УДК 330.3:330.46

Різницеві рівняння підвищеної точності для моделювання динаміки економічних процесів

Білий Леонід Адамович,
доктор технічних наук, професор,
професор кафедри економічної кібернетики
Львівського інституту банківської справи
Університету банківської справи Національного банку України(м. Київ);
e-mail: dzw@lbi.wubn.net

Циганчук Роман Олегович,
аспірант
Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ);
e-mail: dzw@lbi.wubn.net

Анотація. Для зменшення кількості різницевих рівнянь при збереженні необхідної точності результатів доцільно використовувати апроксимації, які враховують більшу кількість членів розкладання шуканого рішення в ряд Тейлора. Коефіцієнти таких апроксимацій знаходимо методом невизначених коефіцієнтів. Запропоновано метод визначення різницевих рівнянь, що апроксимують диференціальні рівняння.
Сформульовано загальне поняття моделювання в економіці і його використання в розвитку й формалізації економічної теорії. Описано математичні методи дослідження в економіці, розглянуто теорію моделювання, моделі різних рівнів економіки та узгодження інтересів.
Отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначного ускладнення розрахункових формул суттєво скоротити загальне число прораховуваних вузлів при моделюванні економічних процесів.
Ключові слова: неперервний час, дискретний час, математична модель, вузлова функція, економічна динаміка, періодичність.
Формул: 16; рис.: 0; табл.: 0; бібл: 10.

Differential Equations of High Accuracy for Modeling the Dynamics of Economic Processes

Bilyy Leonid,
Ph. D., Professor, Department of Economic Cybernetics,
Lviv Institute of Banking
of the University of Banking of the National Bank of Ukraine (city of Kyiv);
e-mail: dzw@lbi.wubn.net

Tsyhanchuk Roman,
Postgraduate,
University of Banking of the National Bank of Ukraine (city of Kyiv);
e-mail: dzw@lbi.wubn.net

Abstract. To reduce the amount of difference equations while maintaining the desired accuracy of the approximation is appropriate, taking into account the large number of members of the decomposition of the desired solution in a Taylor series. Factors such approximations are the method of undetermined coefficients. The method of determination of difference equations approximating differential equations.
The concept of economic modelling and its usage in the development and formal characterization of economic theory has been formulated. There is given a description of investigative techniques in economics; there is simulation theory, different levels of economic models and congruence of interests analysed.
The difference equations of multiple precision, which have been deduced, make it possible to significantly cancel the general number of calculated components during economic processes modelling.
Keywords: continuous time, discrete time, math model, nodal function, economic dynamics, periodicity.
Formulas: 16; Fig.: 0; tabl.: 0; bibl. 10.

Разностные уравнения повышенной точности для моделирования динамики экономических процессов

Билый Леонид Адамович,
доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры экономической кибернетики,
Львовского института банковского дела
Университета банковского дела Национального банка Украины (г. Киев);
e-mail: dzw@lbi.wubn.net

Цыганчук Роман Олегович,
аспирант
Университета банковского дела Национального банка Украины (г. Киев);
e-mail: dzw@lbi.wubn.net

Аннотация. Для уменьшения количества разностных уравнений при сохранении необходимой точности результатов целесообразно использовать аппроксимации, которые учитывают большее количество членов разложения искомого решения в ряд Тейлора. Коэффициенты таких аппроксимаций находятся методом неопределенных коэффициентов. Предложен метод определения разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальные уравнения.
Сформулировано общее понятие моделирования в экономике и его использование в развитии и формализации экономической теории. Описаны математические методы исследования в экономике, рассмотрено теорию моделирования, модели разных уровней экономики и согласования интересов.
Получены разностные уравнения повышенной точности, позволяющие ценой незначительного осложнения расчетных формул существенно сократить общее число просчитываемых узлов при моделировании экономических процессов.
Ключевые слова: непрерывное время, дискретное время, математическая модель, узловая функция, экономическая динамика, периодичность.
Формул: 16; рис.: 0; табл.: 0; библ.: 10.

Вступ. Поширеною методикою опису тих чи інших процесів і явищ служить моделювання. Моделювання вважається досить ефективним засобом прогнозування можливого явища, нових або майбутніх технічних засобів, конкретних рішень. Уперше для цілей прогнозування побудови операційних моделей було зроблено в економіці. Модель суб'єкт дослідження конструює так, щоб операції відображали характеристики об'єкта (взаємозв'язки, структурні та функціональні параметри і т. д.), істотні для мети дослідження. Тому питання про якість такого відображення – адекватності моделі об'єкта – правомірно вирішувати лише відносно певної мети. Конструювання моделі на основі попереднього вивчення об'єкта і виділення його істотних характеристик, експериментальний і теоретичний аналіз моделі, зіставлення результатів з даними об'єкта, коригування моделі – усе це становить зміст методу моделювання.

Метод моделювання, розробка якого стосовно прогнозування економічних процесів наштовхується на серйозні труднощі, вимагає особливої уваги. Труднощі застосування методу моделювання у прогнозуванні економічних процесів викликані складністю структури технічного розвитку і тому змушують користуватися не єдиною моделлю, а системою методів і моделей, що характеризується певною ієрархією і послідовністю.

Під системою моделей прогнозування економічних процесів слід розуміти сукупність методик і моделей, що дозволяє дати погоджений і несуперечливий прогноз економічних процесів галузі, який ґрунтується на вивченні техніко-економічних тенденцій і закономірностей, що складаються в поточному і майбутніх періодах, на заданих цільових установках, на наявних ресурсах, виявлених потребах народного господарства та їхній динаміці. Така система передбачає певну черговість використання моделей для цілей складання комплексного прогнозу.

Для вивчення закономірностей розвитку економіки, соціальних процесів широко використовується економіко-математична модель. Вона являє собою систему формалізованих співвідношень, що описують основні взаємозв'язки елементів, які утворюють економічну систему.

Використання математичного апарату для опису моделей пов'язане з перевагами математичного підходу до багатостадійних процесів обробки інформації, з використанням ідентичних засобів формування завдань, пошуку методів їх вирішення, фіксації цих методів і їх перетворення у програми, розраховані на застосування засобів обчислювальної техніки.

Сучасна економічна теорія як на мікро-, так і на макрорівні включає як природний, необхідний елемент математичні моделі та методи. Використання математики в економіці дозволяє, по-перше, виділити і формально описати найбільш важливі, істотні зв'язки економічних змінних і об'єктів: вивчення настільки складного об'єкта припускає високий ступінь абстракції. По-друге, з чітко сформульованих вихідних даних і співвідношень методами дедукції можна отримувати висновки, адекватні досліджуваному об'єктові тією самою мірою, що й зроблені передумови. По-третє, методи математики і статистики дозволяють індуктивним шляхом отримувати нові знання про об'єкт: оцінювати форму і параметри залежностей його змінних, що відповідають найбільшою мірою наявним спостереженням. Нарешті, по-четверте, використання мови математики дозволяє точно і компактно викладати положення економічної теорії, формулювати її поняття і висновки.

Математичні моделі використовували з ілюстративними і дослідницькими цілями ще Ф. Кене (1758, «Економічна таблиця»), А. Сміт (класична макроекономічна модель), Д. Рікардо (модель міжнародної торгівлі). У XIX столітті великий внесок у моделювання ринкової економіки внесла математична школа (Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето, Ф. Еджворт та ін.). У XX столітті математичні методи моделювання застосовувались дуже широко, з їх використанням пов'язані практично всі роботи, удостоєні Нобелівської премії з економіки (Д. Хікс, Р. Солоу, В. Леонтьєв, П. Самуельсон та ін.). Розвиток мікроекономіки, макроекономіки, прикладних дисциплін пов'язаний з дедалі вищим рівнем їх формалізації. Основу для цього заклав прогрес в області прикладної математики – теорії ігор, математичного програмування, математичної статистики. У Росії на початку XX століття великий внесок у математичне моделювання економіки внесли В. К. Дмитрієв і Е. Е. Слуцький. У 1930–1950-х роках у цій області не спостерігалося прогресу внаслідок ідеологічних обмежень тоталітарного режиму. У 1960–1980-х рр. економіко-математичний напрям відродився (В. С. Немчинов, В. В. Новожилов, Л. В. Канторович), але був пов'язаний в основному зі спробами формально описати «систему оптимального функціонування соціалістичної економіки» (Н. П. Федоренко, С. Шаталін та ін.). Будували багаторівневі системи моделей народногосподарського планування, оптимізаційні моделі галузей і підприємств. Зараз важливим завданням є моделювання процесів перехідного періоду.

Будь-яке економічне дослідження завжди передбачає об'єднання теорії (економічної моделі) і практики (статистичних даних). Теоретичні моделі використовуються для опису і пояснення спостережуваних процесів, а статистичні дані збирають з метою емпіричної побудови й обґрунтування моделей [5].

Для вивчення різних економічних явищ економісти використовують їхні спрощені формальні описи, так звані економічні моделі. Прикладами економічних моделей є моделі споживчого вибору, моделі фірми, моделі економічного зростання, моделі рівноваги на товарних, факторних і фінансових ринках і багато інших. Будуючи моделі, економісти виявляють істотні фактори, що визначають досліджуване явище, і відкидають деталі, не суттєві для розв'язання поставленої проблеми. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дозволяє оцінити можливі наслідки впливу на них і використовувати такі оцінки в управлінні.

Методика побудови економічної моделі.

1. Формулюються предмет і мета дослідження.
2. У розглянутій економічній системі виділяють структурні або функціональні елементи, відповідні даній меті, виявляються найбільш важливі якісні характеристики цих елементів.
3. Словесно, якісно описуються взаємозв'язки між елементами моделі.
4. Вводяться символічні позначення для характеристик економічного об'єкта, що враховуються і формалізуються, наскільки можливо, взаємозв'язки між ними. Тим самим формулюється математична модель.
5. Проводять розрахунки з математичної моделі й аналізують отримане рішення.

Слід розрізняти математичну структуру моделі та її змістовну інтерпретацію.

Економічні моделі дозволяють виявити особливості функціонування економічного об'єкта і на основі цього передбачати майбутню поведінку об'єкта за зміни будь-яких параметрів. У моделі всі взаємозв'язки змінних можуть бути оцінені кількісно, що дозволяє отримати більш точний і надійний прогноз.

Для будь-якого економічного суб'єкта можливість прогнозування ситуації означає, перш за все, отримання кращих результатів або уникнути втрат, у тому числі й у державній політиці.

За своїм визначенням будь-яка економічна модель абстрактна і, отже, неповна, оскільки, виділяючи найбільш суттєві фактори, що визначають закономірності функціонування розглянутого економічного об'єкта, вона абстрагується від інших факторів, які, попри свою відносну незначущість, усе ж у сукупності можуть визначати не тільки відхилення в поведінці об'єкта, а й саме його поведінку. Так, у найпростішій моделі попиту вважається, що величина попиту на який-небудь товар визначається його ціною і доходом споживача. Насправді ж на величину попиту здійснює також вплив низка інших факторів: смаки й очікування споживачів, ціни на інші товари, вплив реклами, моди і так далі. Зазвичай припускають, що всі фактори, не враховані явно в економічній моделі, справляють на об'єкт відносно малий результуючий вплив в аспекті, який нас цікавить. Склад урахованих у моделі факторів і її структура можуть бути уточнені в ході вдосконалення моделі.

Математична модель економічного об'єкта – це його гомоморфне відображення у формі сукупності рівнянь, нерівностей, логічних відносин, графіків. Гомоморфне відображення об'єднує групи зв'язків елементів досліджуваного об'єкта в аналогічні зв'язки елементів моделі. Модель – це умовний образ об'єкта, побудований для спрощення його дослідження. Передбачається, що вивчення моделі дає нові знання про об'єкт або дозволяє визначити найкращі рішення в тій чи іншій ситуації.

Якщо модель є оптимізаційною, то поряд з обмеженнями повинна бути визначена цільова функція, тобто величина, яка максимізується або мінімізується, що відображає інтереси суб'єкта, який приймає рішення.

Математичні моделі, що використовуються в економіці, можна поділяти на класи за рядом ознак, що належать до особливостей модельованого об'єкта, мети моделювання і використовуваного інструментарію: моделі макро- і мікроекономічні, теоретичні і прикладні, оптимізаційні і рівноважні, статичні і динамічні.

Макроекономічні моделі описують економіку як єдине ціле, пов'язуючи між собою укрупнені матеріальні та фінансові показники: ВНП, споживання, інвестиції, зайнятість, процентну ставку, кількість грошей та інші.

Мікроекономічні моделі описують взаємодію структурних і функціональних складових економіки або поведінку окремої такої складової в ринковому середовищі. Унаслідок різноманітності типів економічних елементів і форм їх взаємодії на ринку мікроекономічне моделювання становить основну частину економіко-математичної теорії. У моделюванні ринкової економіки особливе місце займають рівноважні моделі. Вони описують такі стани економіки, коли результуюча всіх сил, що прагнуть вивести її з цього стану, дорівнює нулю. У неринковій економіці нерівновага щодо одних параметрів (наприклад, дефіцит) компенсується іншими факторами (чорний ринок, черги і т. п.). Рівноважні моделі дескриптивні, описові. У нашій країні довгий час переважав нормативний підхід у моделюванні, заснований на оптимізації.

Аналіз досліджень і постановка завдання. Моделювання економіки – розділ економічної науки, що займається аналізом властивостей і рішень математичних моделей економічних процесів. У деяких випадках ці моделі можна розглядати як частину математичної теорії на стику з економічною наукою. Моделювання економіки відділяється зазвичай від економетрики, що займається статистичною оцінкою й аналізом економічних залежностей і моделей на основі вивчення емпіричних даних. У моделюванні економіки досліджуються теоретичні моделі, засновані на певних формальних передумовах (лінійність, опуклість, монотонність і т. п. залежності, конкретні формули взаємозв'язку величин). Моделювання економіки, взагалі кажучи, не займається вивченням ступеня обґрунтованості того, що дана залежність має той чи інший вид (наприклад, що величина споживання є лінійною зростаючою функцією доходу), – це залишається для економетрики. Завданням моделювання економіки є вивчення питання про існування рішення моделі, умовах її невід'ємності, стаціонарності, наявності інших властивостей. Це зазвичай здійснюється, як і в математиці, шляхом дедуктивного отримання наслідків (теорем) з апріорно зроблених передумов (аксіом).

Зрозуміло, предметна область, методологія та інструментарій економічної науки не вичерпуються підходами моделювання економіки та економетрики – зазвичай в економічних дослідженнях використовуються також методи якісного аналізу, індуктивні, евристичні підходи, що перемежовуються з елементами моделювання економіки та економетрики. Таким чином, моделювання економіки виступає і як самостійний розділ економічної науки, і як один з її інструментів. При цьому розділи моделювання економіки, що досліджувалися раніше в суто теоретичному плані, усе більше стають теоретичною базою та елементами прикладних досліджень.

Серед моделей економіки можна виділити два великі класи – моделі рівноваги в економічних системах і моделі економічного зростання. Моделі рівноваги (наприклад, модель Ерроу – Дебре, модель «витрати – випуск» В. Леонтьєва) допомагають дослідити стани економічних систем, у яких рівнодіюча всіх зовнішніх сил дорівнює нулю. Це, взагалі кажучи, статичні моделі, у той час як економічна динаміка описується за допомогою моделей зростання (модель Харрода – Домара, модель Солоу, моделі магістрального типу та ін.). Ключовим моментом дослідження моделей зростання є аналіз і відшукання траєкторій стаціонарного росту (зростання з постійними, у тому чи іншому сенсі, структурними характеристиками), до виходу на які зазвичай прагне описувана моделлю економічна система. Дослідження траєкторії стаціонарного зростання є одночасно базою для аналізу більш складних типів росту і сполучною ланкою з моделями економічної рівноваги [2–4].

У моделях статичних описується стан економічного об'єкта в конкретний момент чи період часу; динамічні моделі включають взаємозв'язки змінних у часі. У статичних моделях зазвичай зафіксовані значення ряду величин, що є змінними в динаміці, наприклад, капітальних ресурсів, цін і т. п. Динамічна модель не зводиться до простої суми ряду статичних, а описує сили і взаємодії в економіці, що визначають хід процесів у ній. Динамічні моделі зазвичай використовують апарат диференціальних і різницевих рівнянь, варіаційного числення.

Детерміновані моделі передбачають тісні функціональні зв'язки між змінними моделі. Стохастичні моделі допускають наявність випадкових впливів на досліджувані показники і використовують інструментарій теорії ймовірностей і математичної статистики для їх опису.

Більшість економіко-математичних моделей характеризується статичним підходом до вивчення економіки, коли її стан досліджується в заданий момент часу. Під статичною економічною системою розуміємо таку систему, координати якої на досліджуваному відтинку часу можуть вважатися сталими. Відповідно, при формулюванні статичної економіко-математичної моделі допускаємо, що всі залежності відносять до одного моменту часу, а система, що моделюється, є незмінною в часі. При цьому ігноруються можливі, а інколи неминучі зміни, оскільки їх урахування не вимагається поставленою метою моделювання.

Крім того, допускаємо, що всі процеси, які протікають у системі, не вимагають для свого аналізу розгортання в часі, оскільки можуть бути з достатнім ступенем точності охарактеризовані незалежними від часу величинами. Тому в статичній моделі час не вводиться явно. Статичні моделі характеризують економічну систему на будь-якому фіксованому моменті часу. Оскільки статичні моделі у формалізованому варіанті не містять фактора часу, вони завжди простіші від динамічних моделей тих самих економічних систем, які тією чи іншою мірою враховують цей фактор.

Під динамічною системою розуміють усяку систему, яка змінюється в часі. Час в економічній динаміці може розглядатись як неперервний або дискретний. Неперервний час зручний для моделювання, оскільки дає змогу використати апарат диференціального числення і диференціальних рівнянь. Дискретний час зручний для розв'язування прикладних задач, оскільки статистичні дані завжди дискретні і належать до конкретних одиниць часу. Для дискретного часу використовують апарат різницевих рівнянь [1].

Математичний опис динамічних моделей здійснюється, здебільшого:

- системами диференціальних рівнянь, у яких неперервною змінною є час;
- різницевими рівняннями, де час – дискретна величина;
- системами звичайних алгебраїчних рівнянь.

За допомогою динамічних моделей, зокрема, розв'язуються задачі планування і прогнозування економічних процесів [5]:

- визначення траєкторії розвитку економічної системи та її стан у задані моменти часу;
- аналіз економічної системи на стійкість;
- аналіз структурних зсувів.

У практичній діяльності використовуються багатогалузеві динамічні моделі розвитку економіки, виробничі функції, теорія економічного зростання.

Диференціальні рівняння знаходять достатньо широке застосування в моделях динамічної економіки, в яких відображається не лише залежність змінних від часу, а й їхній взаємозв'язок у часі.

Аналіз динамічних систем і їхнє математичне моделювання базуються на чисельних методах розв'язування систем диференціальних рівнянь. Особливе місце серед чисельних методів розв'язування динамічних моделей з дискретним часом займає метод скінченних різниць [2]. Універсальність, можливість застосування в лінійних і нелінійних задачах роблять метод скінченних різниць найпоширенішим методом із застосовуваних у даний час наближених методів. Але не лише надзвичайна загальність різницевого методу приваблює дослідників. Мабуть, це найбільш зручний і прозорий чисельний метод, завдяки якому майже завжди можна отримати уявлення про шуканий розв'язок.

Мета дослідження. Для зменшення кількості кінцево-різницевих рівнянь, які апроксимують диференціальні рівняння, при збереженні потрібної точності результатів дослідження, варто скористатися апроксимаціями, які враховують не тільки перший член розкладання шуканого рішення в ряд Тейлора, а й наступні його члени. Коефіцієнти таких апроксимацій можна знайти за методом невизначених коефіцієнтів. Метою роботи є розроблення раціонального способу, що значно спрощує й полегшує процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу, дискретного в часі, різницевими рівняннями.

Результати дослідження. Спинимося на особливостях використання дискретного часу. Для заміни диференціального рівняння різницевим потрібно здійснити два кроки:

- замінити область неперервної зміни аргументу областю дискретної його зміни;
- замінити диференціальні оператори різницевими.

Так, для диференціального рівняння

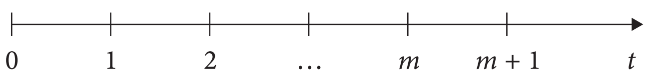
$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) \tag{1}$$

використаємо простий різницевий оператор, отриманий із визначення похідної [6]:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_j} = \frac{y_{m+1} - y_m}{h}, \tag{2}$$

де $h = t_{m+1} - t_m$ – крок за часом.

Різницева апроксимація (2) є найпростішою, але одночасно і найменш точною, тому що інформацію в точці $m + 1$ шукає лише на базі інформації в точці m.



Для використання більш точних операторів ми отримали на основі методу невизначених коефіцієнтів різницеві рівняння підвищеної точності.

Найбільш загальний спосіб побудови кінцево-різницевих рівнянь полягає в тому, що відповідним різницевим відношенням апроксимується не кожна похідна зокрема, а відразу весь диференціальний оператор [7; 8]. За заданого набору вузлів складають кінцево-різницеве рівняння, яке апроксимує дане диференціальне рівняння в m-й вузловій точці, яка лежить посередині сукупності вузлів із номерами $m - k$, …, m, …, $m + k$ (k = 1, 2, …) і яке в загальному випадку можна записати так:

$$\begin{aligned} & a_{m-k}Y_{m-k} + \ldots + a_m Y_m + \ldots + a_{m+k}Y_{m+k} = \\ & = h\left(b_{m-k}Y'_{m-k} + \ldots + b_m Y'_m + \ldots + b_{m+k}Y'_{m+k}\right) + R_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Число k називається порядком цього рівняння, а число p – його степенем. Залишковий член R_k означає різницю між лівою і правою частинами виразу (3) і визначає помилку апроксимації.

Розкладаємо точкові функції Y_{m-k}, …, Y_m, …, Y_{m+k} та їх похідні Y'_{m-k}, …, Y'_m, …, Y'_{m+k} за формулою Тейлора [9] до членів з похідними степеня $p + 1$. Отримаємо

$$Y_{m+k} = Y_m + khY'_m + \frac{(kh)^2}{2!}Y''_m + \ldots + \frac{(kh)^p}{p!}Y^p_m + \frac{(kh)^{p+1}}{(p+1)!}Y^{p+1}_m + 0(h^{p+1}), \tag{4а}$$

$$Y'_{m+k} = Y'_m + khY''_m + \frac{(kh)^2}{2!}Y''_m + \ldots + \frac{(kh)^{p-1}}{(p-1)!}Y^p_m + \frac{(kh)^p}{p!}Y^{p+1}_m + 0(h^p). \tag{4б}$$

Поставимо вимогу, щоб після підстановки (4а) і (4б) у (3) коефіцієнти при похідних у правій частині виразу (3) збіглися з коефіцієнтами при відповідних похідних лівої частини.

У результаті отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{0}^{K} a_K = 0, \quad (5а)$$

$$\sum_{1}^{K} a_K K^S - S b_K K^{S-1}) = 0, (S = 2, 3, ..., p),$$
$$\sum_{1}^{K} a_K K - \sum_{0}^{K} b_K = 0. \quad (5б)$$

Усього маємо $p + 1$ однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $2(K + 1)$ невідомих $a_{m\pm K}$, $b_{m\pm K}$. Якщо ця система рівнянь має рішення, то задача побудови кінцево-різницевого рівняння, апроксимуючого задане диференціальне, може вважатись розв'язаною.

Знайдемо за методом невизначених коефіцієнтів значення коефіцієнтів a і b для рівнянь різного порядку K.

Візьмемо $K = 1$. Тоді рівняння (5) будуть такими:

$$\begin{gathered} a_{m-1} + a_{m+1} + a_m = 0; \\ -a_{m-1} + a_{m+1} = h \cdot 1(b_{m-1} + b_{m+1} + b_m); \\ a_{m-1} + a_{m+1} = h \cdot 2(-b_{m-1} + b_{m+1}); \\ -a_{m-1} + a_{m+1} = h \cdot 2(-b_{m-1} + b_{m+1}). \end{gathered} \quad (6)$$

Ураховуючи, що для заданої дискретизації аргументу можна побудувати безліч різницевих схем [10], еквівалентних за порядком апроксимації і не впливаючи на загальність результату в системі рівнянь (6), приймемо $a_m = 1$, $b_m = 0$. Результатом розв'язування буде формула

$$2y_{m-1} - 4y_m + 2y_{m+1} = h(y'_{m-1} + y'_{m+1}) + \frac{1}{24} h^4 y_m^4. \quad (7)$$

Отримано різницеві рівняння підвищеної точності. Інформацію в точці отримуємо на основі інформації в точках $m - 1$ та $m + 1$.

Розглянемо різницеве рівняння для порядку апроксимації $k = 1$ із похибкою п'ятого порядку, яку записуємо так:

$$-3y_{m-1} + 3y_{m+1} = h(y'_{m-1} + 4y'_m + y'_{m+1}) + \frac{1}{30} h^5 y_m^{(5)}, \quad (8)$$

де m – номер вузлової точки;
h – крок дискретизації;
y_{m-1}, y_m, y_{m+1} – сіткові функції;
y'_{m-1}, y'_m, y'_{m+1} – їхні похідні.

Кінцево-різницева формула (8) пов'язує шукану функцію в $(m - 1)$-му і $(m + 1)$-му вузлах через значення її похідних в $(m - 1)$-му, (m)-му, $(m + 1)$-му вузлах. Спробуємо отримати апроксимуючі формули, розв'язані відносно функцій, тобто такі, що визначають функцію в m-му вузлі через значення її похідних у трьох інших вузлах. Розглянемо метод отримання таких виразів на прикладі рівняння (8).

Для економічних процесів, які характеризуються періодичністю рівняння $y_m(t) = y_m(t + 180)$ як інтервал повторюваності, доцільно прийняти півперіод, що скоротить час розв'язування задачі. Мінімальна кількість вузлів на періоді для тривузлової апроксимації дорівнює чотирьом ($n = 4$). Записуємо рівняння (8) для всіх вузлових точок періоду з урахуванням граничних умов, які для періодичних економічних процесів будуть такі:

$$y_{n+1} = -y_1. \quad (9)$$

Приходимо до такої системи кінцево-різницевих рівнянь:

$$\begin{aligned} -y_1 + y_3 &= \frac{h}{3}\left(y'_1 + 4y'_2 + y'_3\right), \\ -y_2 + y_4 &= \frac{h}{3}\left(y'_2 + 4y'_3 + y'_4\right), \\ -y_3 - y_1 &= \frac{h}{3}\left(y'_3 + 4y'_4 - y'_1\right), \\ -y_4 - y_2 &= \frac{h}{3}\left(y'_4 - 4y'_1 - y'_2\right). \end{aligned} \quad (10)$$

У результаті розв'язання системи різницевих рівнянь (10) відносно вузлових функцій отримаємо

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{h}{3}\left(-2y'_2 - y'_3 - 2y'_4\right), \\ y_2 &= \frac{h}{3}\left(2y'_1 - 2y'_3 + y'_4\right), \\ y_3 &= \frac{h}{3}\left(y'_1 + 2y'_2 - 2y'_4\right), \\ y_4 &= \frac{h}{3}\left(2y'_1 + 4y'_2 + 2y'_3\right), \end{aligned} \quad (11)$$

або у матричній формі

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{vmatrix} = \frac{h}{3} \begin{vmatrix} & -2 & -1 & -2 \\ 2 & & -2 & -1 \\ 1 & 2 & & -2 \\ 2 & 1 & 2 & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Збільшимо кількість вузлів на періоді вдвоє, тобто візьмемо $n = 8$.

Система кінцево-різницевих рівнянь для всіх вузлових точок періоду буде такою:

$$\begin{aligned} -y_1 + y_3 &= \frac{h}{3}\left(y'_1 + 4y'_2 + y'_3\right), \\ -y_2 + y_4 &= \frac{h}{3}\left(y'_2 + 4y'_3 + y'_4\right), \\ -y_3 + y_5 &= \frac{h}{3}\left(y'_3 + 4y'_4 + y'_5\right), \\ -y_4 + y_6 &= \frac{h}{3}\left(y'_4 + 4y'_5 + y'_6\right), \\ -y_5 + y_7 &= \frac{h}{3}\left(y'_5 + 4y'_6 + y'_7\right), \\ -y_6 + y_8 &= \frac{h}{3}\left(y'_6 + 4y'_7 + y'_8\right), \\ -y_7 - y_1 &= \frac{h}{3}\left(y'_7 + 4y'_8 - y'_1\right), \\ -y_8 - y_2 &= \frac{h}{3}\left(y'_8 + 4y'_1 - y'_2\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Систему рівнянь (13) представимо в розгорнутій матричній формі

$$\begin{array}{|c|}\hline y_1\\\hline y_2\\\hline y_3\\\hline y_4\\\hline y_5\\\hline y_6\\\hline y_7\\\hline y_8\\\hline\end{array}=\frac{h}{3}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -2\\\hline 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1\\\hline 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2\\\hline 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 & -1\\\hline 1 & 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 & -2\\\hline 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & & -2 & -1\\\hline 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & & -2\\\hline 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\\hline\end{array}\cdot\begin{array}{|c|}\hline y_1'\\\hline y_2'\\\hline y_3'\\\hline y_4'\\\hline y_5'\\\hline y_6'\\\hline y_7'\\\hline y_8'\\\hline\end{array}. \qquad (14)$$

Покладаючи число вузлів на періоді $n = 4(k + 1)$, де $k = 0, 1, 2, \ldots$, отримаємо різницеве рівняння у векторно-матричній формі

$$\frac{h}{3}\overline{Y} = g\overline{Y'}, \qquad (15)$$

де $\overline{Y} = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)_t$, $\overline{Y'} = \left(y_1', y_2', ..., y_n'\right)_t$ – транспоновані матриці;

$$g = \begin{array}{|c|c|c|c|c}\hline & -2 & -1 & -2 & \\\hline 2 & & -2 & -1 & \\\hline 1 & 2 & & -2 & \\\hline 2 & 1 & 2 & & \\\hline & & & & \end{array} \qquad (16)$$

квадратна матриця розмірності n.

Висновки. Розроблено раціональні способи апроксимації диференціальних рівнянь різницевими при моделюванні економічних процесів, дискретних у часі. Отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначного ускладнення розрахункових формул суттєво скоротити загальне число прораховуваних вузлів і в кінцевому підсумку вимагають менших обчислювальних затрат.

Розв’язання кінцево-різницевих рівнянь підвищеної точності відносно вузлових функцій значно спрощує й полегшує процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу різницевими рівняннями.

Запропонований метод отримання різницевих рівнянь підвищеної точності є загальним і може бути поширений на будь-яку кількість вузлів дискретної сітки.

Список використаної літератури

1. Замков О. О. Математические методы в экономике : учебник / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных ; под общ. ред. д-ра экон. наук., проф. А. В. Сидоровича ; МГУ им. М. В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. – М. : Изд. «Дело и Сервис», 2004. – 268 с.
2. Березин И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М. : Физматгиз, 1992. – Т. 2. – 639 с.
3. Годунов С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М. : Наука, 1993. – 400 с.
4. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1997. – 664 с.
5. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учеб. пособие для вузов / С. И. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ ДАНА, 2010. – 367 с.
6. Ludwig R. Verbesserubg einer Iterationsfolge bei Gleichungssystemen, Z. Angew. Manh. Mech, 2011, 232–234.
7. Luxemburg W. On tye convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations I-III: (I) Canad. Math. Bull., 9–20; (II) Nederl. Acad. Wetensch. Proc., ser. A 61 (indag. Math.), 20, 540–546; (III) Nieuw. Arch. Wisk. (3), 6, 93–98, 2009.
8. Shinbrot M. A fixed point theorem and some applications, Arch. Rational. Mech. Anal., 17 255–271.
9. Schmidt J., Schwetlick H. Ableitungsfreie Verfahren mit hoherer Konvergenzgeschwindigkeit, Computing, 3, 2009, 215–226.
10. Schwartz J. Nonlinear functional analysis, Lecture Notes, Courant inst. Of Math. Sci., New York Univ, 1991.

References

1. Zamkov O., Tolstopyatenko A., Cheremnyh Y. Mathematical Methods in Economics: Textbook / Under total. Ed. Dr. ehkon. Science., prof. AV Sidorovich; MSU. MV Lomonosov. – 3rd ed., Rev. – M. : Publishing House. «Business and Service», 2004. – 268 p.
2. I. Berezin, N/ Zhidkov methods of calculations., – M. : Fizmatgiz, 1992. – T. 2. – with 639.
3. S. Godunov, V. Ryaben’kii Difference schemes. – M. : Nauka, 1993. 400 p.
4. B. Demidovich, I. Maron, Fundamentals of computer mathematics. – M. : Nauka, 1997 – 664 p.
5. Shelobaev S. Mathematical methods and models in economics, finance, business: Studies manual for schools. – M. : UNITY DANA, 2010. – 367 p.
6. Ludwig R. Verbesserubg einer Iterationsfolge bei Gleichungssystemen, Z. Angew. Manh. Mech, 2011, 232–234.

7. Luxemburg W. On tye convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations I–III: (I) Canad. Math. Bull., 9–20; (II) Nederl. Acad. Wetensch. Proc., ser. A 61 (indag. Math.), 20, 540–546; (III) Nieuw. Arch. Wisk. (3), 6, 93–98, 2009.
8. Shinbrot M. A fixed point theorem and some applications, Arch. Rational. Mech. Anal., 17 255–271.
9. Schmidt J., Schwetlick H. Ableitungsfreie Verfahren mit hoherer Konvergenzgeschwindigkeit, Computing, 3, 2009, 215–226.
10. Schwartz J. Nonlinear functional analysis, Lecture Notes, Courant inst. Of Math. Sci., New York Univ., 1991.