cdot\left[1/\overline{b},1/\underline{b}\right];\ 0\notin b. \tag{4}$$

Система правил (1)…(4) отримала назву системи правил класичної інтервальної математики. Застосування цих правил для використання економічних розрахунків описано в роботах [3; 4]. На основі правил (1)…(4) створено лінійку спеціалізованих програмних калькуляторів, наприклад таких, які описано в роботі [5].

У роботі [6] наведено структуру, яка отримала назву системи правил нестандартної інтервальної математики. Визначимо $M = (I(R),+,-,\times,/,+^{-},-^{-},\times^{-},/^{-})$, де $I(R) = \{[a^{-},a^{+}] | a^{-} \le a^{+}, a^{-},a^{+} \in R\}$ – множина дійсних інтервалів; $(+,-,\times,/)$ і $(+^{-},-^{-},\times^{-},/^{-})$ – стандартні і нестандартні інтервальні операції додавання і добутку відповідно дійсним інтервалам $A = [a^{-},a^{+}]$, $B = [b^{-},b^{+}]$.

Для програмної реалізації представимо значення інтервальних чисел A і B у формі центр-радіуса $A = \langle a,r_a\rangle$, $B = \langle b,r_b\rangle$,

$$\text{де}\quad a=\frac{\underline{a}+\overline{a}}{2},\quad r_a=\frac{\overline{a}-\underline{a}}{2}\quad \text{і}\quad b=\frac{\underline{b}+\overline{b}}{2},\quad r_b=\frac{\overline{b}-\underline{b}}{2} \tag{5}$$

– центри і радіуси, відповідно, інтервалів A і B.

Нестандартна інтервально-арифметична операція додавання визначається так:

$$A +^{-} B = \langle a+b, | r_a - r_b | \rangle. \tag{6}$$

Нестандартну інтервально-арифметичну операцію віднімання визначаємо так:

$$A -^{-} B = \langle a-b, | r_a - r_b | \rangle. \tag{7}$$

Нестандартну інтервально-арифметичну операцію добутку визначаємо так:

$$A \times^{-} B = \langle ab - \mathrm{sgn}(ab) r_a r_b, | a r_b - \mathrm{sgn}(ab) b r_a | \rangle. \tag{8}$$

Якщо

$$\frac{|a|}{r_a} \geq 1, \frac{|b|}{r_b} \geq 1,$$

$$A \times^{-} B = \langle ab - \mathrm{sgn}(b) a r_b, | b r_a - \mathrm{sgn}(b) r_a r_b | \rangle, \tag{9}$$

якщо

$$\frac{|a|}{r_a} < 1, \frac{|a|}{r_a} < \frac{|b|}{r_b},$$

$$A \times^{-} B = \langle ab - \mathrm{sgn}(a) b r_b, | a r_a - \mathrm{sgn}(a) r_b r_b | \rangle, \tag{10}$$

якщо

$$\frac{b}{r_b} < 1, \frac{|a|}{r_a} \geq \frac{|b|}{r_b}.$$

Нестандартну інтервально-арифметичну операцію ділення визначаємо так:

$$A /^{-} B = \frac{1}{b^2 - r_b^2} \langle ab - \mathrm{sgn}(ab) r_a r_b, | a r_b - \mathrm{sgn}(ab) b r_a | \rangle, \tag{11}$$

якщо

$$\frac{|b|}{r_b} > 1, \frac{|a|}{r_a} \geq 1,$$

$$A /^{-} B = \frac{1}{b^2 - r_b^2} \langle ab - \mathrm{sgn}(b) a r_b, | b r_a - \mathrm{sgn}(b) r_a r_b | \rangle. \tag{12}$$

Викладення основного матеріалу. Для виконання фінансово-економічних розрахунків на основі нестандартної інтервальної математики створено спеціалізовану програмну систему, головне робоче вікно якої показано на *рис. 1*. Методику виконання розрахунків наведено в роботі [7].

Програму створено з використанням середовища програмування Microsoft Visual Studio 2012 мовою програмування C# [8].

Базова формула для визначення нарощеної суми за простою процентною ставкою:

$$S = P + I = P + P \times i \times n = P(1 + i \times n), \tag{13}$$

де P – початковий капітал; I – сума доходу з капіталу; n – термін нарощування капіталу; i – процентна ставка.

Якщо строк фінансової угоди не дорівнює цілому числу років, а становить d днів:

$$S = P\left(1 + i\frac{d}{N}\right). \tag{14}$$

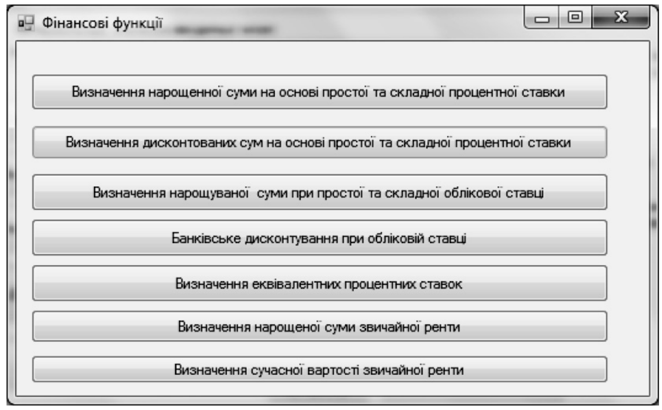

Рис. 1. Вибір програми для розрахунку

Базова формула для визначення нарощеної суми при використанні складної процентної ставки така:

$$S = P(1 + i)^n. \tag{15}$$

Якщо термін фінансової угоди не дорівнює цілому числу років, а становить d днів:

$$S = P(1+i)^{\frac{d}{N}}. \tag{16}$$

Контрольний приклад розрахунку нарощеної суми на основі простої і складної процентних ставок наведено на *рис. 2*.

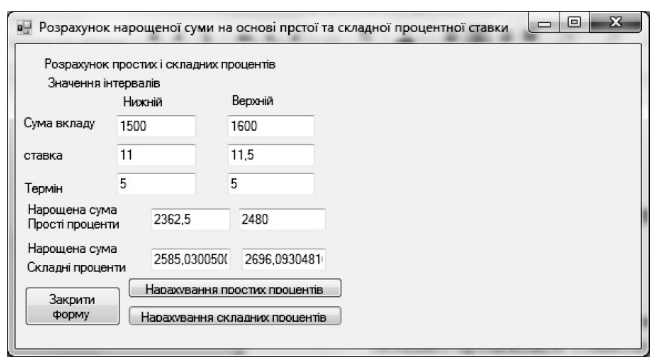

Рис. 2. Форма розрахунку нарощеної суми

При математичному дисконтуванні вирішується задача, що є зворотною визначенню нарощеної суми. Задача формулюється так: яку суму треба в борг сьогодні (інвестувати) на n років, щоб при нарахуванні на неї відсотків за процентною ставкою і одержати нарощену суму S?

Якщо в операції використовується проста процентна ставка, то формули для математичного дисконтування будуть такими:

$$P = \frac{S}{1+n\times i}; \quad P = \frac{S}{1+i\times\dfrac{d}{N}}. \qquad (17)$$

Якщо в операції буде вжита складна процентна ставка, то формули для математичного дисконтування будуть такими:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}; \quad P = \frac{S}{(1+i)^{\frac{d}{N}}}. \qquad (18)$$

Контрольний приклад визначення дисконтованих сум на основі простої і складної процентних ставок наведено на *рис. 3*.

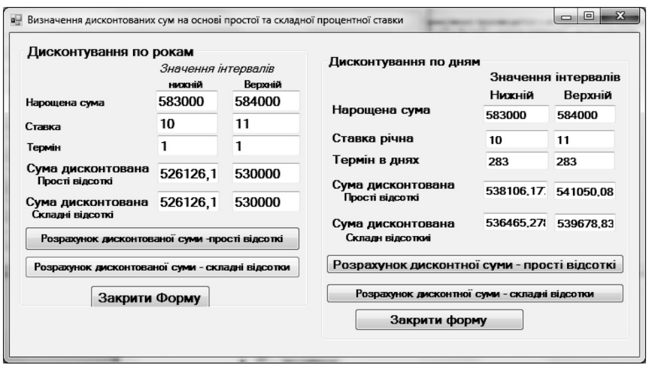

Рис. 3. Форма розрахунку дисконтованих сум

За простої облікової ставки розрахунок нарощеної суми здійснюємо так:

$$S = P\frac{1}{1-nr}; \quad S = P\frac{1}{1-\dfrac{d}{N}r}. \qquad (19)$$

При використанні складної обліковій ставці розрахунок нарощеної суми здійснюємо так:

$$S = P\frac{1}{(1-r)^n}; \quad S = P\frac{1}{(1-r)^{\frac{d}{N}}}. \qquad (20)$$

Контрольний приклад розрахунку нарощених сум на основі простої і складної облікових ставок наведено на *рис. 4*.

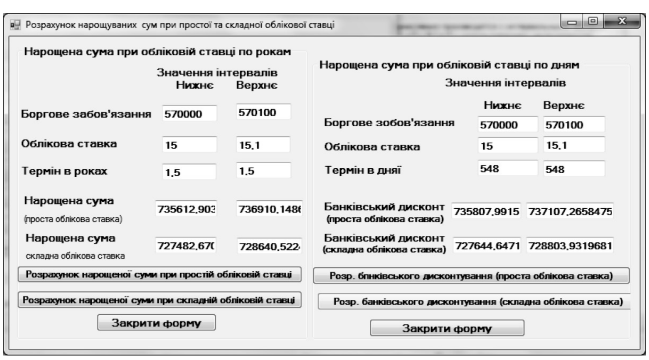

Рис. 4. Форма розрахунку нарощених сум за простої і складної облікових ставок

Дисконтування нарощених сум за авансового способу нарахування процентів має назву банківського дисконтування. Формули визначення дисконтованих сум при використанні простої облікової ставки такі:

$$P = S(1-nr); \quad P = S\left(1-\frac{d}{N}r\right). \qquad (21)$$

Банківське дисконтування при використанні складної облікової ставки здійснюємо за такими формулами:

$$P = S(1-r)^n; \quad P = S(1-r)^{\frac{d}{N}}; \quad P = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}. \qquad (22)$$

Дисконт D буде розраховано за формулою:

$$D = S - P.$$

Приклад. Власник боргового зобов'язання в сумі 570 тис. грн з терміном погашення 1,5 року відразу після укладення угоди на зобов'язання врахував його в банку за складною обліковою ставкою 15% річних. Визначте суму, яку одержить власник зобов'язання, дисконт, що отримав банк. Розв'язок наведено на *рис. 5*.

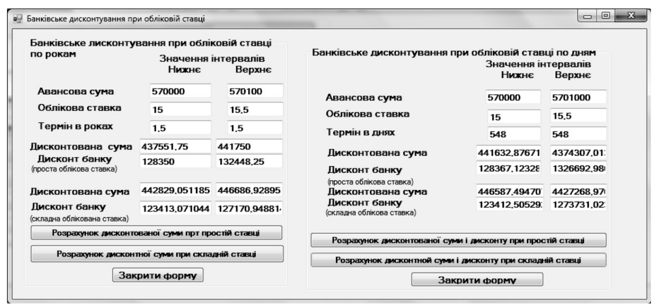

Рис. 5. Форма розрахунку дисконтованих сум і дисконту банку за простої і складної облікових ставок

У фінансових операціях можливо здійснити вибір таких процентних чи облікових ставок, при використанні яких фінансові результати будуть однаковими. Ставки, що забезпечують однакові фінансові результати операцій, називаються еквівалентними. Формули для еквівалентних процентних ставок такі:

$$i_{пр} = \frac{\left(1+i_{сл}\right)^n - 1}{n}; \quad i_{сл} = \left(1+ni_{пр}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad (23)$$

Контрольний приклад розрахунку нарощених сум на основі простої і складної облікових ставок наведено на *рис. 6*.

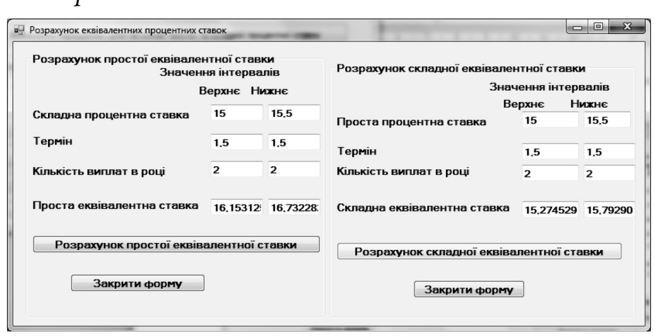

Рис. 6. Форма розрахунку еквівалентних процентних ставок за простої і складної ставок

Нарощена сума ренти – це сума всіх членів потоку платежів із нарахованими на них процентами, яка розрахована на кінець строку дії ренти. Розраховуємо за формулою:

$$S = R\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{n}}-1\right]}. \qquad (24)$$

Контрольний приклад розрахунку нарощеної суми звичайної ренти наведено на *рис. 7*.

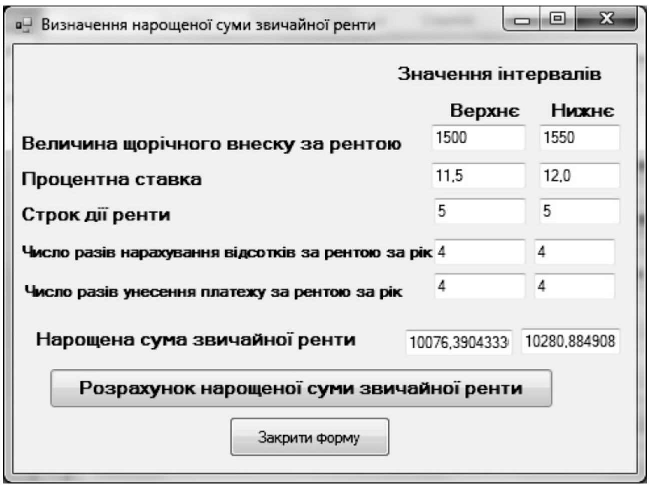

Рис. 7. Форма розрахунку нарощеної суми звичайної ренти

Дисконтовану суму ренти, тобто сучасну вартість, визначаємо за формулою:

$$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}. \qquad (25)$$

Контрольний приклад розрахунку нарощеної суми звичайної ренти наведено на *рис. 8*.

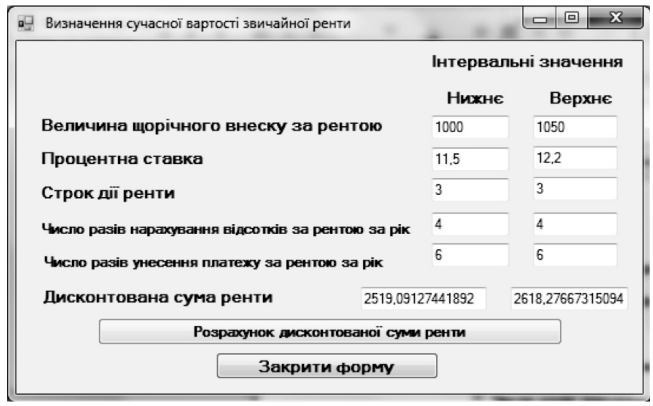

Рис. 8. Форма розрахунку сучасної вартості звичайної ренти

Вхід у програмну систему здійснюємо через головне вікно програми, яке наведено на *рис. 9*.

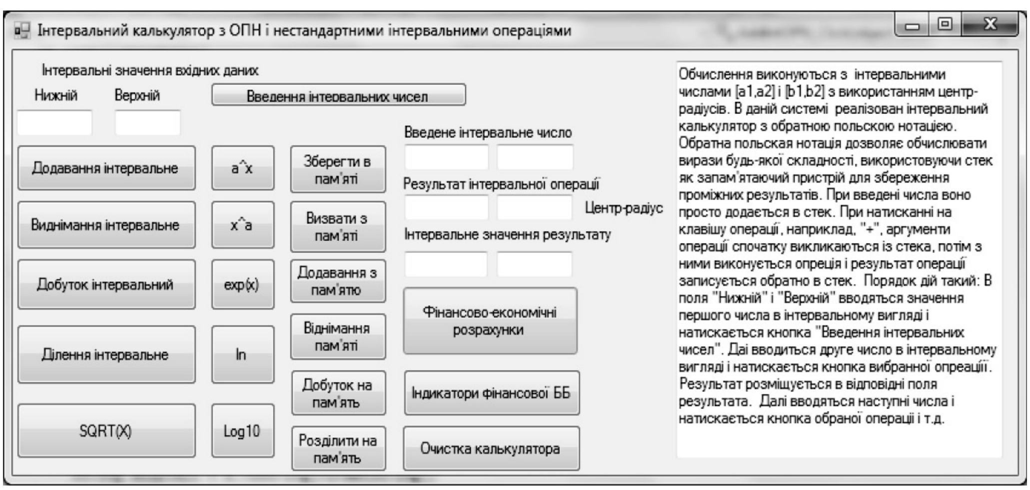

Рис. 9. Головне вікно програмної системи

Для порівняння якості обчислень, виконаних згідно з правилами класичної інтервальної математики і нестандартної інтервальної математики, були розв'язані чисельні приклади, умови яких наведено в *табл. 1.*

Ширину інтервалу, який визначає число $A = |\underline{a},\overline{a}|$, обчислюють за формулою:

$$\Delta A = \overline{a} - \underline{a}. \qquad (26)$$

Середину інтервалу визначимо за формулою:

$$m(A) = \frac{1}{2}\ (\overline{a} + \underline{a}), \qquad (27)$$

тоді точність інтервалу є визначимо так:

$$\varepsilon_{кл} = \Delta A / m(A). \qquad (28)$$

Для нестандартної інтервальної математики це відповідатиме умові:

$$\varepsilon_{нст} = r_a / a. \qquad (29)$$

Таблиця 1

Границі інтервалів, визначених згідно з правилами класичної інтервальної математики і нестандартної інтервальної математики

Нарощена сума на основі простої та складної процентних ставок	**Значення вхідних даних в інтервальному вигляді**	**Розраховане значення нарощеної суми в інтервальному вигляді для:**	
		класичної інтервальної математики	**нестандартної інтервальної математики**
Проста процентна ставка	$P_н = 1\,500$ $P_в = 1\,600$ $i_н = 11$ $i_в = 11,5$ $n_н = 5$ $n_в = 5$	$S_н = 2\,325$ $S_в = 2\,520$	$S_н = 2\,362,5$ $S_в = 2\,480$
Складна процентна ставка		$S_н = 2\,527,58$ $S_в = 2\,757,36$	$S_н = 2\,585,03$ $S_в = 2\,696,09$
Нарощена сума на основі простої і складної облікових ставок	Значення вхідних даних в інтервальному вигляді	Розраховане значення нарощеної суми для облікової ставки в інтервальному вигляді для:	
		класичної інтервальної математики	нестандартної інтервальної математики
Проста облікова ставка	$P_н = 2\,500$ $P_в = 2550$ $i_н = 11$ $i_в = 11,5$ $n_н = 5$ $n_в = 5$	$S_н = 5\,555,55$ $S_в = 6\,000$	$S_н = 5\,666,661$ $S_в = 5\,882,352$
Складна облікова ставка		$S_н = 4\,477,029$ $S_в = 4\,697$	$S_н = 4\,566,57$ $S_в = 4\,604,93$
Банківське дисконтування за облікової ставки	Значення вхідних даних в інтервальному вигляді	Банківське дисконтування в інтервальному вигляді для:	
		класичної інтервальної математики	нестандартної інтервальної математики
Проста облікова ставка	$P_н = 2\,500$ $P_в = 2\,550$ $i_н = 11$ $i_в = 11,5$ $n_н = 5$ $n_в = 5$	$S_н = 1\,062,5$ $S_в = 1\,147,5$ $D_н = 1\,352,5$ $D_в$ -1487,5	$S_н = 1\,083,75$ $S_в = 1\,125$ $D_н = 1\,416,25$ $D_в$ -1 425
Складна облікова ставка		$S_н = 1\,357,233$ $S_в = 1\,423,935$ $D_н = 1\,076,06$ $D_в = 1\,192,76$	$S_н = 1\,354,36$ $S_в = 1\,396,014$ $D_н = 1\,115,616$ $D_в = 1\,153,98$

Примітка. Розрахунок авторів.

Ефективність *ef* запропонованого процесу будемо визначати мірою зменшення інтервалу заключного результату, визначеного з використанням нестандартної інтервальної математики, у порівнянні з аналогічним (*табл. 2*), але визначеним із використанням класичної інтервальної математики:

$$ef = (1 - \frac{\varepsilon_{нст}}{\varepsilon_{кл}}) \times 100\%. \quad (30)$$

Таблиця 2

Порівняння ефективності виконання фінансових розрахунків методами класичної і нестандартної інтервальної математики

Показник	**Методика розрахунку**				**Параметри ефективності**		
	класична інтервальна математика		**нестандартна інтервальна математика**				
	$\underline{a}$	$\overline{a}$	$\underline{a}$	$\overline{a}$	$\varepsilon_{кл}$	$\varepsilon_{нст}$	*ef*
Нарощена сума на основі простої процентної ставки	2 325	2 520	2 362,5	2 480	0,08	0,05	37
Нарощена сума на основі складної процентної ставки	2 527,58	2 757,36	2 585,03	2 696,09	0,08	0,04	50
Нарощена сума на основі простої облікової ставки	5 555,55	6 000,0	5 666,66	5 882,35	0,07	0,04	43
Нарощена сума на основі складної облікової ставки	4 477,03	4 697	4 566,57	4 604,93	0,05	0,01	80

Примітка. Розрахунок авторів.

Наведені розрахунки показують, що використання нестандартної інтервальної математики істотно звужує інтервал існування результату обчислень, тобто ця система більш ефективна, ніж система, побудована на основі класичної інтервальної математики.

Висновки.

1. Для зменшення інтервалу заключного результату виконання фінансових розрахунків запропоновано використовувати правила нестандартної інтервальної математики.

2. Створено програмну систему, яка реалізує правила нестандартної інтервальної математики.

3. Показано, що правила нестандартної інтервальної математики надають можливість отримати заключний інтервал на 37–80 відсотків меншим, аніж аналогічний, але визначений згідно з правилами класичної інтервальної математики.

Список використаної літератури

1. Алефельд Г. Ш. Введение в интервальные вычисления / Г. Ш. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М. : Мир, 1987. – 370 с.
2. Калмыков С. А. Методы интервального анализа / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокии, З. Х. Юлдашев. – Новосибирск : Наука, 1986. – 223 с.
3. Кофман А. Введение теории нечетких множеств в управление предприятиями / А. Кофман, Х. Хил Алуха. – Мн. : Выш. школа, 1992. – 216 с.
4. Севастьянов П. Методическое и программное обеспечение финансово-экономического анализа в условиях неопределенности исходных данных / П. Севастьянов, Д. Севастьянов // Первый белорусский форум «Информационно-аналитические системы в финансовой деятельности» : тез. докладов. – Мн., 1997. – С. 50–55.
5. Дубницький В. Ю., Кобилін А. М., Кобилін О. М. Комп'ютерна програма для розрахунку індикаторів економічної безпеки підприємства з використанням інтервальної арифметики та засобів мобільного зв'язку / Дубницький В. Ю., Кобилін А. М., Кобилін О. М. // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 50747 від 19.08.2013.
6. Жуковская О. А. Исследование нестандартних интервальных арифметических операций / О. А. Жуковская // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2005. – № 2. – С. 106–116.
7. Михайловська І. М. Банківські операції. Кредитно-модульний курс : навч. посібник / І. М. Михайловська, А. В. Олійник. – Львів : Магнолія 2006. – 646 с.
8. Культин Н. Б. Microsoft Visual C# в задачах и примерах / Н. Б. Культин. – СПб. : БХВ-Петербург, 2009. – 320 с.

Summary. It is proposed for reducing the uncertainty in the implementation of financial and economic calculations to use a system of non-standard interval arithmetic operations. It is shown its effectiveness in comparison with the results of similar calculations performed on the basis of classical interval mathematics.

Keywords: bank operations, financial mathematics, interval computing, interval analysis.