УДК 519.81:621.372

# Зниження обчислювальної складності в задачі нелінійного програмування великої розмірності

**Засядько Аліна Анатоліївна,**
професор, доктор технічних наук,
професор кафедри вищої математики та інформаційних технологій
Черкаського інституту
ДВНЗ «Університет банківської справи»;
e-mail: sagitta@bigmir.net

**Анотація.** Для зменшення обчислювальної складності при розв'язуванні задач нелінійного програмування великої розмірності пропонується використовувати багатокритеріальну оптимізацію. Цільова функція, яка задається у формі нелінійної схеми компромісів, дозволяє класифікувати обмеження задачі за ступенем конфліктності. Це дозволяє додатково спростити задачу, у подальшому не враховуючи неконфліктні критерії.
**Ключові слова:** обчислювальна складність, задача нелінійного програмування, багатокритеріальна оптимізація, нелінійна схема компромісів.
Формул: 11; рис.: 0; табл.: 0; бібл.: 5.

# Decreasing in computing complexity of high-order problem of nonlinear programming

**Zasyadko Alina,**
Doctor of Engineerings Sciences, Ph.D., Professor,
Professor of Department of Higher Mathematics and Information Technologies
Cherkasy Institute of BU;
e-mail: sagitta@bigmir.net

**Abstract.** Decrease in computing complexity of high-order problem of nonlinear programming is reached due to application the multi-criteria optimization. The non-linear schema of compromise is offered to use for equalizing partial criteria that implement the reduction of tensed situation to the calm one are suggested. The numerical implementation on the base of this scheme does not demand additional limitations by the calm criteria though these limitations are necessary by tensed criteria.
**Keywords:** computing complexity, problems of nonlinear programming, multi-criteria optimization, nonlinear schema of compromise.
Formulas: 11; fig.: 0; tabl.: 0; bibl.: 5.

# Снижение вычислительной сложности в задаче нелинейного программирования большой размерности

**Засядько Алина Анатольевна,**
профессор, доктор технических наук,
профессор кафедры высшей математики и информационных технологий
Черкасского института УБД;
e-mail: sagitta@bigmir.net

**Аннотация.** Для снижения вычислительной сложности при решении задач нелинейного программирования высокой размерности предлагается использовать многокритериальную оптимизацию. Целевая функция, заданная в виде нелинейной схемы компромиссов, позволяет классифицировать ограничения задачи по степени конфликтности. Это позволяет дополнительно упростить задачу, не учитывая при решении неконфликтные ограничения.
**Ключевые слова:** вычислительная сложность, задача нелинейного программирования, многокритериальная оптимизация, нелинейная схема компромиссов.
Формул: 11; рис.: 0; табл.: 0; библ.: 5.

**Вступ.** Задачі нелінійного програмування (ЗНП) трапляються у природних і фізичних науках, техніці, економіці, математиці, у сфері ділових стосунків і в науці управління державою [1; 2]. Були розглянуті навіть її застосування у філософії. В економіці розглядається задача про розподіл обмежених ресурсів так, щоб або максимізувати ефективність, або, якщо вивчається споживач, максимізувати споживання. ЗНП, очевидно, відповідає цій схемі. Цільова функція тут може виражати ефективність, яку ми намагаємося максимізувати, тоді як обмеження можуть виражати умови, зумовлені обмеженням ресурсів. Аналогічна цільова функція може бути математичним вираженням споживання. Таким чином, є зв'язок між ЗНП і основною економічною задачею.

**Аналіз досліджень і постановка завдання**. Метод «затрати – ефективність» також укладається в ЗНП. Метод був розроблений для використання при ухваленні рішень в управлінні державою, коли замість функцій прибутку є загальна функція ефективності – добробут. Можлива така постановка ЗНП: мінімізація витрат за умови, щоб ефект був вищий за деякий мінімальний рівень. За обмеженої кількості даних, наявних у розпорядженні різних державних установ, конкретні задачі методу «витрати – ефективність» часто можуть бути добре змодельовані за допомогою нелінійного програмування. Якщо навіть проблема занадто розпливчата для формулювання у формі ЗНП, то часто за допомогою нелінійного програмування вдається отримати перші наближення або ж розв'язати різні її частини.

Згадані ЗНП сконцентровані на задачах про ухвалення рішень. Дійсно, істотна сторона нелінійного програмування полягає в тому, що воно є підмогою індивідуумові – виконавцеві або людині, що приймає державне рішення. Звичайно, досвідчена людина, що приймає рішення, не вважає, що рішення задачі нелінійного програмування безпосередньо – краща відповідь на питання реального світу. Отримане рішення є, природно, лише рекомендованим, і той, що приймає його, повинен досліджувати припущення і точність постановки задачі нелінійного програмування, перш ніж прийняти остаточне рішення. Попри це, багато завдань програмування пройшли перевірку на практиці і вирішення їх, що підказано оптимальною точкою, застосовується майже без яких-небудь змін.

Наведемо властивості задач лінійного програмування (ЗЛП), що є частинним випадком ЗНП.

1. Множина допустимих рішень опукла. Ця множина має кінцеве число вершин, що називаються зазвичай крайніми (кутовими) точками.
2. Множина всіх точок $n$-вимірного простору, в яких цільова функція набуває заданого значення, є гіперплощина (лінія) рівня. Крім того, гіперплощини, що відповідають різним значенням цільової функції, – паралельні.
3. Локальний екстремум також є глобальним екстремумом цільової функції на множині допустимих рішень, тобто не існує локального екстремуму цільової функції, відмінного від глобального екстремуму.
4. Якщо оптимальне значення цільової функції обмежене, то хоча б одна крайня точка множини допустимих рішень є оптимальним рішенням. Крім того, розпочавши з довільної вершини множини допустимих рішень, можна досягти оптимуму за кінцеве число кроків, причому на кожному кроці здійснюється перехід тільки в сусідню вершину. Остаточно ця вершина є оптимальною тоді і тільки тоді, коли значення цільової функції в ній принаймні не менше, ніж значення цільової функції в усіх дотичних вершинах.

Усі ЗЛП стають нелінійними, якщо ввести невизначеність і ризик, якщо вірогідність відповідних величин (наприклад, ціни, можливості постачання і так далі) не існує і якщо функція мети враховує ризик при ухваленні різних рішень.

Транспортна задача стає нелінійною, якщо вартість транспортування одиниці товару залежить від загальної кількості товару, який перевозять. Задача призначення також стає нелінійною, якщо елементи матриці відповідності не є постійними. У цій задачі також можна зіштовхнутися з трудністю, викликаною вимогою цілочисельності.

У довільної ЗНП деякі або всі наведені вище властивості ЗЛП відсутні. Унаслідок цього ЗНП незрівнянно складніша за ЗЛП, і для них не існує загального універсального методу рішення (аналогічного симплексному методу).

Перерахуємо властивості ЗНП, які істотно ускладнюють процес їх рішення в порівнянні із ЗЛП.

1. Множина допустимих планів $D$ може мати дуже складну структуру (наприклад, бути неопуклим або незв'язним).
2. Глобальний максимум (мінімум) може досягатися як усередині множини $D$, так і на її межах (де він, узагалі кажучи, не збігатиметься ні з одним із локальних екстремумів).
3. Цільова функція $f$ може бути такою, що не диференціюється, а це ускладнює використання класичних методів математичного аналізу.

У силу названих чинників ЗНП настільки різноманітні, що для них не існує загального методу рішення.

Розглянемо детальніше один із перерахованих вище чинників, що істотно ускладнює розв'язок ЗНП. При розв'язанні ЗНП великої розмірності для розв'язання економічних задач доводиться мати справу з проблемою багатоекстремальності цільової функції в області обмежень, або, іншими словами, «ефектом лабіринту» [1; 2]. Щоб знайти глобальний екстремум цільової функції, необхідно за допомогою комбінаторного пошуку організувати повний набір усіх екстремумів, що обчислювально є складною процедурою [1; 2].

Багатокритеріальні методи оптимізації дозволяють ефективно розв'язувати задачі досить широкого класу [3–5]. Особливе місце в цих методах займає нелінійна схема компромісів, або згортка А. Н. Вороніна, уведена в [3; 4]. Вона являє собою скалярний критерій особливого вигляду, в який згортаються частинні критерії, і в багатокритеріальній оптимізації відіграє таку саму роль, що й цільова функція в ЗНП.

Відомо, що, на відміну від інших скалярних критеріїв, нелінійна схема компромісів дозволяє знайти розв'язок, який не поліпшується (оптимальний за Парето), а у варіанті опуклих частинних критеріїв – унімодальний (єдиний) розв'язок.

Тому *мета* нашої роботи – зменшити обчислювальну складність ЗНП великої розмірності за допомогою багатокритеріальної оптимізації на основі нелінійної схеми компромісів.

**Результати дослідження. *Постановка задачі.*** Нехай $R^n$ – $n$-вимірний простір векторів $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $g(y)$ і $\varphi(y)$ – задані вектори-функції, визначені на $R^n$:

$$\begin{gathered} y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ g(y) = \{g_1(y), g_2(y), \ldots, g_m(y)\} = 0 \text{ –} \\ \text{обмеження у формі рівностей,} \\ \varphi(y) = \{\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_r(y)\} \geq 0 \text{ –} \\ \text{обмеження у формі нерівностей,} \end{gathered} \tag{1}$$

де $g_i(y)$ і $\varphi_i(y)$ – скалярні функції.

Позначимо через $G$ множину векторів $y$ просторі $R^n$, для яких $g(y) = 0$ і $\varphi(y) \geq 0$, тобто

$$G \equiv \{y;\, g(y) = 0;\, \varphi(y) \geq 0\}.$$

Нехай $F(y)$ – задана скалярна функція. ЗНП полягає у знаходженні вектора $\tilde{y}$ на $R^n$, мінімізуючого функцію $F(y)$ на множині $G$, тобто такого, що

$$F(\tilde{y}) = \min_{y \in G} F(y). \tag{2}$$

Функція $F(y)$ називається цільовою функцією задачі (1).

Якщо в ЗНП функції $F(y)$, $g(y)$ і $\varphi(y)$ – лінійні, то вона називається задачею лінійного програмування (ЗЛП). Задачі оптимального планування, зазвичай, також є ЗЛП.

***Багатокритеріальна модель ЗНП.*** Нехай задана множина можливих розв'язків $Y$, яка складається з векторів $y = \{y_i\}_{i=1}^{n}$ $n$-вимірного евклідового простору. Якість розв'язку оцінюється за сукупність суперечливих частинних критеріїв, що утворюють $s$-вимірний вектор $I(y) = \{I_k(y)\}_{k=1}^{S} \subset F$, який визначений на множині $Y$, і який належить класові $F$ допустимих векторів ефективності. Вектор частинних критеріїв обмежений допустимою областю: $I \in M$.

Для обмежень, що утворюють допустиму область $M$ у формі рівностей $g(x) = 0$, де $x = y$, складемо частинний критерій суми квадратів нев'язок $I_{\text{рівн}} = \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x) \leq m\varepsilon_1^2$.

Для обмежень у формі нерівностей $\varphi(x) \geq 0$ перетворимо обмеження у вигляді нерівностей у рівності за допомогою введення нової змінної $v_i$, що має розмірність $r$:

$$\varphi_i(x) - v_i^2 = 0. \tag{3}$$

Такий підхід використовується для методу множників Лагранжа, при перетворенні умовної задачі оптимізації в безумовну. Для методу множників Лагранжа це перетворення запишемо як

$$I(x, \lambda, v) = F(x) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left[\varphi_i(x) - v_i^2\right] + \sum_{j=r+1}^{r+m} \lambda_j g_j(x);\; j = \overline{1, r+m};\; i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

де задача мінімізації зведеться до розв'язання системи нелінійних рівнянь (СНР) розмірності $2r + m + n$ рівнянь:

$$\frac{\partial I(x)}{\partial \lambda_j} = 0;\; \frac{\partial I(x)}{\partial x_i} = 0;\; \frac{\partial I(x)}{\partial v_l} = 0,\; j = \overline{1, r+m},\; i = \overline{1, n},\; l = \overline{1, r}. \tag{5}$$

Для обмежень у формі нерівностей $\varphi(x) \geq 0$ складемо частинний критерій суми квадратів нев'язок

$$I_{\text{нерівн}} = \sum_{i=1}^{r} \left[\varphi_i(x) - v_i^2\right]^2 \leq r\varepsilon_2^2. \tag{6}$$

Отже, багатокритеріальну задачу для (1) запишемо в такий спосіб:

$$\begin{cases} \min I_1 = F(x);\; 0 \leq I_1 \leq I_{1m}; \\ \text{за } g(x) = 0 \\ \min I_2 = \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x);\; 0 \leq I_2 \leq I_{2m}, \\ I_{2m} = m\varepsilon_1^2; \\ \text{за } \varphi(x) \geq 0 \\ \min I_3 = \sum_{i=1}^{r} \left[\varphi_i(x) - v_i^2\right]^2; \\ 0 \leq I_3 \leq I_{3m},\; I_{3m} = r\varepsilon_2^2. \end{cases} \tag{7}$$

Для векторного критерію $I$, компонентами якого є частинні критерії, кількість перемінних: $r + m + n$, $n$ – розмірність перемінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $m$ – розмір обмежень вигляду рівностей; $r$ – розмір обмежень вигляду нерівностей. Задача зводиться до розв'язування системи нелінійних рівнянь.

Багатокритеріальна задача (7) зводиться до розв'язування однієї задачі оптимізації нелінійної схеми компромісів [3; 4]:

$$I^* = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{I_j}{I_{j\max}}\right)^g} \tag{8}$$

за умові із (7), де $g_j$ – позитивні константи. Коли критерії рівнозначні, $g_j = 1$, $j = \overline{1,3}$. Якщо необхідно ввести пріоритет одних критеріїв над іншими і мати різну чутливість до варіації параметрів задачі, то замість одиниці в чисельнику виразу (8) уводять вагові коефіцієнти $\alpha_j$, на які накладаються обмеження $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j = 1$.

Необхідні умови мінімуму скалярного критерію $I^*$ дають систему кінцевих рівнянь низької розмірності

$$\frac{\partial I^*}{\partial y_i} = 0,\; i = \overline{1, n}. \tag{9}$$

яка зводиться, наприклад, із використанням методу Ньютона до СЛАР.

У роботах [3; 4] показано, що багатокритеріальна модель (8) забезпечує вибір точки розв'язку на множині рішень, оптимальних за Парето (далі – множина *P*), з урахуванням заданих обмежень на припустиму область зміни векторного критерію, якщо безліч *P* належить цій області. Тому для розв'язання багатокритеріальних задач, у яких задані обмеження з формули (7) на компоненти векторного критерію, варто рекомендувати модель (8).

Вкажемо *недоліки* нелінійної схеми компромісів (8), яка складається з частинних критеріїв (7):

- громіздкість рівнянь за великої розмірності;
- якщо розв'язок лежить на обмеженні, то його буде знайдено з погрішністю, хоча і менше від необхідної. За допомогою формули (8) неможливо досягнути принципово точного розв'язку, інакше знаменники доданків будуть обертатися в нуль.

*Переваги* нелінійної схеми компромісів (8):

- система нелінійних рівнянь для згортки Вороніна має розмірність $r + m + n$ рівнянь, у той час як для методу невизначених множників Лагранжа – $2r + m + n$;
- унімодальність згорнутого критерію. Нелінійна схема компромісів за опуклих частинних критеріїв гарантує один дійсний корінь у межах обмежень;
- нелінійна схема компромісів зводить задачу (2) з обмеженнями (1) до опуклої ЗНП, якщо частинні критерії – опуклі.

Після застосування формули (8) скалярну ЗНП (2) можна розв'язувати також як і безумовну задачу оптимізації, але знайти всі значення $\tilde{y}$, за яких $F(\tilde{y}) = \min\limits_{y\in G} F(y)$, і вибрати з них тільки один, який задовольняє обмеженням на частинні критерії. Загальні методи безумовної оптимізації, реалізовані програмно, у цьому варіанті неприйнятні, тому що знаходять локальні мінімуми поза обмеженнями, тому краще користуватися загальними методами і програмами розв'язку ЗНП.

У роботі [5] запропоновано методику, в якій використовується нелінійна схема компромісів для гнучкої адаптації відповідно до напруженості критеріїв, тобто коли $I_i \to I_{im}$. Ця методика дозволяє виявити конфліктні критерії, відсортувати критерії за ступенем конфліктності і в подальшому використовувати тільки конфліктні критерії. Неконфліктні критерії можна не враховувати як такі, що не впливають на результати розв'язку. Тому такий підхід можна використати також для додаткового спрощення початкової задачі (2) з обмеженнями (1). За аналогією з [5] можна стверджувати, що нелінійна схема компромісів може слугувати для класифікації обмежень (1) за ступенем конфліктності. Неконфліктні обмеження не враховуються в подальшому розв'язку задачі (2).

На простому прикладі покажемо алгоритм, на підставі якого ЗНП розв'язується за допомогою багатокритеріальної оптимізації.

**Приклад.** Знайти мінімум цільової функції $F(y)$ за обмеження $\varphi(y)$, $g(y)$:

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2;\ \varphi(y): (y_1 - 2)^2 + (y_2 - 2)^2 \le 2;\ g(y): y_1 + 2y_2 = 4. \tag{10}$$

Задача має два невідомі, два обмеження і тому легко розв'язується за допомогою методу невизначених множників Лагранжа і не вимагає переведення її в більш складний клас багатокритеріальної оптимізації. Однак у загальному варіанті (наприклад, для некоректних задач за великої розмірності) це може виявитися необхідним із висловлених раніше думок. Застосуємо цей метод для отримання розв'язку (10).

$$F^* = y_1^2 + y_2^2 + \lambda_1\left[(y_1-2)^2 + (y_2-2)^2 - 2 - v^2\right] + \lambda_2\left[y_1 + 2y_2 - 4\right];$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_1} = 2y_1 + 2\lambda_1(y_1 - 2) + \lambda_2 = 0;\ \frac{\partial F^*}{\partial y_2} = 2y_2 + 2\lambda_1(y_2 - 2) + 2\lambda_2 = 0;$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_1} = y_1^2 - 4y_1 + 6 + y_2^2 - 4y_2 - v^2 = 0;$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_2} = y_1 + 2y_2 - 4 = 0;\ \frac{\partial F^*}{\partial v} = 2\lambda_1 v = 0;\ \tilde{y} = (0,8; 1,6).$$

Для того, щоб застосувати модель багатокритеріальної оптимізації на основі нелінійної схеми компромісів, потрібно довизначити задачу (10). Тут треба знайти верхні значення критеріїв $I_{i\max}$, тому що значення критеріїв повинні задовольняти умови $0 \le I_i \le I_{i\max}$. Для визначення $I_{1m}$ потрібно знайти максимум (мінімум) цільової функції *F* у заданих межах зміни її аргументів, але відкидаючи всю систему обмежень типу рівностей і нерівностей. З нерівності $(y_1 - 2)^2 + (y_2 - 2)^2 \le 2$ можна визначити область допустимих значень (ОДЗ) аргументів $0 \le y_1 \le 3$, $0 \le y_2 \le 3$. У загальному варіанті ОДЗ аргументів визначимо з технічного завдання реальних ЗНП.

1. Знаходимо $I_{1m}$ в ОДЗ аргументів $0 \le y_1 \le 3$, $0 \le y_2 \le 3$:

$$\max I_1 = y_{1\max}^2 + y_{2\max}^2 = 9 = I_{1m}.$$

2. Знаходимо $I_{2m}$. Обмеження у формі нерівностей утворить частинний критерій (якщо нерівностей багато, то береться їхня сума), і права частина нерівності [2 у нерівності для (10)] визначає їхнє максимальне значення:

$$I_2 = (y_1 - 2)^2 + (y_2 - 2)^2;\ 0 \le I_2 \le I_{2\max} = 2.$$

3. Знаходимо $I_{3m}$. Обмеження у формі рівностей утворить частинний критерій (а якщо рівностей багато, то також береться їхня сума). Права частина нерівності визначає точність, з якою проводитиметься знаходження невідомих. Як було зазначено раніше, не можна знайти за формулою (9) точний розв'язок, тому рівність обчислюватимемо із заданою похибкою:

$$I_3 = y_1 + 2y_2 - 4 \le 10^{-3},\ 0 \le I_3 \le I_{3max} = 10^{-3}.$$

Тому частинні критерії для ЗНП (10) є такими:

$I_1 = y_1^2 + y_2^2$; $0 \le I_1 \le 9$;

$I_2 = [(y_1 - 2)^2 + (y_2 - 2) - v^2]^2$; $0 \le I_2 \le 2^2$;

$I_3 = [y_1 + 2y_2 - 4]^2$; $0 \le I_3 \le (10^{-3})^2$.

4. Згортаємо отримані частинні критерії у скалярний критерій за допомогою формули (9):

$$\min_y I^*(y) = \frac{1}{1-\dfrac{y_1^2+y_2^2}{9}} + \frac{1}{1-\left[\dfrac{(y_1-2)^2+(y_2-2)^2-v^2}{2}\right]^2} + \frac{1}{1-\left[\dfrac{y_1+2y_2-4}{10^{-3}}\right]^2};$$

$$0 \le I_1 \le 9,\ 0 \le I_2 \le 2^2,\ 0 \le I_3 \le \left(10^{-3}\right)^2 \tag{11}$$

$$\text{або } 0 \le y_1^2 + y_2^2 \le 9;\ 0 \le \left[\left(y_1-2\right)^2 + \left(y_2-2\right)^2\right]^2 \le 2^2;\ 0 \le \left[y_1 + 2y_2 - 4\right]^2 \le \left(10^{-3}\right)^2.$$

Знаходимо розв'язок (11). Цей розв'язок буде наближеним. Наприклад, замість уже отриманих точних значень $\tilde{y} = (0{,}8; 1{,}6)$ методом невизначених множників Лагранжа за допомогою оптимізаційних програм можна одержати $\tilde{y} = (0{,}799993259; 1{,}60000337)$. Якщо важлива точність, то цей розв'язок можна взяти як початкове наближення й уточнити відомими методами. Зауважимо, що оптимізаційні програми для розв'язку ЗНП, зазвичай, самі одержують наближений розв'язок $\tilde{y}$.

Визначимо ступінь конфліктності критеріїв нашої задачі [5]. Тоді при розв'язанні (11) значення критеріїв будуть такі:

$$I_1 = 3{,}2;\ I_2 = -7{,}2 \times 10^{-6};\ I_3 = 2{,}81 \times 10^{-9}.$$

Критерії $I_2$, $I_3$ конфліктують із критерієм цільової функції $I_1$, спростити початкову задачу (10) зменшенням кількості критеріїв неможливо.

**Висновки.** Представлення ЗНП великої розмірності складнішою багатокритеріальною задачею виправдане зниженням обчислювальної складності задач ЗНП через регуляризацію некоректної задачі і зменшення її розмірності. По суті, отримана багатокритеріальна модель ЗНП є квазіаналогом відносно ЗНП. Можна стверджувати, що здійснюється редукція ЗНП великої розмірності в ЗНП меншої розмірності, яку можна розв'язувати звичайними оптимізаційними методами.

**Список використаної літератури**


1. Черноруцкий И. Г. Оптимальный параметрический синтез / И. Г. Черноруцкий. – Л. : Энергоатомиздат, 1987. – 126 с.
2. Юдин Д. Б. Число и мисль / Д. Б. Юдин, А. Д. Юдин. – М. : Знание, 1985. – Вып. 8. – 192 с.
3. Векторная оптимизация динамических систем / А. Н. Воронин, Ю. К. Зиатдинов, О. И. Козлов, В. С. Чабанюк ; под ред. А. Н. Воронина. – К. : Техніка, 1999. – 284 с.
4. Воронин А. Н. Многокритериальный синтез динамических систем / А. Н. Воронин. – К. : Наук. думка, 1992. – 160 с.
5. Засядько А. А. Два этапа в методике гибкой адаптации в задачах многокритериальной оптимизации / А. А. Засядько // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2002. – № 2. – С. 14–17.


**References**


1. Chernorutskiy, I. G. (1987). Optimalnyiy parametricheskiy sintez [Optimum self-reactance synthesis]. Leningrad : Energoatomizdat, 126.
2. Yudin, D. B., Yudin, A. D. (1985). Chislo i myisl [Number and idea]. Issue 8. Moskva : Znanie, 192.
3. Voronin, A. N. (Ed.), Ziatdinov, Yu. K., Kozlov, O. I., Chabanyuk, V. S. (1999). Vektornaya optimizatsiya dinamicheskih sistem [Vectorial optimization of the dynamic systems]. Kyiv : Tehnika, 284.
4. Voronin, A. N. (1992). Mnogokriterialnyiy sintez dinamicheskih sistem [Multicriterion synthesis of the dynamic systems]. Kiev : Nauk. dumka, 160.
5. Zasyadko, A. A. (2002). Dva etapa v metodike gibkoy adaptatsii v zadachah mnogokriterialnoy optimizatsii [Two stages in the method of flexible adaptation in the tasks of multicriterion optimization]. Journal of Cherkasy State Technological University, 2, 14–17.