



## Моделювання економічних процесів, дискретних у часі, різницевиими рівняннями, розв'язаними відносно вузлових функцій

Роман Олегович Циганчук,  
аспірант,  
завідувач редакційного сектору видавництва  
Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ)

**Анотація.** Описано математичні методи дослідження в економіці, розглянуто теорію моделювання, моделі різних рівнів економіки та узгодження інтересів. Сформульовано загальне поняття моделювання в економіці і його використання в розвитку та формалізації економічної теорії.

Отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначного ускладнення розрахункових формул суттєво скоротити загальне число прораховуваних вузлів при моделюванні економічних процесів.

**Ключові слова:** математична модель, вузлова функція, економічна динаміка, періодичність.

**Вступ.** Прагнення економічних суб'єктів і економіки в цілому до включення в інвестиційний процес (отримання або розміщення інвестицій) вимагає задіяння, поряд із вербальним, і математичного опису основних властивостей і сторін економічних процесів в їх взаємозв'язку. При цьому виявляються постійні економічні елементи системи, що відображають принцип зв'язку причини і наслідку в економічному процесі. Тому доцільно більш детально спитися на загальному описі методів математичного моделювання.

Поширеною методикою опису тих чи інших процесів і явищ служить моделювання. Моделювання вважається досить ефективним засобом прогнозування можливого явища, нових або майбутніх технічних засобів, конкретних рішень. Уперше для цілей прогнозування побудови операційних моделей було зроблено в економіці.

Модель конструюється суб'єктом дослідження так, щоб операції відображали характеристики об'єкта (взаємозв'язки, структурні та функціональні параметри і т. д.), істотні для мети дослідження. Тому питання про якість такого відображення – адекватності моделі об'єкта – правомірно вирішувати лише відносно певної мети. Конструювання моделі на основі попереднього вивчення об'єкта і виділення його істотних характеристик, експериментальний і теоретичний аналіз моделі, зіставлення результатів з даними об'єкта, коригування моделі – усе це становить зміст методу моделювання.

Метод моделювання, розробка якого стосовно прогнозування економічних процесів наштовхується на серйозні труднощі, вимагає до себе особливої уваги. Труднощі застосування методу моделювання у прогнозуванні економічних процесів викликані складністю структури технічного розвитку і тому змушують користуватися не єдиною моделлю, а системою методів і моделей, що характеризується певною ієрархією і послідовністю.

Під системою моделей прогнозування економічних процесів слід розуміти сукупність методик і моделей, що дозволяє дати погоджений і несуперечливий

прогноз економічних процесів галузі, що ґрунтується на вивченні техніко-економічних тенденцій і закономірностей, що складаються в поточному і майбутніх періодах, на заданих цільових установках, на наявних ресурсах, виявлених потребах народного господарства та їх динаміці. Така система передбачає певну черговість використання моделей для цілей складання комплексного прогнозу.

Для вивчення закономірностей розвитку економіки, соціальних процесів широко використовується економіко-математична модель. Вона являє собою систему формалізованих співвідношень, що описують основні взаємозв'язки елементів, що утворюють економічну систему.

Використання математичного апарату для опису моделей пов'язане з перевагами математичного підходу до багатостадійних процесів обробки інформації, використанням ідентичних засобів формування завдань, пошуку методів їх вирішення, фіксації цих методів і їх перетворення у програми, розраховані на застосування засобів обчислювальної техніки.

Розробка системи моделей прогнозування проходить три етапи.

На першому етапі розробки локальних методик прогнозування проробляються окремі моделі і підсистеми моделей прогнозування. Розроблені моделі повинні бути взаємно пов'язані і становити єдину систему для цілей прогнозування, що забезпечує взаємодію окремих моделей відповідно до певних вимог. Такі вимоги будуть зафіксовані у програмі досліджень з проблеми в цілому.

На другому етапі розробки локальних методик прогнозування економічних процесів створюється система взаємодіючих моделей прогнозування, уточнюються й узгоджуються підсистеми моделей, перевіряється їх взаємодія, визначається послідовність використання окремих моделей, а також прийомів оцінки і методів перевірки одержуваних комплексних прогнозів.

На цьому етапі також повинні бути складені відповідні програми для розв'язання задач на електронних обчислювальних машинах.



Третій етап створення системи моделей прогнозування в основному пов'язаний з уточненням і розвитком окремих локальних систем і методів у ході практичного їх використання для цілей комплексного прогнозування економічних процесів.

При складанні детальних програм досліджень для першого і другого етапів потрібно враховувати, що завдання, методики, коло проблем і показників, що розробляються при прогнозуванні, істотно залежать від термінів прогнозів. Із збільшенням тривалості прогнозованого періоду відбувається укрупнення показників, зменшується кількість наявної і доступної інформації всіх видів; цьому відповідає використання укрупнених (агрегованих) моделей, розгляд більших синтетичних проблем розвитку національного господарства. При цьому треба виявити показники, які пов'язані стійкими функціональними зв'язками як між собою, так і з показниками прогнозів на менш тривалий період і які суттєво впливають на динаміку показників для періоду в цілому і окремих його частин (принцип відбору істотної і стійкої інформації).

Вимоги, що пред'являються до окремих моделей і систем моделей прогнозування, зумовлюють методи, за допомогою яких ці моделі можуть і повинні розроблятися, а також методи і засоби здійснення розрахунків за ними. Ці вимоги зводяться головним чином до таких положень:

- методика повинна давати чіткий опис послідовності правил (алгоритму), що дозволяє скласти окремий прогноз за досить широких припущень про характер і значення вихідної для даного прогнозу інформації певної структури;
- методика повинна використовувати методи і технічні засоби, що дозволяють проводити розрахунки своєчасно і багаторазово, виходячи, як правило, з неоднорідної і великої за обсягом, мінливої за варіантами прогнозу інформації;
- у подібних методиках повинні враховуватися складні багатофакторні зв'язки процесів і показників, що прогнозуються. Потрібно забезпечити виявлення в цих умовах найважливіших і стійких закономірностей і тенденцій. Таке виявлення необхідне як на вихідному матеріалі, так і в процесі аналізу результатів, одержуваних за даною методикою, а їх розрахунки за комплексом пов'язаних із нею моделей;
- необхідне узгодження окремих прогнозів в їхній системі. Система прогнозів повинна забезпечити несуперечність і взаємне коригування прогнозів.

Застосування математичних методів є необхідною умовою розробки і використання методів прогнозування, пред'являє високі вимоги до обґрунтованості, дієвості і своєчасності економічних процесів.

Вивчення і співвіднесення фрагментів економічного процесу в його розвитку – один із базових способів пізнання економічного середовища. При цьому

важливо враховувати наявність певної послідовності вивчення даних фрагментів, щоб виявити закономірності системи, яку утворюють ці фрагменти. При цьому вивчення окремого фрагмента економічного процесу за допомогою його математичного моделювання обумовлено тим, що змінні економічні моделі характеризують економічні величини (обсяги продукції, капіталовкладень і т. д.), а параметри – їхні кількісні зв'язки (норми витрат матеріалів і т. д.). Отже, вивчення фрагментів економічних процесів створює основу для моделювання економічних систем.

Термін «система» походить від грецького «systema», що означає ціле, складене з частин, або з'єднання. У даний час вітчизняною наукою розроблено значну кількість економічних і соціальних прогнозів. У зв'язку з ускладненням і збільшенням соціально-економічних завдань розвитку українського суспільства виникає проблема з'єднання численних приватних прогнозів в єдину систему, яка дозволяла б забезпечувати узгодженість і взаємну ув'язку прогнозів на всіх рівнях соціально-економічної ієрархії.

Будь-який економічний процес містить у своїй основі вихідний фрагмент свого розвитку. Наявність або пошук відомостей про цей фрагмент виступає ресурсом для прийняття рішення в рамках аналізу конкретного економічного процесу. При цьому вивчення економічних процесів і систем шляхом побудови їхніх моделей є найбільш економічним способом для прийняття найбільш ефективного рішення. Таким чином, способи розуміння поведінкових, організаційних і технічних взаємозв'язків можуть бути представлені в теорії моделей.

В економічному і соціальному прогнозуванні широко використовуються різні моделі. Модель є одним із найважливіших інструментів економічного прогнозування, наукового пізнання досліджуваного процесу. Змістом процесу моделювання є конструювання моделі на основі попереднього вивчення об'єкта або процесу, виділення його істотних характеристик або ознак, теоретичний і експериментальний аналіз моделі, зіставлення результатів моделювання з фактичними даними про об'єкт або процес, коригування й уточнення моделі.

Під економіко-математичною моделлю розуміють методику доведення до повного, вичерпного опису процесу отримання й обробки вихідної інформації та правил розв'язування розглянутої задачі в досить широкому класі конкретних випадків [3; 4].

З урахуванням фактора часу моделі можуть бути статичними (тобто коли обмеження в моделі встановлені для одного певного відрізка часу протягом планового періоду і при цьому мінімізуються витрати або максимізується кінцевий результат) або динамічними (у цьому разі обмеження встановлено для кількох відрізків часу за тієї самої мінімізації або максимізації ефекту за весь плановий період).

Ситуація вибору, що стоїть перед економічним суб'єктом, повторюється і у процесі модельного дослідження економічного процесу, що його цікавить. Залежно від того, які поведінкові, організаційні та технічні взаємозв'язки цікавлять економіста, здійснюється

вибір того рівня економіки, який приймається для моделювання. При цьому фіксація ходу і спрямованості економічного явища змінюватиметься відповідно до рівня економіки. У зв'язку з цим моделювання різних рівнів економіки винесено в окремий розділ наукового дослідження.

**Аналіз останніх наукових досліджень.** Під системою моделювання економічної динаміки можна розуміти певну єдність методології, організації та розробки прогнозів, що забезпечують їх узгодженість, послідовність і безперервність. Система економічного прогнозування безперервно розвивається і вдосконалюється відповідно до розвитку перспективних цілей.

Система моделювання економічної динаміки об'єднує в одне ціле перспективний розвиток продуктивних сил і виробничих відносин. Так само як і в плануванні економічного і соціального розвитку, система моделювання економічної динаміки включає в себе такі основні аспекти продуктивних сил і виробничих відносин: продуктивність праці, використання і відтворення трудових ресурсів; виробництво основних фондів; обсяг і склад капітальних вкладень і їх ефективність; темпи економічного зростання, розвиток різних галузей господарства, структурні зрушення у виробництві; динаміка, обсяги, склад і якість своєї продукції; міжгалузеві зв'язки; територіальне розміщення виробництва, раціональне використання природних ресурсів, формування територіально-виробничих комплексів за економічними районами країни; зовнішньоекономічні зв'язки та ін.

Для вивчення різних економічних явищ економісти використовують їх спрощені формальні описи, так звані економічні моделі.

Прикладами економічних моделей є моделі споживчого вибору, моделі фірми, моделі економічного зростання, моделі рівноваги на товарних, факторних і фінансових ринках і багато інших. Будуючи моделі, економісти виявляють істотні фактори, що визначають досліджуване явище і відкидають деталі, не суттєві для розв'язання поставленої проблеми. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дозволяє оцінити можливі наслідки впливу на них і використовувати такі оцінки в управлінні.

Сучасна економічна теорія, як на мікро-, так і на макрорівні, включає як природний, необхідний елемент математичні моделі та методи [5]. Використання математики в економіці дозволяє, по-перше, виділити і формально описати найбільш важливі, істотні зв'язки економічних змінних і об'єктів: вивчення настільки складного об'єкта припускає високий ступінь абстракції. По-друге, з чітко сформульованих вихідних даних і співвідношень методами дедукції можна отримувати висновки, адекватні досліджуваному об'єкту тією самою мірою, що й зроблені передумови. По-третє, методи математики і статистики дозволяють індуктивним шляхом отримувати нові знання про об'єкт: оцінювати форму і параметри залежностей його змінних, що відповідають найбільшою мірою наявним спостереженням. Нарешті, по-четверте, ви-

користання мови математики дозволяє точно і компактно викладати положення економічної теорії, формулювати її поняття і висновки.

Під динамічною системою розуміють усяку систему, яка змінюється в часі. Час в економічній динаміці може розглядатись як неперервний або дискретний. Неперервний час зручний для моделювання, оскільки дає змогу використати апарат диференціального числення і диференціальних рівнянь. Дискретний час зручний для розв'язування прикладних задач, оскільки статистичні дані завжди дискретні і їх відносять до конкретних одиниць часу.

Для дискретного часу використовують апарат різницевих рівнянь [1].

**Метою** роботи є розроблення раціонального способу, що значно спрощує й полегшує процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу, дискретного в часі, різницевиими рівняннями.

**Основний матеріал дослідження.** Розглянемо різницеве рівняння для порядку апроксимації  $k = 1$  із похибкою  $p$  цього порядку, яку записуємо так:

$$-3y_{m-1} + 3y_{m+1} = h(y'_{m-1} + 4y'_m + y'_{m+1}) + \frac{1}{30}h^5 y_m^{(5)}, \quad (1)$$

де  $m$  – номер вузлової точки;

$h$  – крок дискретизації;

$y_{m-1}, y_m, y_{m+1}$  – сіткові функції;

$y'_{m-1}, y'_m, y'_{m+1}$  – їхні похідні.

Кінцево-різницева формула (1) пов'язує шукану функцію в  $(m-1)$ -му і  $(m+1)$ -му вузлах через значення її похідних в  $(m-1)$ -му,  $(m)$ -му,  $(m+1)$ -му вузлах. Спробуємо отримати апроксимуючі формули, розв'язані відносно функцій, тобто такі, що визначають функцію в  $m$ -му вузлі через значення її похідних у трьох інших вузлах.

Розглянемо метод отримання таких виразів на прикладі рівняння (1).

Для економічних процесів, які характеризуються періодичністю вигляду  $y_m(t) = y_m(t + 180^\circ)$  як інтервал повторюваності, доцільно прийняти півперіод, що скоротить час розв'язування задачі [2]. Мінімальна кількість вузлів на періоді для тривузлової апроксимації дорівнює чотирьом ( $n = 4$ ). Записуємо рівняння (1) для всіх вузлових точок періоду з урахуванням граничних умов, які для періодичних економічних процесів будуть такі:

$$y_{n+1} = -y_1. \quad (2)$$

Приходимо до такої системи кінцево-різницевих рівнянь:

$$\begin{aligned} -y_1 + y_3 &= \frac{h}{3}(y'_1 + 4y'_2 + y'_3), \\ -y_2 + y_4 &= \frac{h}{3}(y'_2 + 4y'_3 + y'_4), \\ -y_3 - y_1 &= \frac{h}{3}(y'_3 + 4y'_4 - y'_1), \\ -y_4 - y_2 &= \frac{h}{3}(y'_4 - 4y'_1 - y'_2). \end{aligned} \quad (3)$$



У результаті розв'язання системи різницьких рівнянь (3) відносно вузлових функцій отримаємо

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \frac{h}{3}(-2y'_2 - y'_3 - 2y'_4), \\
 y_2 &= \frac{h}{3}(2y'_1 - 2y'_3 + y'_4), \\
 y_3 &= \frac{h}{3}(y'_1 + 2y'_2 - 2y'_4), \\
 y_4 &= \frac{h}{3}(2y'_1 + 4y'_2 + 2y'_3),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

$$\begin{matrix}
 y_1 \\
 y_2 \\
 y_3 \\
 y_4 \\
 y_5 \\
 y_6 \\
 y_7 \\
 y_8
 \end{matrix}
 = \frac{h}{3}
 \begin{matrix}
 & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\
 2 & & & & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\
 1 & 2 & & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\
 2 & 1 & 2 & & & & -1 & -2 & -1 \\
 1 & 2 & 1 & 2 & & & -2 & -1 & -2 \\
 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & & & -2 & -1 \\
 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & & & -2 \\
 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & & 
 \end{matrix}
 \cdot
 \begin{matrix}
 y'_1 \\
 y'_2 \\
 y'_3 \\
 y'_4 \\
 y'_5 \\
 y'_6 \\
 y'_7 \\
 y'_8
 \end{matrix}
 \tag{7}$$

або у матричній формі

$$\begin{matrix}
 y_1 \\
 y_2 \\
 y_3 \\
 y_4
 \end{matrix}
 = \frac{h}{3}
 \begin{matrix}
 & & -2 & -1 & -2 \\
 2 & & & & -1 \\
 1 & 2 & & & -2 \\
 2 & 1 & 2 & & 
 \end{matrix}
 \cdot
 \begin{matrix}
 y'_1 \\
 y'_2 \\
 y'_3 \\
 y'_4
 \end{matrix}
 \tag{5}$$

Збільшимо кількість вузлів на періоді вдвоє, тобто візьмемо  $n = 8$ .

Система кінцево-різницьких рівнянь для всіх вузлових точок періоду буде такою:

$$\begin{aligned}
 -y_1 + y_3 &= \frac{h}{3}(y'_1 + 4y'_2 + y'_3), \\
 -y_2 + y_4 &= \frac{h}{3}(y'_2 + 4y'_3 + y'_4), \\
 -y_3 + y_5 &= \frac{h}{3}(y'_3 + 4y'_4 + y'_5), \\
 -y_4 + y_6 &= \frac{h}{3}(y'_4 + 4y'_5 + y'_6), \\
 -y_5 + y_7 &= \frac{h}{3}(y'_5 + 4y'_6 + y'_7), \\
 -y_6 + y_8 &= \frac{h}{3}(y'_6 + 4y'_7 + y'_8), \\
 -y_7 - y_1 &= \frac{h}{3}(y'_7 + 4y'_8 - y'_1), \\
 -y_8 - y_2 &= \frac{h}{3}(y'_8 + 4y'_1 - y'_2).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Систему рівнянь (6) представимо в розгорнутій матричній формі

Покладаючи число вузлів на періоді  $n = 4(k + 1)$ , де  $k = 0, 1, 2, \dots$ , отримаємо різницеве рівняння у векторно-матричному вигляді

$$\frac{h}{3} \bar{Y} = g \bar{Y}', \tag{8}$$

де  $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_t$ ,  $\bar{Y}' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)_t$  – транспоновані матриці;

$$g = \begin{matrix}
 & & -2 & -1 & -2 \\
 2 & & & & -1 \\
 1 & 2 & & & -2 \\
 2 & 1 & 2 & & \\
 & & & & 
 \end{matrix}
 \tag{9}$$

– квадратна матриця розмірності  $n$ .

**Висновки.** Розроблено раціональні способи апроксимації диференціальних рівнянь різницевами при моделюванні економічних процесів, дискретних у часі.

Отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначного ускладнення розрахункових формул суттєво скоротити загальне число прораховуваних вузлів і в кінцевому підсумку вимагають менших обчислювальних затрат.

Розв'язання кінцево-різницьких рівнянь підвищеної точності відносно вузлових функцій значно спрощує й полегшує процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу різницевами рівняннями.

Запропонований метод отримання різницьких рівнянь підвищеної точності є загальним і може бути поширений на будь-яку кількість вузлів дискретної сітки.

**Список використаних джерел**

1. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике: Учебник / Под общ. ред. д-ра экон. наук., проф. А. В. Сидоровича; МГУ им. М. В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. – М.: Изд. «Дело и Сервис», 2004. – 268 с.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1992. – Т. 2. – 639 с.
3. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1993. 400 с.
4. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1997. – 664 с.
5. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ ДАНА, 2010. – 367 с.



**Summary.** There is given a description of investigative techniques in economics; there is simulation theory, different levels of economic models and congruence of interests analysed. The concept of economic modelling and its usage in the development and formal characterization of economic theory has been formulated.

The difference equations of multiple precision, which have been deduced, make it possible to significantly cancel the general number of calculated components during economic processes modelling.

**Keywords:** math model, nodal function, economic dynamics, periodicity.