УДК 336.71

Портфель цінних паперів і ризик фінансових інструментів

Моріка Костянтинівна Русинко,
доцент кафедри математики і статистики
Львівського інституту банківської справи
Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ),
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Анотація. Побудовано математичну модель задач оптимізації портфеля цінних паперів, що належить до класу задач нелінійного програмування. Розглянуто побудову багатокритеріальної (двокритеріальної) задачі оптимізації портфеля цінних паперів і методи розв'язування цього класу задач.

Ключові слова: портфель цінних паперів, нелінійне програмування, багатокритеріальні задачі.

Постановка проблеми. Одним із видів фінансової діяльності є інвестування в цінні папери. Займаючись інвестиціями, необхідно визначити основні цілі інвестування, прийнятні види цінних паперів щодо їхньої якості та прибутковості, ступеня загального ризику інвестиційної діяльності. З метою зниження ступеня ризику, забезпечення більшої стійкості прибутків за будь-яких коливань дивідендів і ринкових цін на цінні папери доцільно розподіляти інвестовані кошти між різними об'єктами вкладення капіталу. У цьому й полягає суть процесу диверсифікації. Основною характеристикою кожного цінного папера є його прибутковість – норма прибутку. Її обчислюють як відношення прибутку, що його приносить даний цінний папір, до затрат, пов'язаних із купівлею цього цінного папера. Норма прибутку є одним з основних показників, на які звертають увагу інвестори під час прийняття рішення щодо купівлі цінного папера.

Одним із важливих понять у теорії портфельних інвестицій є поняття ефективного портфеля, під яким розуміють портфель як сукупність цінних паперів, що забезпечує максимальну очікувану дохідність за деякого заданого ризику або мінімальний ризик за певного заданого рівня дохідності.

Задачі оптимізації портфеля цінних паперів призначені для визначення структури портфеля згідно з метою інвестора, що визначається характером інвестиційної політики.

Задачі оптимізації ризиків портфеля цінних паперів. Розглянемо випадок, коли в певний момент часу інвестор має деяку суму для інвестування і йому необхідно визначити структуру інвестиційного портфеля з N різних цінних паперів.

Нехай $r_k(s) = r_k$ – прибутковість цінного папера виду k у стані s, що відповідає даному моменту часу, $k = \overline{1,N}$; A_k – обсяг грошових активів, інвестованих у цінний папір k-го виду; A – обсяг усіх грошових активів, інвестованих у цей портфель. Тоді частку інвестицій у цінний папір k-го виду визначатимемо зі співвідношення

$$x_k = \frac{A_k}{A}. \qquad (1)$$

Очевидно, що $x_k \ge 0$ і при цьому $\sum_{k=1}^{N} x_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{A} = 1$.

Структуру портфеля цінних паперів відображає вектор $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.

Очікувана прибутковість k-го цінного папера дорівнює

$$m_k = M(r_k) = \sum_s p(s) r_k(s), \qquad (2)$$

де $p(s)$ – імовірність появи стану s.

Норма прибутку портфеля: $r_П = \sum_k x_k r_k$, тоді очікуваний дохід усього портфеля визначиться так:

$$m_П = M(r_П) = \sum_k x_k \sum_s p(s) r_k(s) = \sum_k x_k M(r_k) = \sum_k x_k m_k. \qquad (3)$$

Ризик портфеля цінних паперів згідно з класичним підходом обчислюємо на основі дисперсії його норми прибутку:

$$V_П = \sigma^2(r_П) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_k x_j \sigma_{kj}. \qquad (4)$$

За умови, що до складу портфеля цінних паперів залучено N різних акцій отримаємо задачу :

$$r_П = \sum_{k=1}^{N} x_k r_k; \; m_П = \sum_{k=1}^{N} x_k m_k; \; V_П = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_k x_j \sigma_{kj};$$
$$x_1 + \ldots + x_N = 1; \; x_k \ge 0, \; k = 1, \ldots, N.$$

Багатокритеріальна задача оптимізації. Для великого технічного чи економічного проекту типовою є ситуація, коли необхідно задовольняти різні, часто суперечливі вимоги. Наприклад, головне бажання при формуванні портфеля цінних паперів полягає в тому, щоб отримати максимальний дохід за найменшого рівня ризику. Досягти цього одночасно неможливо, оскільки реальна структура портфеля завжди буде якимсь компромісом. У цьому й полягає проблема багатокритеріальності (невизначеності мети).

Задача багатокритеріальної оптимізації з множиною допустимих розв'язків $D \subset R^n$ і функцією мети $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$ є такою:

$$f_i(\bar{x}) \to \mathrm{extr}, i = \overline{1,m}, \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

Будь-який скалярний критерій вигляду $f_i(\bar{x}) \to \min$ можна замінити еквівалентним скалярним критерієм $-f_i(\bar{x}) \to \max$. Тому задачу багатокритеріальної оптимізації можна записати так:

$$f_i\left(\overline{x}\right) \to \max, i = \overline{1,m}, \overline{x} = \left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)^T.$$

Метод лінійного згортання критеріїв. Метод лінійного згортання критеріїв дає змогу замінити векторний критерій оптимальності $f = (f_1, \ldots, f_m)$ на скалярний $F(\overline{\alpha},\overline{x}) : D \to R$ за допомогою лінійного об'єднання всіх часткових цільових функціоналів в один:

$$F\left(\overline{\alpha},\overline{x}\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i\left(\overline{x}\right) \to \max; \overline{\alpha} \in A, \tag{5}$$

де $A = \left\{ \overline{\alpha} = \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_m\right)^T \middle| \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \right\}.$

Вагові коефіцієнти α_i вважають показниками відносної значущості відповідних часткових цільових функціоналів f_i. Що вагоміший критерій f_i, то більше він впливатиме на значення суми і, відповідно, тим більше числове значення α_i він матиме. Значення коефіцієнтів α_i отримують за результатами експертного аналізу.

Метод максимінного згортання критеріїв дає змогу змінити векторний критерій оптимальності $f = (f_1, \ldots, f_m)$ на скалярний $F(\overline{\alpha},\overline{x}) : D \to R$ за допомогою того з часткових цільових функціоналів, якому в точці $\overline{x}$ відповідає найменше значення $f_i(\overline{x})$:

$$F_1\left(\overline{\alpha},\overline{x}\right) = \min_i \alpha_i f_i\left(\overline{x}\right) \to \max_{\overline{x} \in A}, \overline{\alpha} \in A. \tag{6}$$

Якщо у випадку (5) «погані» значення деяких $f_i(\overline{x})$ можуть компенсуватися за рахунок «добрих» значень інших цільових функціоналів, то у випадку (6) зроблено ставку на найгірший випадок [за значенням $F_1(\overline{\alpha},\overline{x})$ можна визначити гарантовану нижню оцінку усіх функціоналів $f_i(\overline{x})$]. Цей факт розцінюють як певну перевагу максимінного згортання критеріїв перед лінійним. Вагові коефіцієнти $\overline{\alpha} \in A$ застосовують з метою приведення у взаємну відповідність масштабів вимірювань значень окремих $f_i(\overline{x})$.

Багатокритеріальна задача оптимізації портфеля цінних паперів. Для формування портфеля з N цінних паперів важливим є одночасне мінімізуваня ризику та отримання максимально можливого прибутку. Так формується двокритеріальна задача оптимізації

$$\begin{aligned} &m_П \to \max;\ V_П \to \min;\ x_1 + x_2 + \ldots + x_N = 1; \\ &x_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{7}$$

де x_k – частка цінного папера k-го виду;

$m_П$ – очікувана норма прибутку $m_П = \sum_{r=1}^{N} x_k m_k$;

$V_П$ – ризик портфеля, утвореного з N видів цінних паперів $V_П = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_k x_j \sigma_{kj}$;

σ_{kj} – коваріація цінних паперів k-го то j-го видів.

Використаємо метод лінійного згортання критеріїв. Тоді згідно з формулою (5) отримаємо:

$$\alpha \cdot m_П - \left(1-\alpha\right) \cdot V_П \to \max.$$

Функцію Лагранжа з урахуванням формул (3) запишемо так:

$$L = \alpha \sum_{i=1}^{N} x_i m_i - \left(1-\alpha\right) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{N} x_i\right), \tag{7}$$

тоді система буде такою:

$$\begin{cases} 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{11}x_1 + 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{12}x_2 + \ldots + 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{1N}x_N + \lambda - \alpha m_1 = 0, \\ 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{21}x_1 + 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{22}x_2 + \ldots + 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{2N}x_N + \lambda - \alpha m_2 = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{N1}x_1 + 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{N2}x_2 + \ldots + 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{NN}x_N + \lambda - \alpha m_N = 0, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_N = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Перейшовши до матричної форми, отримаємо

$$Vx = W \tag{9}$$

де

$$V = \begin{pmatrix} 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{11} & 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{12} & \cdots & 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{1N} & 1 \\ 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{21} & 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{22} & \cdots & 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{2N} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{N1} & 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{N2} & \cdots & 2\left(1-\alpha\right)\sigma_{N} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix};\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_N \\ \lambda \end{pmatrix};\ W = \begin{pmatrix} \alpha m_1 \\ \alpha m_2 \\ \cdots \\ \alpha m_N \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Практичне застосування багатокритеріальної оптимізації портфеля цінних паперів.

Постановка задачі оптимізації портфеля цінних паперів: сформувати структуру портфеля так, щоб забезпечити максимально можливий дохід за мінімального рівня ризику.

Опис програми. Створена програма у візуальному середовищі Delphi мовою Object Pascal. Для використання програми необхідна наявність документа з розширенням *.xls (Excel-документ).

Програма призначена для визначення частки цінних паперів (акцій чи іноземних валют) у портфелі, що забезпечать отримання найбільшого прибутку за найменшого рівня ризику, а також обчислення норми прибутковості отриманого портфеля. За запитом користувача можна визначити майбутній прибуток при введеній сумі інвестицій. Для подальшого прогнозування програма обчислює прибутковості сформованого портфеля за розглянуті періоди та записує їх у документ Excel.

Вхідні дані розташовані в документі Excel, шлях до якого вказує користувач. Користувач може ввести кількість цінних паперів, кількість періодів та коефіцієнт значущості критеріїв. Якщо ці дані не були введені чи були введені некоректно, змінним присвоїться значення за замовчуванням.

Під час роботи програми зчитують і перевіряють вхідні дані, викликають функції, що забезпечують розв'язок системи рівнянь (8), тобто визначення часток цінних паперів у портфелі. Якщо серед розв'язків є від'ємні, то визначається найменший серед них, відповідний йому цінний папір із розгляду вилучають і перераховують структуру портфеля (*рис. 1*).

Перерахунок завершується, коли всі розв'язки (частки) невід'ємні. Дані про цінні папери, що утворили портфель, і відповідні їм частки виводять на екран. Також виводять очікувану прибутковість сформованого портфеля (3).

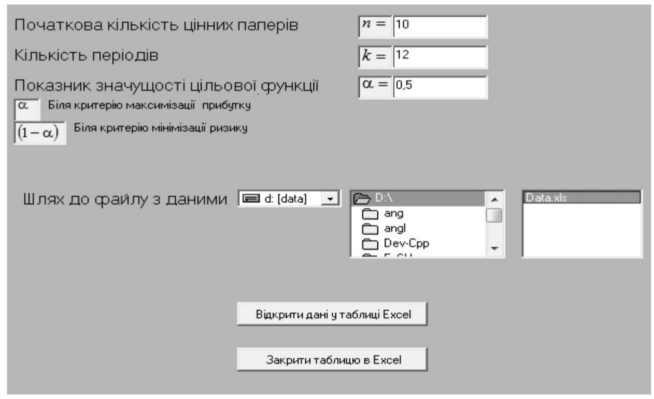

Рис. 1. Початкові дані

Приклад формування портфеля цінних паперів. Початкові дані: курси іноземних валют за період січень – грудень 2013 року, що представлені *табл. 1*.

Таблиця 1

Курси іноземних валют за січень – грудень 2013 року

Валюта	31.01.13	28.02.13	29.03.13	30.04.13	31.05.13	27.06.13	31.07.13	30.08.13	30.09.13	31.10.13	29.11.13	27.12.13
Австралійський долар	832,82	815,17	831,58	827,18	766,78	741,83	726,36	714,71	744,06	759,75	728,4	713,48
Канадський долар	797,42	779,26	786,04	788,48	770,20	762,69	779,0767	761,58	774,69	765,41	755,71	753,33
Швейцарський франк	813,41	859,69	839,28	853,59	828,55	848,97	860,8	861,51	883,42	890,45	881,61	893,38
Китайський юань	128,48	128,36	128,58	129,65	130,26	130,02	130,36	130,56	130,64	131,15	131,19	131,65
Євро	1 082,33	1 046,84	1 023,5	1 048,12	1 034,61	1 041,0	1 061,79	1 060,35	1 082,01	1 099,44	1 086,41	1 093,76
Фунти стерлінгів	1 261,02	1 211,55	1 210,39	1 241,85	1 209,08	1 227,31	1 224,18	1 240,32	1 288,11	1 284,54	1 305,54	1 308,28
Японська єна	87,60	87,19	84,68	81,71	78,56	81,76	81,68	81,35	81,18	81,37	78,12	76,67
Латвійський лат	1 548,18	1 494,21	1 458,61	1 497,32	1 475,07	1 482,28	1 511,01	1 508,97	1 539,57	1 563,92	1 545,61	1 557,62
Норвезька крона	145,57	140,2	136,25	137,75	135,79	130,99	134,88	131,74	133,53	136,07	131,27	129,68
Долар США	799,3	799,3	799,3	799,3	799,3	799,3	799,3	799,3	799,3	799,3	799,3	799,3

Примітка. Дані взято із сайта: http://currency.in.ua, що представляє офіційний курс НБУ.

Поставлена задача є двокритеріальною задачею оптимізації (4).

Використаємо метод лінійного згортання критеріїв, вважаючи, що обидві цільові функції є рівноважливими (α = 0,5). Розв'язок задачі отримаємо за допомогою розробленої програми.

Результати виконання програми зображено на *рис. 2*. Найефективніший портфель сформовано зі швейцарського франка (0,63%) і японської єни (0,37%), що є одними з найстабільніших валют світу; очікувана норма прибутковості – 10,66. При вкладенні в такий портфель 2 000 гр. од. прогнозований прибуток рівний 213,28 гр. од.

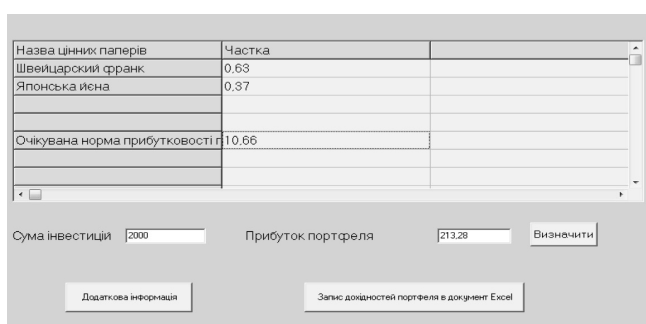

Рис. 2. Результат виконання програми

На практиці при оцінці очікуваної норми прибутку часто виходять із припущення, що поведінка цінного папера в майбутньому великою мірою залежить від того, як формувалися його норми прибутку в минулому.

Це означає, що майбутня норма прибутку може бути наближено визначена за допомогою норм прибутку, що мали місце в минулому. Це задача прогнозування за даними часового ряду. На основі утворених даних можна створити прогноз норми прибутковості портфеля стандартними засобами Excel. На *рис. 3* зображено прогноз норми прибутковості портфеля з двох іноземних валют на три періоди, а також величину достовірності апроксимації.

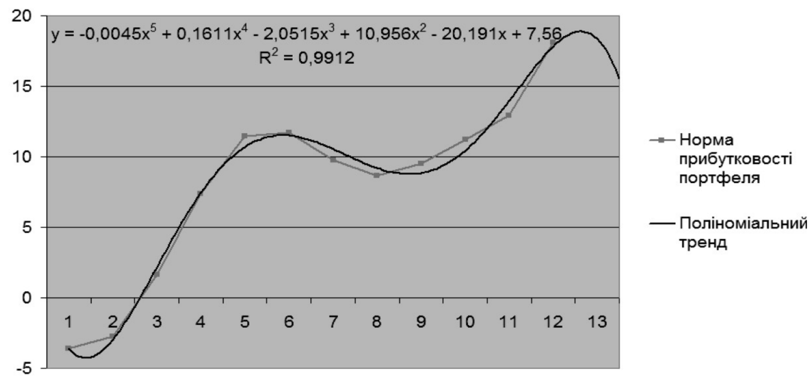

Рис. 3. Прогнозування значень норми прибутку портфеля цінних паперів

Висновки. Формування оптимальної структури портфеля цінних паперів – одна з основних економічних задач, розв'язання якої дозволяє оптимізувати розподіл фінансових і матеріальних ресурсів, прогнозувати результати економічної діяльності. Подальший розвиток класичної портфельної теорії – це її адаптація до реалій перехідної економіки, розробка нових підходів до проблеми оптимізації структури портфеля цінних паперів в умовах підвищеного ризику та неповної інформації. У нашому дослідженні розглянуто двокритеріальну задачу оптимізації портфеля цінних паперів. Задачу побудовано з огляду потреб інвестора в максимізації прибутку та мінімізації ризику валютних активів. У подальшому дослідженні планується врахування впливу ліквідності цінних паперів на структуру портфеля.

Список використаної літератури

1. Бартіш М. Я., Дудзяний І. М. Дослідження операцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. – 278 с.
2. Бондарев Б. В., Шурко И. Л. Финансовая математика. – Донецк: Кассиопея, 1999. – 164 с.
3. Вентцель Е. С. Иследование операций. – М.: Советское радио, 1972. – 550 с.
4. Вітлінський В. В., Верчено П. І. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком. – К.: КНЕУ, 2000. – 292 с.
5. Пікус Р. В. Управління фінансовими ризиками. – К.: Знання, 2010. – 598 с.

Summary. The mathematical models of the tasks of optimization of the brief-case of securities belonging to the class of tasks of nonlinear programming are constructed. The construction of multicriterion (doublecriterion) task of optimization of the brief-case of securities is examined and the methods of solving such tasks are considered.
Keywords: the brief-case of securities, nonlinear programming, multicriterion task of optimization.