УДК 330.43+336.764.2

Ціноутворення опціонів. Модель Мертона – Гармана

Василь Степанович Янішевський,
доцент кафедри технологій управління
Національного університету «Львівська політехніка»,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Роман Васильович Фещур,
завідувач кафедри технологій управління
Національного університету «Львівська політехніка»,
кандидат економічних наук, професор

Василь Петрович Яцишин,
професор кафедри математики і статистики
Львівського інституту банківської справи
Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ),
кандидат фізико-математичних наук, професор

Анотація. Використовуючи аналогії із квантовою механікою динаміки матеріальної частинки, досліджено рівняння динаміки ціни опціону в моделі Мертона – Гартмана. Показано, що модель Гестона еквівалентна одновимірній точно розв'язуваній моделі квантомеханічної частинки в потенціальному полі. Отримано формули ціни опціону, проаналізовано частинні випадки.

Ключові слова: модель Мертона – Гартмана, модель Гестона, ціноутворення опціонів, квантова механіка.

Вступ. Ідея броунівського руху застосовується для опису багатьох фізичних явищ відтоді, як була запропонована його теорія [1]. Дещо раніше ідеї броунівського руху були використані для опису динаміки цін фінансових активів [2; 3]. Подібно до того як положення броунівської частинки змінюється хаотично, ціна фінансового активу (акції, облігації та інші) зазнає таких же змін у часі. Використовуючи цю ідею, уперше була запропонована формула для ціни опціону [2], одного з похідних фінансових інструментів. Бурхливий розвиток фінансового ринку, а також робота [4] спонукали інтенсивні дослідження в цій галузі. У роботі [4] було обґрунтоване поняття економічно раціональної ціни опціону і наведена формула Блека – Шоулза ціни опціону. Завдяки цій роботі більш зрозумілими стали механізми ціноутворення на фінансовому ринку, а також фінансові аналітики отримали зручну формулу для практичних розрахунків.

Відтоді тематиці ціноутворення опціонів присвячена значна кількість робіт, де наводились уточнення й узагальнення формули Блека – Шоулза [3; 5]. Оскільки у формулі Блека – Шоулза волантильність (дисперсія) базового фінансового активу вважається сталою величиною, у багатьох пропонованих моделях волантильність розглядалась як змінна випадкова величина. Зокрема, у роботах [3; 5–7] вивчалось рівняння динаміки ціни опціону в моделі, яка отримала також назву моделі Мертона – Гармана. Використовуючи аналогії з квантовою механікою, у роботах [6–8] для розв'язку рівняння динаміки застосовувався метод континуального інтегрування. Це дозволяє записати розв'язок рівняння в замкнутій формі, проте функціональні квадратури є досить складними і відповідно формула ціни опціону складна для практичного застосування. Відомо, що більш прості формули для ціни опціонів отримуються у випадку моделі Гестона [9], яка є частковим випадком моделі Мертона – Гармана. Формула ціни опціону в моделі Гестона вперше була отримана в [9], де враховувалась структура формули Блека – Шоулза і ряд підстановок у рівняння динаміки. У роботах [5; 10] формула ціни опціону в моделі Гестона була отримана також іншими способами.

Мета роботи. У цій роботі ми проаналізуємо часткові випадки рівняння Мертона – Гармана на основі відомих модельних задач квантової механіки. Такий підхід використовується при дослідженні рівнянь Фоккера – Планка [11]. Відомо, що перелік одновимірних потенціалів, для яких існують точні розв'язки нестаціонарного рівняння Шредінгера, достатньо вивчений [12; 13]. Як буде показано далі, модель Гестона еквівалентна одновимірній точно розв'язуваній моделі квантової механіки. Використовуючи відомі розв'язки, ми отримали формулу ціни опціону. Розгляд інших часткових випадків моделі Мертона – Гармана дозволяє проаналізувати їхню порівняльну складність і з'ясувати випадки, для яких мають місце точні розв'язки. Наша робота є продовженням роботи [10].

Виклад результатів дослідження.

1. Модель Мертона – Гармана. Розглядаються два фінансові активи – банківський рахунок і акції. Банківський рахунок $\Pi(t) > 0$ вважається безризиковим і його зміна в часі визначається рівнянням:

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt, \tag{1}$$

де $r \geq 0$ позначає процентну ставку. Акції є ризиковим активом і зміна ціни акцій $S(t) > 0$ задається стохастичним рівнянням:

$$dS(t)=\varphi S(t)dt+\sqrt{V(t)}\,S(t)dW_1(t), \qquad (2)$$

де $\varphi \geq 0$ – процентна ставка акцій; $\sqrt{V(t)}$ – волантильність ціни акцій. Волантильність також є стохастичною величиною, динаміка якої в моделі Мертона – Гармана описується рівнянням:

$$dV(t)=(\lambda+\mu V(t))dt+\xi V^{\alpha}(t)dW_2(t). \qquad (3)$$

Величини $W_1(t)$ і $W_2(t)$ у рівняннях (2) і (3) позначають корельовані вінерівські процеси (броунівські рухи) [2], моменти яких рівні:

$$\begin{aligned}&\langle W_1(t)\rangle=\langle W_2(t)\rangle=0,\\&\langle W_1(t)W_1(t')\rangle=\langle W_2(t)W_2(t')\rangle=\min(t,t'),\\&\langle W_1(t)W_2(t')\rangle=\rho\min(t,t').\end{aligned} \qquad (4)$$

Тут дужки $\langle\ldots\rangle$ позначають усереднення за вінерівськими процесами $W_1(t)$, $W_2(t)$; $\alpha \geq 0$; $-1 \leq \rho \geq +1$ – параметр кореляції. Інші параметри моделі λ, μ, ξ задовольняють також додатковим обмеженням, які забезпечують $V(t) > 0$. Рівняння (2) є узагальнення геометричного (економічного) броунівського руху [2; 4] на випадок стохастичної волантильності.

Таким чином, динаміка фінансового активу $S(t)$ (наприклад акції) визначається стохастичними рівняннями (2) і (3). З ціною базового активу $S(t)$ пов'язана ціна опціону $C(t)$ [2; 3; 5; 7]. Нагадаємо, що ціна опціону – це плата за можливість купити акції (європейський опціон колл) у визначений момент часу T за договірною ціною K (страйк ціна). Як було вже зазначено, поняття раціональної (економічно обґрунтованої) ціни вперше було сформульовано Блеком і Шоулзом [4], знайдено рівняння для її визначення і формулу Блека – Шоулза ціни опціону. Узагальненням цього підходу на випадок стохастичної волантильності (3) є рівняння динаміки ціни опціону $C(t)$, отримане в роботах [3; 6; 7]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial C(t)}{\partial t}+rS\frac{\partial C(t)}{\partial S}+\frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2 C(t)}{\partial S^2}+\\&+(\lambda+\mu V)\frac{\partial C(t)}{\partial V}+\rho\xi V^{\frac{1}{2}+\alpha}S\frac{\partial^2 C(t)}{\partial S\partial V}+\\&+\frac{1}{2}\xi^2V^{2\alpha}\frac{\partial^2 C(t)}{\partial V^2}=rC(t).\end{aligned} \qquad (5)$$

Випадкові сталої волантильності $V = \sigma^2 = \mathrm{const}$ відповідають перші три доданки в лівій частині (5) і зазначене рівняння збігається з рівнянням Блека – Шоулза [4].

Таким чином, ціна опціону визначається розв'язком задачі Коші для рівняння (5) із початковою умовою (платіжною функцією) у момент часу T:

$$C(T,S)=(S-K)^+=\begin{cases}S-T, & S>K;\\ 0, & S\leq K,\end{cases} \qquad (6)$$

де $S = S(T)$ – ринкова ціна акцій у момент T.

Зміст умови (6) досить очевидний, опціон відбувається тоді, коли ринкова ціна акцій S буде більшою ніж договірна K.

Оскільки платіжна функція $C(T, S)$ (6) задається в майбутній момент часу, зручно ввести заміну змінної $\tau = T - t$ і розглядати динаміку, обернену в часі:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial C(\tau)}{\partial \tau}+rS\frac{\partial C(\tau)}{\partial S}+\frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial S^2}+\\&+(\lambda+\mu V)\frac{\partial C(\tau)}{\partial V}+\rho\xi V^{\frac{1}{2}+\alpha}S\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial S\partial V}+\\&+\frac{1}{2}\xi^2V^{2\alpha}\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial V^2}=rC(\tau).\end{aligned} \qquad (7)$$

Виконаємо також заміну змінної $S = e^x$ ($x \in R$) і перейдімо до рівняння

$$\begin{aligned}&\frac{\partial C(\tau)}{\partial t}+(r-\frac{1}{2}V)\frac{\partial C(\tau)}{\partial x}+\frac{1}{2}V\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial x^2}+\\&(\lambda+\mu V)\frac{\partial C(\tau)}{\partial V}+\rho\xi V^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial x\partial V}+\\&+\frac{1}{2}\xi^2V^{2\alpha}\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial V^2}=rC(\tau).\end{aligned} \qquad (8)$$

Рівняння (8) запишемо також так:

$$\frac{\partial C(\tau)}{\partial \tau}=-H_{MG}C(\tau), \qquad (9)$$

де величина H_{MG}, згідно з роботами [6; 7], позначає гамільтоніан Мертона – Гармана:

$$\begin{aligned}&H_{MG}=-\frac{1}{2}V\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\frac{1}{2}V-r\right)\frac{\partial}{\partial x}+r-\\&-\frac{1}{2}\xi^2V^{2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial V^2}-\rho\xi V^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{\partial^2}{\partial V\partial x}-\left(\lambda+\mu V\right)\frac{\partial}{\partial V}.\end{aligned} \qquad (10)$$

2. Рівняння для ядра оператора еволюції. Розв'язок рівняння (8) запишемо так:

$$C(\tau)=\exp(-\tau H_{MG})\,C(0), \qquad (11)$$

де $C(0)$ – значення ціни опціону в момент часу $\tau = 0$ (або $t = T$), задається платіжною функцією (6).

Операторові еволюції $\exp(-\tau H_{MG})$ в (11) поставимо у відповідність ядро $g(\tau, x-x_0, V, V_0)$:

$$C(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx_0\int_0^{+\infty}dV_0\,g\left(\tau,x-x_0,V,V_0\right)C\left(0,x_0\right). \qquad (12)$$

У формулі (12) вказана залежність $C(0)$ від змінної x_0. Ядро $g(\tau, x-x_0, V, V_0)$ запишемо також так:

$$g(\tau,x-x_0,V,V_0)=\exp(-\tau H_{MG})\,\delta(x-x_0)\delta(V-V_0). \qquad (13)$$

Оскільки платіжна функція (6) не залежить від змінної V_0, то інтегрування за V_0 належить лише до ядра $g(\tau, x-x_0, V, V_0)$, тому зручно розглядати ядро $g(\tau, x-x_0, V)$:

$$g(\tau, x-x_0, V) = \int_0^{+\infty} g(\tau, x-x_0, V, V_0) dV_0 . \qquad (14)$$

Тепер розв'язок (12) запишемо так:

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \, g(\tau, x-x_0, V) \; C(0, x_0) . \qquad (15)$$

Оскільки коефіцієнти гамільтоніану H_{MG} (18) не залежать від змінної x, зручно перейти до Фур'є-зображень за формулою:

$$g(\tau, x, V) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau, k, V) \exp(ikx) \, dk. \qquad (16)$$

З урахуванням формул (13) і (16) для Фур'є-зображення ядра $g(\tau, k, V)$ (16) отримаємо вираз:

$$g(\tau, k, V) = \int_0^{+\infty} \exp(-\tau H_{MG}(k) \, \delta(V - V_0) \, dV_0 , \qquad (17)$$

де введено позначення Фур'є-зображення гамільтоніану $H_{MG}(k)$ (18):

$$H_{MG}(k) = -\frac{1}{2}\xi^2 V^{2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial V^2} - (\lambda + \mu V + ik\xi\rho V^{\frac{1}{2}+\alpha}) \frac{\partial}{\partial V} + \\ + \frac{1}{2}(k^2 + ik)V + \tau(1 - ik). \qquad (18)$$

Очевидно, Фур'є-зображення ядра $g(\tau, k, V)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial g(\tau, k, V)}{\partial \tau} = - H_{MG}(k) \; g(\tau, k, V) \qquad (19)$$

з початковою умовою $g(0, k, V) = 1$.

Таким чином, визначаємо розв'язок рівняння (19) $g(\tau, k, V)$, після цього визначаємо ядро $g(\tau, x - x_0, V)$, а за формулою (15) – ціну опціону.

3. Модель Гестона. Модель Гестона відповідає значенню параметра $\alpha = 1/2$. Гамільтоніан (18) у цьому разі рівний:

$$H_{MG}(k) = -\frac{1}{2}\xi^2 V \frac{\partial^2}{\partial V^2} - (\lambda + \Gamma V) \frac{\partial}{\partial V} + \\ + \frac{1}{2}(k^2 + ik)V + \tau(1 - ik), \qquad (20)$$

де введено позначення $\Gamma = \mu + ik\xi\rho$.

Рівняння (19) можна розглядати як одновимірне рівняння Шредінгера для уявного часу, або рівняння для матриці густини у квантовій статистиці [13]. Наша мета – з допомогою перетворень звести рівняння (9) до більш простого, властивості якого відомі. Цього досягнемо, застосовуючи необхідні заміни змінної і перетворення для функцій. Після таких перетворень ми отримаємо рівняння, еквівалентне нестаціонарному одновимірному рівнянню Шредінгера для частинки в деякому потенціальному полі. Отже, спочатку виконаємо заміну:

$$g(\tau, k, V) = \exp(-r(1 - ik)\tau) \; g_1(\tau, k, V). \qquad (21)$$

Очевидно, динаміка $g_1(\tau, k, V)$ визначається рівнянням (9) із гамільтоніаном (20) без останнього доданка.

Наступним кроком виконаємо заміну змінної з метою, щоб доданок із другою похідною в гамільтоніані мав вигляд оператора «кінетичної енергії» в декартових координатах. Для цього виконаємо таку підстановку:

$$g_1(\tau, k, V) = g_2(\tau, \frac{2}{\xi}\sqrt{V}). \qquad (22)$$

Функція $g_2(\tau, z)$ задовольняє рівняння (19) із гамільтоніаном:

$$H_{MG}(k) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[\frac{1}{2z}\left(1 - \frac{4\lambda}{\xi^2}\right) - \frac{1}{2} z \Gamma\right] \frac{\partial}{\partial z} + \\ + \frac{1}{8}(k^2 + ik)\xi^2 k^2. \qquad (23)$$

Тут введено позначення змінної $z = \frac{2}{\xi}\sqrt{V}$.

За допомогою наступного перетворення перейдімо до рівняння, яке не містить доданка з першою похідною.

$$g_2(\tau, z) = \exp\left(-\frac{1}{4} z^2 \Gamma\right) z^{\frac{1}{2} - \frac{2\lambda}{\xi^2}} \; g_0(\tau, z) . \qquad (24)$$

Функція $g_0(\tau, z)$ задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial g_0(\tau, z)}{\partial \tau} = - H_0(z) \; g_0(\tau, z) . \qquad (25)$$

Гамільтоніан $H_0(z)$ буде таким:

$$H_0(z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\Lambda^2 - 1/4}{2 z^2} + \frac{\Omega^2 \, z^2}{2}, \qquad (26)$$

де позначено

$$\Lambda^2 = \left(1 - 2\lambda / \xi^2\right)^2, \quad \Omega^2 = \frac{1}{4}(\Gamma^2 + (k^2 + ik)\xi^2).$$

Гамільтоніан $H_0(z)$ збігається з гамільтоніаном радіального гармонічного осцилятора квантової механіки. Таким чином, розв'язок задачі Коші для рівняння (25) визначимо через ядро оператора еволюції (пропагатор):

$$g_0(\tau, z) = \int_0^{+\infty} K(\tau, z, z_0) \; g_0(0, z_0) dz_0 . \qquad (27)$$

Тут $K(\tau, z, z_0)$ – ядро оператора еволюції рівняння (25). Для ядра $K(\tau, z, z_0)$ використаємо відомі розв'язки, отримані в задачах квантової фізики. Зокрема, ядро радіального осцилятора було знайдене з допомогою фейнманівського інтегралу по траєкторіях [12; 13], а також операторними методами [14] і задається формулою:

$$K(\tau,z,z_0)=\frac{\Omega\sqrt{z\,z_0}}{\sinh(\Omega\tau)}\exp(-\Omega(z^2+z_0^2)\cot(\Omega\tau)/2)\,I_\Lambda(\frac{zz_0\Omega}{\sinh(\Omega\tau0})\,. \tag{28}$$

Тут $I_\Lambda(x)$ позначає модифіковану функцію Бесселя. Для отримання кінцевої формули треба підставити $g_0(0,z_0)$ у формулу (27) і виконати інтегрування. Значення $g_0(0,z_0)$ знайдемо на основі зв'язку з $g(\tau, k, V)$:

$$g(\tau,k,V)=\exp(-(1-ik)r\tau)\,\exp(-\frac{\lambda\Gamma}{\xi^2}\tau)\,\exp(-\frac{\Gamma z^2}{4})z^{\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2\xi^2}}\,g_0(\tau,z).$$

У результаті для $g_0(0,z_0)$ $[g(0,k,V)=1]$ отримаємо:

$$g_0(0,z_0)=\exp(\frac{z_0^2\Gamma}{2})\,z_0^{-\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\xi^2}}\,. \tag{29}$$

Після виконання інтегрування у формулі (27) отримаємо:

$$g_0(\tau,z)=\frac{1}{\sqrt{z}}\exp\left[\frac{z^2\Omega(\Omega-\Gamma\cot(\Omega\tau))}{2(\Gamma-\Omega\cot(\Omega\tau))}\right]\left(\frac{z\Omega}{\Omega\cosh(\Omega\tau)-\Gamma\sinh(\Omega\tau)}\right)^{\frac{2\lambda}{\xi^2}}. \tag{30}$$

Повертаючись до змінної V, для $g(\tau, k, V)$ отримаємо вираз:

$$g(\tau,k,V)=\frac{\exp\left[\left(b_1-\frac{\lambda\Gamma}{\xi^2}\right)\tau\right]\Omega_0^{\frac{2\lambda}{\xi^2}}}{\left[\Omega_0\cosh\left(\frac{\Omega_0\tau}{2}\right)-\Gamma\sinh\left(\frac{\Omega_0\tau}{2}\right)\right]^{\frac{2\lambda}{\xi^2}}}\exp\left(-\frac{V(k^2+ik)\sinh\left(\frac{\Omega_0\tau}{2}\right)}{\Omega_0\cosh\left(\frac{\Omega_0\tau}{2}\right)-\Gamma\sinh\left(\frac{\Omega_0\tau}{2}\right)}\right), \tag{31}$$

де $\Omega_0=2\Omega,\ b_1=r(ik-1).$

Вираз для $g(\tau, k, V)$ збігається з отриманим у роботі [10], де для розв'язання рівняння (19) із гамільтоніаном (20) застосовувалося перетворення Лапласа за змінною V.

Для ціни європейського опціону типу колл (15) отримаємо тепер формулу:

$$C(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau,x-x_0,V)(e^{x_0}-K)^+\,dx_0\,, \tag{32}$$

у якій треба спочатку визначити ядро $g(\tau, x - x_0, V)$ за формулою (16) з урахуванням (31). Після певних перетворень отримаємо вираз для $C(t)$:

$$C(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S\,g(\tau,k-i(1+\varepsilon),V)-K\,g(\tau,k-i\varepsilon,V)}{ik+\varepsilon}\exp((ik+\varepsilon)\ln S/K)\,dk\,. \tag{33}$$

У границі $\varepsilon\to 0$ використаємо формулу Сохоцького [15]:

$$\frac{1}{k-i\varepsilon}=P\frac{1}{k}+i\pi\delta(k),$$

де символ P вказує, що інтеграл за k визначається в сенсі головного значення, а $\delta(k)$ – дельта-функція Дірака.

У кінцевому підсумку отримаємо:

$$C(t)=\frac{1}{2}(S-e^{-r\tau}K)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S\,g(\tau,k-i,V)-K\,g(\tau,k,V)}{ik}\exp(ik\ln S/K)\,dk. \tag{34}$$

При отриманні формули (35) було враховано, що $g(\tau,-i,V)=1,\ g(\tau,0,V)=e^{-r\tau}$.

Праву частину (34) можна записати також у вигляді, що відповідає відомій формулі Гестона:

$$C(t)=S\,P_1-e^{-r\tau}K\,P_2\,, \tag{35}$$

де позначено:

$$P_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Re\left[\frac{e^{ik\ln(S/K)}g(\tau,k-i,V)}{ik}\right]dk, \tag{36}$$

$$P_2=\frac{1}{2}+\frac{e^{r\tau}}{\pi}\int_0^\infty\Re\left[\frac{e^{ik\ln(S/K)}g(\tau,k,V)}{ik}\right]dk. \tag{37}$$

Зазначимо, що формули для опціонів досить зручні для чисельних розрахунків, які можна виконати, зокрема, з допомогою математичного пакета *Mathematica*.

4. Часткові випадки стохастичної волантильності. Проаналізуймо деякі часткові випадки рівняння стохастичної волантильності (3) залежно від α. У літературі вивчались моделі з α = {0; 1; 3/2} для яких стохастичне рівняння для волантильності (3) відоме як модель Орштейна – Уленбека, GARCH-модель і 3/2-модель відповідно. Ці моделі застосовувались у фінансових розрахунках [2; 5; 16], окрім того, модель Орштейна – Уленбека відома у статистичній механіці [1].

3/2-модель. Для α = 3/2 гамільтоніан (18) запишемо так:

$$H_{MG}(k) = -\frac{1}{2}\xi^2 V^3 \frac{\partial^2}{\partial V^2} - (\lambda + \mu V + ik\xi\rho V^2)\frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{2}(k^2 + ik)V + \tau(1-ik). \quad (38)$$

Далі не будемо детально наводити всі кроки перетворень, а випишемо лише кінцеві формули для рівняння (25). У такому разі виконаємо заміну змінних

$$g_1(\tau, k, V) = g_2(\tau, \frac{2}{\xi\sqrt{V}}). \quad (39)$$

Після таких самих попередніх перетворень, деталі яких пропускаємо, отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial g_0(\tau, z)}{\partial \tau} = -H_0(z)\, g_0(\tau, z), \quad (40)$$

де гамільтоніан $H_0(z)$ має вигляд:

$$H_0(z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Phi_1(z). \quad (41)$$

Тут потенціал Φ(*z*) задається виразом:

$$\Phi_1(z) = \frac{a_0}{z^2} + a_1 z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6, \quad (42)$$

з параметрами:

$$a_0 = \frac{3}{8} + \frac{2}{\xi^2}\left(\left(1-\rho^2\right)k^2 + \left(1-\xi\rho\right)ik\right),$$

$$a_1 = \frac{1}{8}(\mu^2 - 3\lambda\xi^2 + 2\lambda\xi\rho i k),$$

$$a_2 = \frac{1}{16}\lambda\mu\xi^2, \qquad a_3 = \frac{1}{128}\lambda^2\xi^4.$$

Гамільтоніан $H_0(z)$ має структуру радіального ангармонічного осцилятора. Відомо, що така задача не має точного розв'язку, що свідчить про складність цієї моделі порівняно з моделлю Гестона. Можна зауважити, що задача суттєво спрощується у випадку λ = 0. Тоді параметри $a_2 = a_3 = 0$, і ми знову отримуємо гамільтоніан радіального осцилятора, для якого є точний розв'язок.

Модель Орштейна – Уленбека. У випадку α = 0 стохастичне рівняння (3) має також назву процесу Орштейна – Уленбека [2; 16]. Гамільтоніан (18) у цьому разі такий:

$$H_{MG}(k) = -\frac{1}{2}\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial V^2} - (\lambda + \mu V + ik\xi\rho V^{\frac{1}{2}})\frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{2}(k^2 + ik)V + \tau(1-ik). \quad (43)$$

Оскільки доданок із другою похідною не містить залежності від *V*, то заміна змінної зведеться до масштабного перетворення

$$V = \xi z.$$

Після низки перетворень, які ми пропускаємо, перейдімо до рівняння з гамільтоніаном:

$$H_0(z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Phi_2(z). \quad (44)$$

Тут потенціал $\Phi_1(z)$ має вигляд:

$$\Phi_2(z) = \frac{b_0}{\sqrt{z}} + b_1\sqrt{z} + b_2 z + b_3 z^{3/2} + b_4 z^2. \quad (45)$$

Параметри потенціалу задаються виразами:

$$b_0 = \frac{\rho}{4\sqrt{\xi}}ik; \qquad b_1 = \frac{\lambda\mu}{\sqrt{\xi}}ik;$$

$$b_2 = \frac{\lambda\mu}{\xi} + \frac{1}{2}(1-\rho^2)k^2 + \frac{\xi}{2}ik;$$

$$b_3 = \mu\rho\sqrt{\xi}\, ik; \qquad b_4 = \frac{1}{2}\mu^2.$$

Динамічна задача (25) із гамільтоніаном (44) не має точного розв'язку.

Потенціали вигляду (45), наскільки нам відомо, не вивчались у задачах квантової механіки. Задача суттєво спрощується у випадку ρ = 0, у цьому разі параметри $b_0 = b_1 = b_3 = 0$, і ми отримаємо модель гармонічного осцилятора з лінійним доданком, яка має точний розв'язок [12]. Нагадаємо, що для ρ = 0 відсутня кореляція вінерівських процесів у рівняннях стохастичної динаміки ціни активу (2) і волантильності (3).

GARCH-модель. Стохастичне рівняння (3) для α = 1 є неперервним випадком моделей GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) [2; 5; 16]. Для гамільтоніану (18) отримаємо:

$$H_{MG}(k) = -\frac{1}{2}\xi^2 V^2 \frac{\partial^2}{\partial V^2} - (\lambda + \mu V + ik\xi\rho V^{\frac{3}{2}})\frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{2}(k^2 + ik)V + \tau(1-ik). \quad (46)$$

Після заміни змінних

$$g_1(\tau, k, V) = g_2(\tau, \frac{\ln V}{\xi})$$

гамільтоніан (46) набуде вигляду:

$$H_0(z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Phi_3(z), \quad (47)$$

де потенціал $\Phi_3(z)$:

$$\Phi_3(z) = c_0 e^{-2\xi z} + c_1 e^{-\xi z} + c_2 e^{-\frac{1}{2}\xi z} + c_3 e^{\frac{1}{2}\xi z} + c_4 e^{\xi z} \quad (48)$$

з параметрами

$$c_0 = \frac{\lambda^2}{2\xi^2}; \quad c_1 = \lambda\left(\frac{\mu}{\xi^2} - 1\right); \quad c_2 = \frac{\lambda\rho}{\xi}ik;$$

$$c_3 = \frac{(\xi^2 - 4\mu)\rho}{4\xi} ik; \quad c_4 = \frac{1}{2}((1-\rho^2)k^2 + ik).$$

Задача для цього гамільтоніану не має точного розв'язку. Отриманий гамільтоніан (47–48) можна розглядати як деяке розширення гамільтоніану Морзе [12]. Задача суттєво спрощується для $\lambda = 0$, оскільки коефіцієнти потенціалу $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, і ми отримуємо потенціал Морзе, для якого відомий точний розв'язок. Стохастичне рівняння (3) для $\lambda = 0$ (і, відповідно, $\alpha = 1$) набуває вигляду геометричного броунівського руху. Якщо додатково покласти параметр $\rho = 0$, то $c_3 = 0$ і відмінним від нуля у (48) є лише доданок з c_4, що відповідає потенціалу Ліувілля [12]. Замкнуту форму розв'язку для $g(\tau, k, V)$ (19) для геометричного броунівського руху волантильності наведено в [5]. При цьому використаний спектральний розклад для $g(\tau, k, V)$ на основі власних значень і власних функції гамільтоніану (18) (для $\lambda = 0$, $\alpha = 1$). Очевидно, цей розв'язок можна отримати, використовуючи відому формулу ядра для потенціалу Морзе в рівності (27).

Висновки. У роботі розглянуто моделювання цінових процесів на ринку з допомогою стохастичних процесів (модель Мертона – Гартмана). У моделі Мертона – Гармана використовуються два процеси – один моделює динаміку цінового активу $S(t)$, другий зміну волантильності $V(t)$ ціни активу в часі. З динамікою активу пов'язана також зміна похідного фінансового інструменту опціону. Для визначення ціни опціону відоме рівняння Мертона – Гармана, яке є еволюційним диференціальним рівнянням двох змінних. Після переходу до Фур'є – зображення за змінною x [$x = \ln(S)$] отримуємо одновимірне рівняння, коефіцієнти якого залежать від змінної Фур'є k. Отримане рівняння можна розглядати як рівняння Шредінгера для уявного часу (або еквівалентно матриці густини статистичної механіки). Тому для аналізу розв'язків цього рівняння можна використати відомі результати, отримані в задачах квантової механіки.

Показано, що модель Гестона для ціни опціону еквівалентна задачі радіального осцилятора і формулу Гестона отримано з використанням ядра для нестаціонарного рівняння Шредінгера радіального осцилятора. Слід зауважити, що розв'язок задачі для радіального осцилятора був відомий задовго до отримання формули Гестона ціни опціону [9].

Розглянуто часткові випадках моделі Мертона – Гармана. Показано, що «3/2-модель» еквівалентна моделі ангармонічного радіального осцилятора; «модель Орштейна – Уленбека» зводиться до задачі, де потенціал є сумою потенціалу гармонічного осцилятора і більш складної залежності; потенціал для «GARCH-моделі» рівний сумі потенціалу Морзе і низки інших подібних доданків.

Відомо, що для таких задач немає точних розв'язків, проте можна вказати нульові значення деяких параметрів для кожної з моделей, для яких потенціал суттєво спрощується і задача має точний розв'язок.

Ненульові значення параметрів можна врахувати, зокрема, за теорією збурень, використовуючи відомі модельні розв'язки, що буде предметом дальших досліджень.

Список використаної літератури

1. Katja Lindenberg and Bruce J. West. The Nonequilibrium Statistical Mechanics of Open and Closed Systems. – New York, 1990.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. – М.: ФАЗИС, 1998. – Т. 1 і 2.
3. Hull J. C. Options, Futures and Other Derivatives. – Fifth Edition, Prentice-Hall International, 2003.
4. Black F. and Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – 81. – No 3. – P. 637.
5. Lewis A. L. Option Valuation under Stochastic Volatility // Finance Press. – 2000.
6. Baaquie B. E. A Path Integral Approach to Option Pricing with Stochastic Volatility: Some Exact Results // Journal de Physique I. – 1997. – Vol. 7. – Is. 12. – P. 1733.
7. Baaquie B. E. Quantum finance. Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates / Cambridge University Press. – New York, 2004.
8. Blazhyevskyi L. F., Yanishevsky V. S. The path integral representation kernel of evolution operator in Merton-Garman model, Condensed Matter Physics. – 2011. – Vol. 14. – No 2, 23001: 1–16.
9. Heston S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // Rev. Financial Studies. – 1993. – V. 6. – P. 327–343.
10. Янішевський В. С., Фещур Р. В. Про один спосіб розв'язання рівняння ціни опціону в моделі Гестона // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 221–227; Яцишин В. П., Янішевський В. С., Фещур Р. В. Ціноутворення опціонів. Модель Гестона // Вісник УБС НБУ. – 2012. – № 2 (14). – С. 343–348.
11. Risken H. The Fokker-Planck Equation. – 1996. – Springer. – P. 472.
12. Grosche C., and Steiner F. Handbook of Feynman Integrals. – Springer – Verlag, Berlin, 1998.
13. Kleinert H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics and financial markets. Third edition. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge. – NJ, 2004.
14. Крылов Г. Г. Точно и квазиточно решаемые модели в квантовой механике и стохастической динамике. – Мн.: БГУ, 2011.
15. Владимиров В. С., Жаринов В. В., Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2004.
16. Slanina F. A contribution to the systematics of stochastic volatility models, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2010. – Vol. 389. – Is. 16. – P. 3230–3239.

17. Derezinski J., Michael Wrochna. Exactly solvable Schr.odinger operators, Annales Henri Poincare. – 2011. – Vol. 12. – Is. 2. – P. 397–418.

Summary. Using the analogy with quantum mechanics of material hfrt dynamics, the equation of option price dynamics in Merton – Hartman model is studies. It is proved that Haston model is equivalent to one-dimensional precisely solvable model of quantum mechanics part in potential field. The option price formulas are obtained, single cases are stadies.

Keywords: Merton – Gartman model, Heston model, pricing option, quantum mechanics.