УДК 330.3:330.46

МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Циганчук Роман Олегович,
аспірант
ДВНЗ «Університет банківської справи»
e-mail: tsyhanchuk@gmail.com

Анотація. Досліджено модель вирівнювання цін за рівнем активу. Розглянуто математичне моделювання і комп'ютерну симуляцію періодичних економічних процесів, дискретних у часі. Наведено методологію заміни диференціальних рівнянь різницевими. Розв'язання та аналіз виконано двома чисельними способами: методом невизначених коефіцієнтів і розв'язанням крайової задачі.
Ключові слова: неперервний час, дискретний час, математична модель, вузлова функція, економічна динаміка, періодичність.

Формул: 19; рис.: 2; табл.: 0; бібл.: 3.

MODELLING OF PERIODIC ECONOMIC PROCESSES

Tsyhanchuk Roman,
Postgraduate Student
of SHEI «Banking University»
e-mail: tsyhanchuk@gmail.com

Annotation. The model of an equation of prices on asset level is investigated. Mathematical modelling and computer simulation of periodic economic processes discrete in time are considered. The methodology of replacement of the differential equations is described. The decision and the analysis are made in two numerous ways: by the method of uncertain coefficients and solution of a boundary problem.
In economic dynamics, continuous and discrete time is used. The continuous time is convenient for simulation as allows using the device of differential calculus and differential equations. The discrete time is convenient for the handling of applied problems whereas the statistical data is always discrete and belong to the specific units of time. For the discrete time, the device of the difference equations is used. By the way, the familiar models of economic dynamics exist both in the continuous and in the discrete options. In both cases, they have approximately identical accuracy and level of complexity of models is almost the same.
Keywords: continuous time, discrete time, mathematical model, nodal function, economic dynamics, periodicity.

Formulas: 19; fig.: 2; tabl.: 0; bibl.: 3.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Цыганчук Роман Олегович,
аспирант
ГВУЗ «Университет банковского дела»
e-mail: tsyhanchuk@gmail.com

Аннотация. Исследована модель выравнивания цен по уровню актива. Рассмотрены математическое моделирование и компьютерная симуляция периодических экономических процессов, дискретных во времени. Приведена методология замены дифференциальных уравнений разностными. Решение и анализ выполнен двумя многочисленными способами: методом неопределенных коэффициентов и решением краевой задачи.
Ключевые слова: непрерывное время, дискретное время, математическая модель, узловая функция, экономическая динамика, периодичность.

Формул: 19; рис.: 2; табл.: 0; библ.: 3.

Вступ. Економічна наука включає як необхідні інструментальні засоби математичні методи і моделі. Їх використання дає змогу формалізувати найважливіші зв'язки економічних систем і на цій основі проводити їх аналіз, здійснювати прогнозування та оптимізацію. Математичні й економетричні методи дозволяють отримувати нові знання про економічний об'єкт і його поведінку, оцінити форму і параметри залежностей його змінних [1–3].

Задачі, які розв'язують економічна наука і практика, поділяють залежно від урахування фактору часу, на статичні і динамічні. Статика вивчає стан економічних об'єктів у певний момент часу без урахування зміни їхніх параметрів у часі. У динамічних задачах відображається не тільки залежність змінних від часу, а й їхній взаємозв'язок у часі. Як приклад наведемо залежність динаміки величини основного капіталу від динаміки інвестицій, що, у свою чергу, призведе до зміни обсягу випуску.

В економічній динаміці використовують неперервний і дискретний час. Неперервний час зручний для моделювання, оскільки дає змогу використовувати апарат диференціального числення і диференціальних рівнянь. Дискретний час зручний для розв'язання прикладних задач, оскільки статистичні дані завжди дискретні і їх відносять до конкретних одиниць часу. Для дискретного часу використовується апарат різницевих рівнянь. До речі, відомі моделі економічної динаміки існують як у неперервному, так і в дискретному варіантах. В обох випадках вони мають приблизно однакову точність і рівень складності самих моделей практично однаковий.

Аналіз останніх наукових досліджень. Моделювання економіки – розділ економічної науки, що займається аналізом властивостей і рішень математичних моделей економічних процесів. У деяких випадках ці моделі можуть розглядатись як частина математичної теорії на стику з економічною наукою. Моделювання економіки відділяється зазвичай від економетрики, що займається статистичною оцінкою й аналізом економічних залежностей і моделей на основі вивчення емпіричних даних. У моделюванні економіки досліджуються теоретичні моделі, засновані на певних формальних передумовах (лінійність, опуклість, монотонність і подібні залежності, конкретні формули взаємозв'язку величин). Моделювання економіки, узагалі кажучи, не займається вивченням ступеня обґрунтованості того, що дана залежність має той чи інший вид (наприклад, що величина споживання є лінійною зростаючою функцією доходу), – це залишається для економетрики. Завданням моделювання економіки є вивчення питання про існування рішення моделі, умов її невід'ємності, стаціонарності, наявності інших властивостей. Це зазвичай здійснюється, як і в математиці, шляхом дедуктивного отримання наслідків (теорем) з апріорно зроблених передумов (аксіом).

Зрозуміло, предметна область, методологія та інструментарій економічної науки не вичерпуються підходами моделювання економіки та економетрики – зазвичай в економічних дослідженнях використовуються також методи якісного аналізу, індуктивні, евристичні підходи, що перемежовуються з елементами моделювання економіки та економетрики. Таким чином, моделювання економіки виступає і як самостійний розділ економічної науки, і як один з її інструментів. При цьому розділи моделювання економіки, що досліджувалися раніше в суто теоретичному плані, усе більше стають теоретичною базою та елементами прикладних досліджень.

Серед моделей економіки можна виділити два великі класи – моделі рівноваги в економічних системах і моделі економічного зростання. Моделі рівноваги (наприклад, модельЕрроу – Дебре, модель «витрати – випуск» В. Леонтьєва) допомагають дослідити стани економічних систем, у яких рівнодіюча всіх зовнішніх сил дорівнює нулю. Це, взагалі кажучи, статичні моделі, у той час як економічна динаміка описується за допомогою моделей зростання (модель Харрода – Домара, модель Солоу, моделі магістрального типу та ін.). Ключовим моментом дослідження моделей зростання є аналіз і відшукування траєкторій стаціонарного росту (зростання з постійними, у тому чи іншому сенсі, структурними характеристиками), до виходу на які зазвичай прагне описувана моделлю економічна система. Дослідження траєкторії стаціонарного зростання є одночасно базою для аналізу більш складних типів росту і сполучною ланкою з моделями економічної рівноваги.

Детерміновані моделі передбачають суворі функціональні зв'язки між змінними моделі. Стохастичні моделі допускають наявність випадкових впливів на досліджувані показники і використовують інструментарій теорії ймовірностей і математичної статистики для їх опису.

Більшість економіко-математичних моделей характеризується статичним підходом до вивчення економіки, коли її стан досліджується в заданий момент часу. Під статичною економічною системою розуміємо таку систему, координати якої на досліджуваному відтинку часу можуть вважатися сталими. Відповідно, при формулюванні статичної економіко-математичної моделі припускаємо, що всі залежності належать до одного моменту часу, а система, що моделюється, є незмінною в часі. При цьому ігноруються можливі, а інколи неминучі зміни, оскільки їх урахування не вимагається поставленою метою моделювання.

Крім того, припускаємо, що всі процеси, які протікають у системі, не вимагають для свого аналізу розгортання в часі, оскільки можуть бути з достатнім ступенем точності схарактеризовані незалежними від часу величинами. Тому в статичній моделі час не вводиться явно. Статичні моделі характеризують економічну систему на будь-якому фіксованому моменті часу. Оскільки статичні моделі у формалізованому вигляді не містять фактору часу, вони завжди простіші від динамічних моделей тих самих економічних систем, які тією чи іншою мірою враховують цей фактор.

У практичній діяльності використовують багатогалузеві динамічні моделі розвитку економіки, виробничі функції, теорію економічного зростання.

Диференціальні рівняння знаходять достатньо широке застосування в моделях динамічної економіки, в яких відображається не тільки залежність змінних від часу, а й їхній взаємозв'язок у часі.

Аналіз динамічних систем і їхнє математичне моделювання базуються на чисельних методах розв'язування систем диференціальних рівнянь. Особливе місце серед численних методів розв'язування динамічних моделей із дискретним часом займає метод скінченних різниць. Універсальність, можливість застосування в лінійних і нелінійних задачах роблять метод скінченних різниць найпоширенішим методом із застосовуваних у даний час наближених методів. Але не тільки надзвичайна загальність різницевого методу приваблює дослідників. Мабуть, це найбільш зручний і прозорий чисельний метод, завдяки якому майже завжди можна отримати уяву про шуканий розв'язок.

Мета дослідження. Для зменшення кількості кінцево-різницевих рівнянь, які апроксимують диференціальні рівняння, при збереженні потрібної точності результатів дослідження, варто скористатися апроксимаціями, які враховують не тільки перший член розкладання шуканого рішення в ряд Тейлора, а й наступні його члени. Коефіцієнти таких апроксимацій можна знайти за методом невизначених коефіцієнтів. *Метою роботи* є розроблення раціонального способу, що значно спрощує й полегшує процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу, дискретного в часі, різницевими рівняннями.

Результати дослідження. *Апробація теоретичних результатів на прикладі розв'язування моделі вирівнювання цін за рівнем активу* (де q – рівень активу; s – пропозиція; d – попит; p – ціна).

Зміна рівня активу q' пропорційна різниці між пропозицією і попитом:

$$q' = k(s - d),\ k > 0. \tag{1}$$

Зміна ціни p' пропорційна відхиленню активу q від деякого фіксованого рівня q_0 тобто

$$p' = -m(q - q_0),\ m > 0. \tag{2}$$

Модель вирівнювання цін за рівнем активу є такою:

$$\frac{dq}{dt} = k(s_{(p)} - d_{(p)}), \tag{3}$$

$$\frac{dp}{dt} = -m(q - q_0) = m(q_0 - q). \tag{4}$$

Залежність пропозиції і попиту від ціни записуємо так:

$$s_{(p)} = ap + s_0;\ d_{(p)} = cp + d_0. \tag{5}$$

Для значень $k = 0{,}3$; $m = 0{,}1$; $q_0 = 20$; $a = 20$; $s0 = 10$; $d_0 = 50$; $c = -10$.

Початкові умови: $q_{(0)} = 19$, $p_{(0)} = 2$.

Розв'язок

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = 0{,}3 \cdot \left[(20 \cdot p + 10) - (-10 \cdot p + 50)\right]; \\ \dfrac{dp}{dt} = 0{,}1 \cdot (20 - q); \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = 9 \cdot p - 12; \\ \dfrac{dp}{dt} = 2 - 0{,}1 \cdot q. \end{cases} \tag{7}$$

Кінцево-різницевий метод

Визначення наступного значення невідомого через попереднє значення за заданих початкових умов $q_{(0)} = 19$, $p_{(0)} = 2$ – це розрахунок *перехідного процесу*.

$$\begin{cases} \dfrac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} = 9 \cdot p_n - 12; \\ \dfrac{p_{n+1} - p_n}{\Delta t} = 2 - 0{,}1 \cdot q_n; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + (9 p_n - 12) \cdot \Delta t; \\ p_{n+1} = p_n + (2 - 0{,}1 q_n) \cdot \Delta t. \end{cases} \tag{9}$$

Якщо не фіксувати період *T*, то графічні зображення результатів обчислення виразів (9) за початкових умов будуть такими, як це відображено на *рис. 1*.

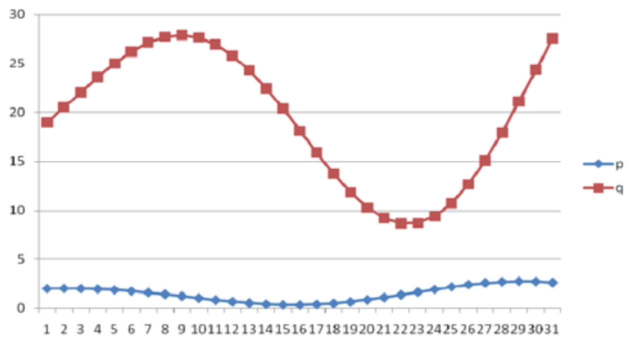

Рис. 1. Результат моделювання вирівнювання цін за рівнем активу (*кінцево-різницевим методом*)

З наведених результатів можна зробити висновок про перехідний процес.

Розв'язання крайової задачі на основі моделі вирівнювання цін за рівнем активу

Різницевий триточковий шаблон для функції $\dfrac{dy}{dt} = f(y;t)$, де y – це q або p, буде такий:

$$-y_{m-1} + y_{m+1} = \frac{h}{3} \cdot (y'_{m-1} + 4y'_m + y'_{m+1}). \tag{10}$$

Тоді

$$-q_{m-1} + q_{m+1} = \frac{h}{3} \cdot \left[9 p_{m-1} - 12 + 4 \cdot (9 p_m - 12) + 9 p_{m+1} - 12\right]; \tag{11}$$

$$-p_{m-1} + p_{m+1} = \frac{h}{3} \cdot \left[2 - 0{,}1 q_{m-1} + 4 \cdot (2 - 0{,}1 q_m) + 2 - 0{,}1 q_{m+1}\right]. \tag{12}$$

Візьмемо 10 точок на періоді,

де $n = 10$ – число вузлів на періоді;

$N = 2$ – число диференціальних рівнянь;

$n \cdot N = 20$ – порядок системи різницевих рівнянь; після чого різницеві рівняння (11) і (12) перетворяться у систему різницевих рівнянь для триточкового шаблону і будуть такими:

$$\begin{cases} -q_1 + q_3 = h\cdot(3p_1 + 12p_2 + 3p_3 - 24); \\ -q_2 + q_4 = h\cdot(3p_2 + 12p_3 + 3p_4 - 24); \\ -q_3 + q_5 = h\cdot(3p_3 + 12p_4 + 3p_5 - 24); \\ -q_4 + q_6 = h\cdot(3p_4 + 12p_5 + 3p_6 - 24); \\ -q_5 + q_7 = h\cdot(3p_5 + 12p_6 + 3p_7 - 24); \\ -q_6 + q_8 = h\cdot(3p_6 + 12p_7 + 3p_8 - 24); \\ -q_7 + q_9 = h\cdot(3p_7 + 12p_8 + 3p_9 - 24); \\ -q_8 + q_{10} = h\cdot(3p_8 + 12p_9 + 3p_{10} - 24); \\ -q_9 + q_{11} = h\cdot(3p_9 + 12p_{10} + 3p_{11} - 24); \\ -q_{10} + q_{12} = h\cdot(3p_{10} + 12p_{11} + 3p_{12} - 24); \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} -p_1 + p_3 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_1 - 0{,}4q_2 - 0{,}1q_3); \\ -p_2 + p_4 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_2 - 0{,}4q_3 - 0{,}1q_4); \\ -p_3 + p_5 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_3 - 0{,}4q_4 - 0{,}1q_5); \\ -p_4 + p_6 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_4 - 0{,}4q_5 - 0{,}1q_6); \\ -p_5 + p_7 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_5 - 0{,}4q_6 - 0{,}1q_7); \\ -p_6 + p_8 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_6 - 0{,}4q_7 - 0{,}1q_8); \\ -p_7 + p_9 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_7 - 0{,}4q_8 - 0{,}1q_9); \\ -p_8 + p_{10} = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_8 - 0{,}4q_9 - 0{,}1q_{10}); \\ -p_9 + p_{11} = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_9 - 0{,}4q_{10} - 0{,}1q_{11}); \\ -p_{10} + p_{12} = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_{10} - 0{,}4q_{11} - 0{,}1q_{12}). \end{cases} \quad (14)$$

Задаємо визначальні величини $Y = (q_1, q_3, p_1, p_3)^t$.

Далі записуємо розв'язки за рекурентними формулами:

$$\begin{cases} p_2 = 2 - \frac{(q_1 - q_3)}{12h} - \frac{(p_1 + p_3)}{4}; \\ p_3 = 2 - \frac{(q_2 - q_4)}{12h} - \frac{(p_2 + p_4)}{4}; \\ p_4 = 2 - \frac{(q_3 - q_5)}{12h} - \frac{(p_3 + p_5)}{4}; \\ p_5 = 2 - \frac{(q_4 - q_6)}{12h} - \frac{(p_4 + p_6)}{4}; \\ p_6 = 2 - \frac{(q_5 - q_7)}{12h} - \frac{(p_5 + p_7)}{4}; \\ p_7 = 2 - \frac{(q_6 - q_8)}{12h} - \frac{(p_6 + p_8)}{4}; \\ p_8 = 2 - \frac{(q_7 - q_9)}{12h} - \frac{(p_7 + p_9)}{4}; \\ p_9 = 2 - \frac{(q_8 - q_{10})}{12h} - \frac{(p_8 + p_{10})}{4}; \\ p_{10} = 2 - \frac{(q_9 - q_{11})}{12h} - \frac{(p_9 + p_{11})}{4}; \\ p_{11} = 2 - \frac{(q_{10} - q_{12})}{12h} - \frac{(p_{10} + p_{12})}{4}; \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} q_2 = 30 - \frac{(q_1 + q_3)}{4} + \frac{15\cdot(p_1 - p_3)}{2h}; \\ q_3 = 30 - \frac{(q_2 + q_4)}{4} + \frac{15\cdot(p_2 - p_4)}{2h}; \\ q_4 = 30 - \frac{(q_3 + q_5)}{4} + \frac{15\cdot(p_3 - p_5)}{2h}; \\ q_5 = 30 - \frac{(q_4 + q_6)}{4} + \frac{15\cdot(p_4 - p_6)}{2h}; \\ q_6 = 30 - \frac{(q_5 + q_7)}{4} + \frac{15\cdot(p_5 - p_7)}{2h}; \\ q_7 = 30 - \frac{(q_6 + q_8)}{4} + \frac{15\cdot(p_6 - p_8)}{2h}; \\ q_8 = 30 - \frac{(q_7 + q_9)}{4} + \frac{15\cdot(p_7 - p_9)}{2h}; \\ q_9 = 30 - \frac{(q_8 + q_{10})}{4} + \frac{15\cdot(p_8 - p_{10})}{2h}; \\ q_{10} = 30 - \frac{(q_9 + q_{11})}{4} + \frac{15\cdot(p_9 - p_{11})}{2h}; \\ q_{11} = 30 - \frac{(q_{10} + q_{12})}{4} + \frac{15\cdot(p_{10} - p_{12})}{2h}; \end{cases} \quad (16)$$

Прирівнюємо наші визначальні величини до 0.

Тепер по два рівняння систем (13), (14), тобто дев'яті і десяті, визначають остачу розв'язку, тобто нев'язки:

$$\begin{cases} \Delta_{11}^0 = h\cdot(3p_9 + 12p_{10} + 3p_{11} - 24) + q_9 - q_{11}; \\ \Delta_{12}^0 = h\cdot(3p_{10} + 12p_{11} + 3p_{12} - 24) + q_{10} - q_{12}; \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \Delta_{21}^0 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_9 - 0{,}4q_{10} - 0{,}1q_{11}) + p_9 - p_{11}; \\ \Delta_{22}^0 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_{10} - 0{,}4q_{11} - 0{,}1q_{12}) + p_{10} - p_{12}. \end{cases} \quad (18)$$

Нульові нев'язки $\Delta_0 = (\Delta_{11}^0, \Delta_{12}^0, \Delta_{21}^0, \Delta_{22}^0)$ після розв'язку систем рекурентних рівнянь будуть такими:

$$\Delta_0 = (-61{,}28006144; -58{,}32972217; 9{,}961630512; 9{,}839955372).$$

Аналогічно знаходимо нев'язки для чотирьох випадків, почергово прирівнюючи одну з визначальних величин до 1, а решту до 0. Після цього формуємо систему рівнянь нев'язок

$$Y = \Delta^{-1}\cdot\Delta_0. \quad (19)$$

Підставивши істинні значення в систему рекурентних рівнянь, проілюструємо отримані результати на *рис. 2.*

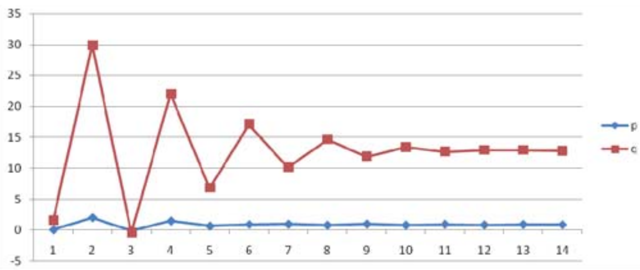

Рис. 2. Результат моделювання вирівнювання цін за рівнем активу (*розв'язання крайової задачі*)

Висновки. Розроблено раціональні способи апроксимації диференціальних рівнянь різницевими при моделюванні економічних процесів, дискретних у часі. Отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначного ускладнення розрахункових формул суттєво скоротити загальне число прораховуваних вузлів і в кінцевому підсумку вимагають менших обчислювальних затрат.

Розв'язання кінцево-різницевих рівнянь підвищеної точності відносно вузлових функцій значно спрощує й полегшує процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу різницевими рівняннями.

Запропонований метод отримання різницевих рівнянь підвищеної точності є загальним і може бути поширений на будь-яку кількість вузлів дискретної сітки.

Чисельне рішення моделі вирівнювання цін за рівнем активу підтвердило високу точність запропонованих кінцево-різницевих рівнянь.

Список використаної літератури

1. Математические методы в экономике : учебник / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. – М. : МГУ, Изд-во «ДИС», 1997. – 453 с.
2. Лотов А. В. Введение в экономико-математическое моделирование / А. В. Лотов. – М. : Наука, 1984. – 283 с.
3. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учеб. пособие для вузов / С. И. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 240 с.

References

1. Zamkov, O. O., Tolstopjatenko, A. V., & Cheremnyh, J. N. (1997). *Matematicheskie metody v jekonomike* [*Mathematical Methods in Economics*]. Moscow : MGU DIS [in Russian].
2. Lotov, A. V. (1984). *Vvedenie v jekonomiko-matematicheskoe modelirovanie* [*Introduction to Economic and Mathematical Modeling*]. Moscow : Nauka [in Russian].
3. Shelobaev, S. I. (2000). *Matematicheskie metody i modeli v jekonomike, finansah, biznese* [*Mathematical methods and models in economics, finance, business*]. Moscow : JuNITI-DANA [in Russian].