УДК 330

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОПИТУ

Циганчук Роман Олегович,
кандидат економічних наук,
викладач кафедри економіки та інформаційних технологій
Львівського навчально-наукового інституту
ДВНЗ «Університет банківської справи»
e-mail: tsyhanchuk@gmail.com; ORCID ID: 0000-0002-8791-6534

Мельник Надія Орестівна,
викладач кафедри економіки та інформаційних технологій
Львівського навчально-наукового інституту
ДВНЗ «Університет банківської справи»
e-mail: nadja87.87@gmail.com; ORCID ID: 0000-0002-5181-4747

Анотація. Розроблено математичну модель споживчого попиту з пом’якшеними вимогами щодо диференційованості функції корисності. Для знаходження необхідної аналізові кількості частинних похідних використано співвідношення між середніми і граничними її величинами.

При моделюванні попиту використовується два основні підходи: за першого підходу використовується побудова функції корисності і карт байдужості; за другого — встановлюється статистичний зв’язок між попитом, доходом і цінами. Функція корисності повинна відповідати вимогам про неперервну зміну її аргументів, неперервність самої функції та існування необхідного числа її похідних. При розв’язуванні практичних задач, пов’язаних із моделюванням попиту, виконання таких вимог не завжди можливе.

У роботі функція корисності представлена як добутки її відношень до аргументів на самі аргументи. Такий підхід усуває проблему знаходження похідних функції корисності і суттєво розширює коло задач, які розв’язуються за допомогою економіко-математичної моделі споживчого попиту.

Ключові слова: функція корисності, середня корисність, гранична корисність, модель попиту.

Формул: 19; рис.: 1; табл.: 0; бібл.: 6.

MATHEMATICAL MODELING OF THE DEMAND

Tsyhanchuk Roman,
Ph. D. in Economics,
Lecturer of the Department of Economics and Informational Technologies
Lviv Educational-Scientific Institution
of SHEI «Banking University»
e-mail: tsyhanchuk@gmail.com; ORCID ID: 0000-0002-8791-6534

Melnyk Nadiia,
Lecturer of the Department of Economics and Informational Technologies
Lviv Educational-Scientific Institution
of SHEI «Banking University»
e-mail: nadja87.87@gmail.com; ORCID ID: 0000-0002-5181-4747

Abstract. Consumer choice is likely to be very likely to be simulated. Consumers make purchases, choosing from different products and taking into account their price, quality and other factors. Today in microeconomic science, for the analysis of consumer behavior, people use a serial approach that does not include quantitative utility measurements. According to this approach, the consumer is able to organize various sets of benefits by the degree of their attractiveness for themselves according to their own preferences system.

The purpose of the study is to construct a model of demand, in which the utility function is presented in the form of products of its relations to sets of goods for sets of goods. This approach eliminates the problem of finding full and partial derivatives of the utility function in its arguments and significantly expands the economic analysis of the consumer demand model.

The mathematical model of consumer demand with the softened requirements concerning the differentiation of the utility function is developed. To find the necessary analysis of the number of partial derivatives, the correlation between the average and its limiting values is used.

In modeling demand, we use two basic approaches: the first approach uses the construction of a utility function and indifference maps; the second approach establishes a statistical connection between demand, income and prices. The utility function must meet the requirements for the continuous change of its arguments, the continuity of the function itself and the existence of the required number of its derivatives. When solving practical problems related to demand modeling, fulfillment of such requirements is not always possible.

In the work, the utility function is presented in the form of the results of its relations to the arguments on the arguments themselves. This approach eliminates the problem of finding derivatives of the utility function and significantly expands the range of tasks that are solved with the help of an economic and mathematical model of consumer demand.

Keywords: utility function, average usefulness, marginal utility, demand model.

JEL Classification C30

Formulas: 19; fig.: 1; tabl.: 0; bibl.: 6.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПРОСА

Циганчук Роман Олегович,
кандидат экономических наук,
преподаватель кафедры экономики и информационных технологий
Львовского образовательно-научного института
ГВУЗ «Университет банковского дела»
e-mail: tsyhanchuk@gmail.com; ORCID ID: 0000-0002-8791-6534

Мельник Надежда Орестовна,
преподаватель кафедры экономики и информационных технологий
Львовского образовательно-научного института
ГВУЗ «Университет банковского дела»
e-mail: nadja87.87@gmail.com; ORCID ID: 0000-0002-5181-4747

Аннотация. Разработана математическая модель потребительского спроса со смягченными требованиями дифференцированности функции полезности. Для нахождения необходимой анализа количества частных производных использованы соотношение между средними и предельными ее величинами. В работе функция полезности представлена в виде произведений ее отношений к аргументам в самые аргументы. Такой подход устраняет проблему нахождения производных функций полезности и существенно расширяет круг задач, решаемых с помощью экономико-математической модели потребительского спроса.

Ключевые слова: функция полезности, средняя полезность, предельная полезность, модель спроса.

Формул: 19; рис.: 1; табл.: 0; библ.: 6.

Вступ. Кожен з нас як споживач щодня стикається з проблемою вибору. Часом ми робимо вибір, не замислюючись, чому він виявився саме таким. Це відбувається ніби підсвідомо. Насправді споживацький вибір піддається досить вірогідному моделюванню. Споживачі роблять покупку, вибираючи з різних товарів і враховуючи їхню ціну, якість та інші фактори.

Сьогодні у мікроекономічній науці для аналізу споживчої поведінки людей успішно використовують порядковий підхід, який не передбачає кількісного вимірювання корисності [1; 2]. Згідно з цим підходом споживач спроможний впорядкувати різні набори благ за ступенем їх привабливості для себе відповідно до власної системи уподобань.

В основі порядкового підходу лежать такі припущення, які інакше називаються аксіомами уподобань:

1) аксіома порівнянності — людина спроможна з двох наборів благ вибрати привабливіший для себе (з двох наборів кращим є набір *A* або набір *B*, або вони рівноцінні);
2) аксіома транзитивності — людина спроможна встановити порядок своїх переваг (якщо набір *A* кращий за *B*, а набір *B* кращий за *C*, то *A* кращий за *C*);
3) аксіома недосяжності насичення — за інших однакових умов споживач завжди надає перевагу більшій кількості блага над меншою його кількістю.

Аналіз досліджень і постановка завдання. При моделюванні попиту використовується два основні підходи: за першого підходу використовується побудова функції корисності і карт байдужості; за другого підходу встановлюється статистичний зв'язок між попитом, доходом і цінами [3—5].

Розглянемо моделі, в яких виражається механізм попиту. Найпростіша модель такого типу є такою: розглядається n товарів, які мають попит серед населення. Модель виражає залежність вектора платоспроможного попиту на ці товари: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з боку споживача від грошових доходів d і вектора цін на ці товари: $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

На вектор попиту накладають такі обмеження: по-перше, невід'ємність його компонент, тобто

$$x_i \geq 0, \text{ за } i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

і, по-друге, якщо не враховувати можливість використання збережень, тоді буде діяти бюджетне обмеження

$$(p,\, x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le d. \qquad (2)$$

Зміст останнього обмеження полягає в тому, що затрати на споживання не можуть перевершувати доходи. Щоб виразити вибір одного значення із множини вектора *x*, яке б задовольняло обмеженням (1) і (2), використовується функція корисності $u(x)$, за допомогою якої поведінку споживача можна представити як прагнення отримати такий набір товарів, який би відповідав найбільшому значенню цієї функції. Що більша величина $u(x)$, то кращий вибір товарів, який міститься у векторі (x). Функція корисності виражає рівень задоволення потреб споживача, який при виборі товарів старається максимізувати цей рівень. Загальний вигляд математичної моделі попиту, основаної на використанні функції корисності, буде таким:

$$u(x) \to \max \text{ за } x \ge 0,\, (p,\, x) \le d. \qquad (3)$$

Відносно функцій корисності прийнято приймати припущення, які дають змогу досліджувати її характерні властивості.

Перш за все припускають, кількість товарів може змінюватись неперервно. Далі припускають, що функція $u(x)$ змінюється неперервно і має всі необхідні частинні похідні. Ці припущення є загальноприйнятими і мають математичну природу [6]. Сформулюємо коротко припущення, які мають економічну основу. По-перше, вважається, що функція корисності зростає при збільшенні кількості товарів, тобто

$$u(x_i^2) \ge u(x_i^1), \qquad (4)$$

як тільки $x_i^2 \ge x_i^1$ де показники 1, 2 характеризують, відповідно, попередній і наступний моменти часу. Властивість (4) можна записати ще таким чином:

$$u'(x_i) = \partial u / \partial x_i \ge 0,\, i = 1, 2, ..., n. \qquad (5)$$

Це означає, що зростання споживання одного продукту за сталого споживання інших продуктів веде до зростання споживчої оцінки і полягає в додатних значеннях перших частинних похідних.

Величини — перших частинних похідних функцій корисності — характеризують граничну корисність *i*-го продукту.

По-друге, гранична корисність кожного продукту зменшується, якщо обсяг його споживання росте (закон спадання граничної корисності). Друга властивість має ознаку від'ємності других частинних похідних по кожному *i*-му продукту:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0. \qquad (6)$$

Третя властивість полягає у тому, що при рості споживання одного продукту гранична корисність кожного продукту збільшується. У такому разі продукт, кількість якого є фіксована, виявляється відносно дефіцитним. Тому додаткова одиниця набуває більшої цінності і може бути спожита більш ефективно. Математично ця властивість означає, що змішані похідні функції корисності додатні і для двох продуктів записуємо її так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} > 0. \qquad (7)$$

Лінії рівня функції корисності називають кривими байдужості. Крива байдужості є ізолінія рівня функції корисності. Множина кривих байдужості називається карткою байдужості.

Поверхня байдужості визначається як множина усіх таких векторів *x*, для яких виконується умова

$$u(x) = c. \qquad (8)$$

Поверхня байдужості є множиною наборів продуктів, які мають однакову вартість для споживача. Вибираючи різні значення сталої *c* у виразі (8), можна побудувати сімейство поверхні байдужості. Це сімейство характеризує вказані вище властивості функції корисності.

Окреслені вище поняття і властивості, пов'язані з функцією корисності, свідчать про важливість застосування методів диференціального числення для їх опису. Цей апарат є не лише інструментом, який дозволяє знаходити розв'язки таких моделей, він є необхідною складовою її будови.

Основне поняття теорії споживання функції корисності $u = u(x_1, x_2)$ повинна задовольняти усі вимоги щодо диференційованості, які пред'являються до будь-яких функцій. Основними з цих вимог є її неперервність і можливість отримати всі необхідні частинні похідні.

За практичного використання моделі попиту не завжди вдається виконати суворі математичні вимоги, зокрема, коли незалежні змінні x_1 та x_2 можуть приймати дискретні значення. Спробуємо розширити діапазон можливостей моделі попиту.

Метою дослідження є побудова моделі попиту, в якій функція корисності представлена у вигляді добутків її відношень до наборів товарів на набори товарів. Такий підхід усуває проблему знаходження повної та частинних похідних функції корисності за її аргументами і суттєво розширює економічний аналіз моделі споживчого попиту.

Результати дослідження. Властивості функції корисності означають, що крива байдужості спадна й опукла вниз. Розглянемо диференціал (головну, лінійну відносно частину приросту) функції корисності для двох продуктів $u(x_1, x_2)$. Традиційно процедура визначення диференціала функції є такою. Якщо рухатись уздовж кривої байдужості, величина функції корисності не зміниться і приріст функції $u(x_1, x_2)$ буде рівний нулю. Буде рівною нулю і його головна лінійна частина, тобто

$$du(x_1,\, x_2) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 = u_1' dx_1 + u_2' dx_2 = 0, \qquad (9)$$

звідки

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{u_1'}{u_2'} < 0. \qquad (10)$$

Залежність від вздовж кривої байдужості є спадною, оскільки її похідна від'ємна. Друга похідна функції $x_2(x_1)$ є такою

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = \frac{u_{11}'' \cdot u_2' - u_1' \cdot u_{21}''}{(u_2')^2} > 0. \qquad (11)$$

Додатний знак другої похідної (11) обумовлений властивостями функції корисності, внаслідок чого криві байдужості опуклі вниз.

Величину u_1' / u_2' називають граничною нормою заміни першого продукту другим.

Якщо в моделі розглядається тільки два продукти, то поверхня байдужості вироджується у криву байдужості, зображення якої на площині показано на *рис*.

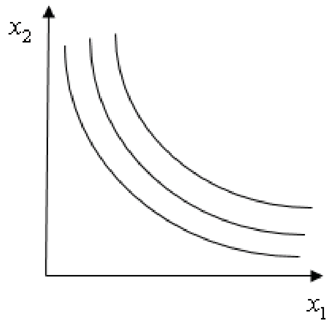

Рис. Крива байдужості

Криві байдужості, відповідні різним рівням задоволення вимог, не дотикаються і не перетинаються.

Вище сказано достатньо для того, щоб зрозуміти, що, навіть без глибокого аналізу моделі попиту, дослідження лише властивостей функції корисності пов'язано з операціями над її похідними і диференціалом. Тому перейдімо до розгляду методики, яка дає змогу уникнути необхідності безпосереднього знаходження похідних функції корисності. З цією метою використаємо співвідношення між середніми і граничними її величинами.

Усі економічні показники прийнято ділити на абсолютні і відносні. Перші виражаються в об'ємних або грошових одиницях, другі являють собою відношення абсолютних показників. Найчастіше економічні показники залежать від багатьох факторів. Тоді доводиться розв'язувати задачі знаходження екстремуму функції декількох змінних, використовуючи методи диференціального числення.

В економіці широко використовуються середні величини (середні витрати, середній дохід, середній прибуток і т. д.), математичною формою яких є відношення функції до свого аргументу або аргументів у випадку функції декількох змінних. Подамо вирази середніх значень функції корисності, залежної від двох аргументів

$$\mu_1 = \frac{u_1(x_1, x_2)}{x_1}, \; \mu_2 = \frac{u_2(x_1, x_2)}{x_2}, \qquad (12)$$

звідки функцію корисності представимо добутком відповідного середнього значення на аргумент

$$u_1(x_1, x_2) = \mu_1 \cdot x_1, \; u_2(x_1, x_2) = \mu_2 \cdot x_2. \qquad (13)$$

Граничну корисність кожного з продуктів отримаємо шляхом диференціювання виразів (13) за відповідними аргументами

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{d}{dx_1}(\mu_1, x_1) = \frac{d\mu_1}{dx_1} \cdot x_1 + \mu_1, \\ u_2' &= \frac{d}{dx_2}(\mu_2, x_2) = \frac{d\mu_2}{dx_2} \cdot x_2 + \mu_2. \end{aligned} \qquad (14)$$

Членам правих частин виразів (14) є середні значення функції корисності, її похідні та аргументи. Уних відсутні похідні функції корисності.

Знайдемо другі похідні цієї функції, диференціюючи кожен вираз (14) за відповідним аргументом. Отримаємо

$$u_1'' = \frac{d^2\mu_1}{dx_1^2} + 2\frac{d\mu_1}{dx_1}, \; u_2'' = \frac{d^2\mu_2}{dx_2^2} + 2\frac{d\mu_2}{dx_2}. \qquad (15)$$

Підставимо (14) у (9) і запишемо вираз диференціалу функції корисності

$$du(x_1, x_2) = \frac{d\mu_1}{dx_1} x_1 dx_1 + \mu_1 dx_1 + \frac{d\mu_2}{dx_2} x_2 dx_2 + \mu_2 dx_2 = 0, \qquad (16)$$

або

$$(\mu_1' x_1 + \mu_1) dx_1 + (\mu_2' x_2 + \mu_2) dx_2 = 0. \qquad (17)$$

Звідси

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\mu_1' x_1 + \mu_1}{\mu_2' x_2 + \mu_2} < 0. \qquad (18)$$

У виразах (17) і (18) для скорочення введемо позначення

$$\mu_1' = d\mu_1 / dx_1, \; \mu_2' = d\mu_2 / dx_2. \qquad (19)$$

Співвідношення (18) є еквівалентом виразу (10) без похідних функції корисності.

Аналогічно підстановкою перших і других похідних (14) і (15) у праву частину другої похідної (11) отримаємо еквівалент залежності x_2 від x_1 від без необхідності знаходження похідних функції корисності.

Отже, дослідження властивостей функції корисності значно спрощується, якщо представити її як добутки середніх значень на аргументи.

Висновки.

1. Існує два підходи до моделювання попиту: перший підхід передбачає побудову функції корисності і карт байдужості; за другого підходу встановлюється статистичний зв'язок між попитом, доходом і цінами.

2. Функція корисності повинна відповідати вимогам про неперервну зміну її аргументів, неперервність самої функції та існування необхідного числа її похідних. При розв'язуванні практичних задач, пов'язаних з моделюванням попиту, виконання таких вимог не завжди можливе.

У роботі функція корисності представлена як добутки її відношень до аргументів на самі аргументи. Такий підхід усуває проблему знаходження похідних функції корисності і суттєво розширює коло задач, які розв'язуються за допомогою економіко-математичної моделі споживчого попиту.

Список використаної літератури

1. Ватаманюк З. Економічна теорія: макро- і мікроекономіка / за ред. З. Ватаманюка та С. Панчишина. — Київ : Альтернативи, 2004. — 606 с.
2. Ватаманюк О. З. Мікроекономіка : навч. посібник / О. З. Ватаманюк. — Львів : «Інтелект-Захід», 2004. — 176 с.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику : пер. с англ. / К. Доугерти. — Москва : ИНФРА-М, 2000. — 200 с.
4. Замков О. О. Математические методы в экономике : учебник / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. — Москва : МГУ ; Изд. «ДИС», 2001. — 365 с.
5. Лотов А. В. Введение в экономико-математическое моделирование / А. В. Лотов. – Москва : Наука. 2004. — 225 с.
6. Красс М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. — Москва : ДЕЛО, 2000. — 715 с.

References

1. Vatamaniuk, Z. (2004). *Ekonomichna teoriia: makro- i mikroekonomika [Economical Theory: Macroeconomics].* Z. Vatamanyuk, S. Panchishin (Eds.). Kyiv: Alternatives [in Ukrainian].
2. Vatamaniuk, O. Z. (2004). *Mikroekonomika [Microeconomics]*. Lviv: «Intelekt-Zakhid» [in Ukrainian].
3. Dougerti, K. (2000). *Vvedenie v ekonometriku [Introduction to Econometrics]*. Moscow: INFRA-M [in Russian].
4. Zamkov, O. O., Tolstopyatenko, A. V., & Cheremnyh, Yu. N. (2001). *Matematicheskie metody v ekonomike [Mathematical methods in economics]*. Moscow: MGU ; Izd. «DIS» [in Russian].
5. Lotov, A. V. (2004). *Vvedenie v ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie [Introduction to economic and mathematical modeling]*. Moscow: Nauka [in Russian].
6. Krass, M. S., & Chuprynov, B. P. (2000). *Osnovy matematiki i ee prilozheniya v ekonomicheskom obrazovanii [Foundations of Mathematics and its Applications in Economic Education]*. Moscow: DELO [in Russian].