УДК 658.511

Оптимізація роботи виробничого підприємства

Королюк Сергій Степанович,
доцент, кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики та інформаційних технологій
Черкаського інституту банківської справи
Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ);
e-mail: sskroll@ukr.net

Анотація. Алгоритм дослідження локального екстремуму функції багатьох змінних може бути використаний для оптимізації роботи виробничого підприємства. За вдалого вибору вигляду виробничої функції, змінними якої є кількісні оцінки наявності ресурсів виробництва, можна визначити її екстремальне значення. Це дає можливість знайти оптимальні витрати використаних ресурсів і розрахувати максимальне значення функції прибутку.
Ключові слова: виробнича функція, прибуток, ресурси, функція прибутку, оптимальний прибуток.
Формул: 20; рис.: 0; табл.: 0; бібл.: 2.

Optimization of the production enterprise operation

Korolyuk Sergey,
Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associated Professor,
Associated professor of Higher Mathematics and Information Technologies Chair,
Cherkasy Institute of Banking
of the University of Banking of the National Bank of Ukraine (city of Kyiv);
e- mail: sskroll@ukr.net

Abstract. The research algorithm of local extremum of many variables function can be used for optimization of productive enterprise's work. With a successful choice of type of productive function the variables of which are the quantity of resources for productive process, it is possible to define its extreme value. It makes it possible to find the optimum charges of the resources needed and calculate the maximal value of the function of profit.
Let a company produces a quantity q of one type of productanduses a number of resources to manufacture it. We'll mark the amount of recourses the company uses to produce the product with $x_1, x_2, \ldots, x_n$, and with $p_1, p_2, \ldots, p_n$ their prices (all p_i are constants). The production costs certainly depend on the output and the dependence can be defined with the function $q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, which expresses the amount of product produced q through resources $x_1, x_2, \ldots, x_n$, used for production. The production function must be differentiable and non decreasing, which means that its partial derivatives are non-negative.
The income of the company for a certain period of time is the product of the total amount of production by its market price p_0. Thus
$$R = p_0 q.$$
The enterprise incurs certain charges using a certain amount of resources. These spending are called general charges and can be calculated from the ratio
$$C = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n.$$
The profit of the enterprise for a certain period of time is the difference between the income received and the cost of production $P = R - C$, that is
$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_0 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n).$$
It is believed that if the company operates in pure competition, it can't influence upon the market prices $p_1, p_2, \ldots, p_n$ that is the company "agrees" with these prices.
The main problem of a multy-resourceful company is that the company tries to maximize the profits through efficient allocation of resources used (in production).
From the point of view of mathematics it means that it is necessary to solve the problem of finding the maximum value of profit function $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Thus the essence of the solution comes to the study of the function of profit in the extreme and determination for which values of a set of resources $(x_1^*; x_2^*; x_n^*)$ the profit function attains its maximal value. The set of resources $(x_1^*; x_2^*; x_n^*)$, which provides maximum profit to the company is called optimal.
Thus the problem of optimization of a manufacturing enterprise is reduced to the study of local extremum of function of many variables.
Keywords: production function, profit, resources, function of profit, optimal profit.
Formulas: 20; fig.: 0; tabl.: 0; bibl.: 2.

Оптимизация работы производственного предприятия

Королюк Сергей Степанович,
доцент, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики и информационных технологий
Черкасского института банковского дела
Университета банковского дела Национального банка Украины (г. Киев);
e-mail: sskroll@ukr.net

Анотация. Алгоритм исследования локального екстремума функции нескольких переменных может быть использован для оптимизации работы производственного предприятия. При удачном выборе вида производственной функции, переменными которой есть количественные оценки наличия ресурсов производства, можно определить ее екстремальное значение. Это дает возможность найти оптимальные затраты используемых ресурсов и расчитать максимальное значение функции прибыли.

Ключевые слова: производственная функция, прибыль, ресурсы, функция прибыли, оптимальная прибыль.
Формул: 20; рис.: 0; табл.: 0; библ.: 2.

Вступ. При виробництві продукції з використанням певного набору ресурсів виникає потреба у визначенні їх кількісного співвідношення з метою отримання максимально прибутку. Якщо припустити, що ціни на використані ресурси і продукцію є фіксованими, таку задачу можливо розв'язати, використовуючи поняття локального екстремуму функції багатьох змінних.

Аналіз досліджень і постановка завдання. Для дослідження виробництва використовується виробнича функція, яку вибирають як функцію Кобба – Дугласа:

$$P = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad (1)$$

де P – обсяг продукції; A – статистичний параметр функції; K – величина виробничого капіталу; L – затрати праці; α і β – показники еластичності випуску продукції щодо затрат капіталу і праці відповідно.

Вона дає змогу врахувати найдоцільнішу комбінацію виробничих ресурсів під час виробництва для отримання максимального прибутку. Однією з її переваг є нелінійність. У цьому разі залежність результату виробництва від затрат має відповідний нелінійний характер, і тому враховує реальні процеси конкуренції, наявність бар'єрів для вільного ціноутворення тощо. Така функція є достатньо простою, а тому і привабливою для практичного застосування в управлінні виробничими ресурсами.

Метою статті є застосування поняття локального екстремуму функції багатьох змінних для аналізу результатів роботи багаторесурсного виробничого підприємства. Розв'язок такої задачі дозволяє визначити максимальний прибуток підприємства та оптимальне співвідношення використаних при цьому ресурсів.

Результати дослідження. Нехай підприємство випускає один вид продукції обсягом q і використовує для його виготовлення певну кількість ресурсів. Позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обсяги різних ресурсів, які підприємство використовує для випуску продукції, а через $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – відповідно їхні ціни (усі p_i – сталі величини). Витрати на виробництво однозначно пов'язані з випуском продукції, і цей зв'язок визначаємо виробничою функцією $q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка виражає обсяг q продукції, яку випускають, через обсяги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ресурсів, які використовуються для виробництва.

Виробнича функція повинна бути диференційованою і є не спадною, що означає, що її частинні похідні – невід'ємні [1].

Дохід R підприємства за певний період часу є добуток загального обсягу продукції на її ринкову ціну. Таким чином,

$$R = p_0 q. \quad (2)$$

Підприємство несе певні витрати, що пов'язані з використанням певного обсягу ресурсів. Такі витрати називають загальними і їх обчислюють із співвідношення

$$C = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_n x_n. \quad (3)$$

Прибуток підприємства за певний інтервал часу – це різниця між одержаним ним доходом і витратами виробництва $P = R - C$, тобто

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_0 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \\ - (p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_n x_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Вважається, що якщо підприємство функціонує в умовах чистої конкуренції, то на ринкові ціни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ воно вплинути не може, тобто підприємство «погоджується» із цими цінами [2].

Основне завдання багаторесурсного підприємства полягає в тому, що підприємство намагається отримати максимальний прибуток шляхом раціонального розподілу ресурсів, які використовуються у виробництві.

Математично це означає, що потрібно розв'язати задачу про знаходження максимального значення функції прибутку $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Таким чином суть розв'язку зводиться до дослідження функції прибутку на екстремум і визначають, за яких значень набору ресурсів $(x_1'; x_2'; x_n')$ функція прибутку набуває свого найбільшого значення. Такий набір ресурсів $(x_1'; x_2'; x_n')$, який забезпечує підприємству максимальний прибуток, називається оптимальним.

Для розв'язку треба обчислити частинні похідні функції прибутку і прирівняти їх до нуля. Отримаємо такі співвідношення:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=\frac{p_1}{p_0},\frac{\partial P}{\partial x_2}=\frac{p_2}{p_0},\ldots,\frac{\partial P}{\partial x_n}=\frac{p_n}{p_0}. \quad (5)$$

Оскільки всі витрати ресурсів строго додатні, то точка $(x_1'; x_2'; x_n')$, яка визначається з останнього співвідношення, є критичною, і умови, які накладаються на виробничу функцію, гарантують, що це точка максимуму. І розв'язок $(x_1'; x_2'; x_n')$ називається оптимальним розв'язком задачі багаторесурсного підприємства.

Розглянемо наведені міркування на прикладі. Нехай задано виробничу функцію, яку виберемо як функцію Коба – Дугласа:

$$f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Тут $f(x, y)$ виражає обсяг виробленої підприємством продукції в певних одиницях, x та y – обсяги ресурсів, які при цьому використовуються. Ринкові ціни продукції в умовних одиницях – $p_0 = 2$. Ціни на використані при цьому ресурси дорівнюють, відповідно, $p_1 = 1$ і $p_2 = 1/2$ умовних грошових одиниць. Потрібно знайти таку комбінацію ресурсів $(x'; y')$, за якої виробнича функція набуває максимального значення. Це означає, що при цьому отримуємо максимальний прибуток від такого виробництва.

У цьому варіанті функція прибутку буде такою:

$$P(x,y)=2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}-x-\frac{1}{2}y. \quad (7)$$

Дослідимо її на локальний екстремум. Для цього обчислимо частинні похідні першого порядку від функції прибутку. Вони дорівнюють

$$P_x'=\frac{2}{3}x^{\frac{-2}{3}}y^{\frac{1}{2}}-1; \quad (8)$$

$$P_y'=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{2}. \quad (9)$$

Ураховуючи необхідні умови існування екстремуму, отримуємо систему рівнянь для знаходження стаціонарних точок функції прибутку (її частинні похідні прирівняємо до нуля). При цьому отримуємо нелінійну систему рівнянь

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-2}{3}}y^{\frac{1}{2}}-1=0; \quad (10)$$

$$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{2}=0. \quad (11)$$

Після спрощень маємо

$$y^{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{1}{3}}; \quad (12)$$

$$\frac{4}{3}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=1. \quad (13)$$

З останнього співвідношення знаходимо невідомі величини

$$x=\left(\frac{4}{3}\right)^3; \quad (14)$$

$$y=\left(\frac{8}{3}\right)^2. \quad (15)$$

Таким чином, стаціонарна точка, в якій функція прибутку може набути екстремального значення, має координати $M(2, 37; 16)$.

Далі перевіримо, чи буде точка $M(2, 37; 16)$ точкою локального максимуму. Скористаємось достатньою умовою існування локального екстремуму та обчислимо частинні похідні другого порядку від функції прибутку. Вони будуть такі:

$$P_{xx}''=-\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{1}{2}}; \quad (16)$$

$$P_{xy}''=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}; \quad (17)$$

$$P_{yy}''=-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{2}}. \quad (18)$$

Тоді обчислимо вираз

$$\Delta(x,\ y)=P_{xx}''P_{yy}''-(P_{xy}'')^2 \quad (19)$$

і оцінимо його знак у стаціонарній точці M:

$$\Delta(M)=\frac{2}{9}x^{\frac{-4}{3}}y^{-1}>0. \quad (20)$$

З виразу видно, що за будь-яких додатних значень координат (обсягу використаних ресурсів) стаціонарної точки він є додатним. Ураховуючи, що $P_{xx}''=(M)<0$, тому в критичній точці функція прибутку досягає локального максимуму, значення якого дорівнює

$P_{\max}(2{,}37;\ 16) = 4{,}45.$

Таким чином, при створенні математичних моделей виробничого підприємства використання поняття локального екстремуму функції багатьох змінних дозволяє оптимізувати витрати ресурсів і прогнозувати оптимальний прибуток.

Список використаної літератури

1. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ, 1998.
2. Грисенко М. В. Математика для економістів. Методи й моделі, приклади й задачі : навч. посібник / М. В. Грисенко. – К. : Либідь, 2007. – 718 с.

References

1. Kremer N. Sh. (1998). Higher Mathematics for Economists / N. Sh. Kremer. M. : ЮНИТИ.
2. Grisenko M. V. (2007). Mathematics for Economists / M. V. Grisenko. Methods and Models, Examples and Exercises: Students' Textbook. K. : Либідь.