УДК 511:378.147

Т. В. Дідківська,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
І. А. Сверчевська,
кандидат педагогічних наук, доцент
(Житомирський державний університет імені Івана Франка)
iryna_sver@ukr.net

СТЕПЕНЕВІ СУМИ В ІСТОРИЧНИХ ЗАДАЧАХ

Історію математики розглянуто як інтеграційну основу навчання курсу алгебри майбутніх учителів математики. Серед різних підходів до використання історії математики вибрано визначні задачі на обчислення степеневих сум чисел натурального ряду. До кожної задачі запропоновано історичну довідку, яка дає можливість зацікавити задачею, розвиває творчі здібності, породжує мисленеву активність студентів. Рекомендовано використовувати геометричні методи, які роблять розв'язання наочним, цікавим і зрозумілішим.

Ключові слова: *степенева сума, геометрична алгебра, геометричні методи, історична задача.*

Постановка проблеми. Ми шукаємо можливості пов'язати навчання алгебри з іншими математичними розділами, зокрема історією математики, геометрією, математичним аналізом тощо. Такий зв'язок сприяє підвищенню інтересу до навчання, формує навички пов'язувати методи доведень, підходи до розв'язування задач з різних розділів математики, формує погляд на математику, різні розділи якої забезпечують один одного. Особливу роль в цьому відіграє історія математики як інтеграційна основа навчання математики.

При вивченні системи натуральних чисел в курсі "Алгебра і теорія чисел" необхідно виробити уміння доводити рівності на множині натуральних чисел методом математичної індукції. При цьому розрізняють два випадки: коли результат сумування відомий і коли сума невідома. Перед застосуванням методу математичної індукції необхідно запропонувати гіпотезу щодо шуканої суми. В цьому випадку ми пропонуємо застосовувати методи геометричної алгебри, яка була створена математиками стародавньої Греції. Виникла необхідність створити загальну математичну теорію для дослідження раціональних та ірраціональних чисел. Але після відкриття ірраціональних чисел виявилося, що множина геометричних величин повніша за множину раціональних чисел. Тому стало доцільним побудувати загальне числення на геометричній основі.

Метою статті є розгляд історії математики як інтеграційної основи навчання курсу алгебри майбутніх учителів математики.

Виклад основного матеріалу.

1. Старовинна вавилонська задача. Обчислити суму перших n натуральних чисел $1+2+3+...+n$ [1: 46].

Джерелом вивчення шумеро-вавилонської математики є клинописні таблички. Було знайдено понад 500 000 табличок, 150 табличок містять тексти і розв'язання задач, 200 – числові таблиці. Вони написані приблизно в 1800 – 1600 р. р. до н. е. У клинописних табличках вавилонян міститься спосіб обчислення суми перших n послідовних натуральних чисел $1+2+3+...+n$. Такі суми почали називати трикутними числами, тому що з точок відповідних сумі доданків можна скласти трикутник.

Розв'язання. Трикутні числа 1, 3, 6, … будемо зображати фігурами, складеними з квадратів, у кожному наступному ряду якої на один квадрат більше від попереднього (рис. 1).

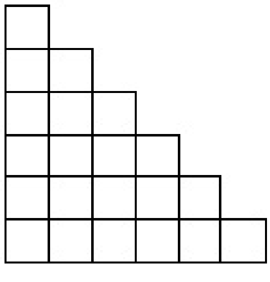

Рис. 1.

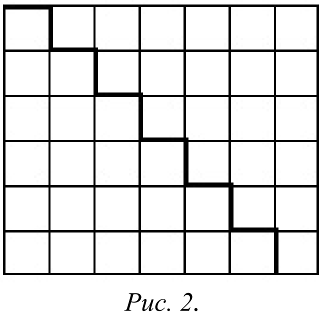

Рис. 2.

Якщо накреслити ще одну таку фігуру і з'єднати їх, як показано на рис. 2, то одержимо прямокутник, сторони якого n та n+1. Всього в прямокутнику $n(n+1)$ квадратів, а кількість квадратів у фігурі, що зображає шукану суму, вдвічі менша. Маємо $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Розв'язування цієї задачі пов'язують з видатним німецьким математиком Карлом Гауссом (1777 – 1855). Розповідають, що він у шестирічному віці відкрив цю формулу. Він записав числа від 1 до 100, суму яких потрібно було знайти, два рази $\begin{array}{l} 1 \ + \ 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 2 + 1 \end{array}$, додав відповідні доданки і помітив, що їх сума дорівнює 101. Помноживши 101 на кількість чисел 100 і поділивши на 2, зробив, таким чином, своє перше відкриття: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Задача Піфагора (близько 580 – 500 до н. е.). Знайти суму послідовних непарних чисел, починаючи з одиниці [2: 11].

Піфагор – давньогрецький математик і філософ. У місті Кротон він організував свою школу, яка діяла майже 30 років. Вчення Піфагора та його учнів стосувалося гармонії, геометрії, теорії чисел, астрономії. Вони вважали, що числа визначають усе. Парні числа вони називали жіночими, а непарні – чоловічими. Непарні числа зображалися фігурами г-подібної форми – "гномонів", які складалися з непарної кількості квадратів (одиниць).

Розв'язання. Квадрат з n^2 клітин можна уявити як такий, що складається з однієї клітинки 1, до якої послідовно додаються "гномони" з 3, 5, 7 і т. д. клітин, тоді одержимо $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

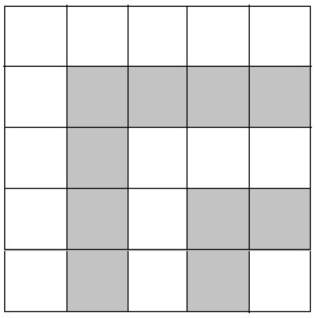

Рис. 3.

3. Задача Архімеда (близько 287 – 212 до н. е.). Знайти суму квадратів n перших чисел натурального ряду $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ [2: 13].

III століття до н. е. ввійшло в історію математики під іменем "золотого століття". Найвидатнішим ученим цього часу був Архімед Сіракузький. Життя його овіяно легендами, але його вважають, насамперед, математиком. Архімед розвинув ідеї, закладені його попередниками – це обчислення площ і об’ємів різних фігур. Найвидатніші його роботи: "Квадратура параболи", "Про кулю і циліндр", "Про спіралі", "Про коноїди і сфероїди", "Вимірювання круга", де він не просто розв’язав задачі, а передбачив основні розділи вищої математики – інтегральне та диференціальне числення. В роботі "Про спіралі" Архімед наводить геометричне розв’язання задачі, яка нами розглядається.

Розв'язання. "Якщо взято лінії в якій завгодно кількості та кожна перевищує наступну на надлишок, який дорівнює меншій з усіх, і якщо взято в тій же кількості, як і перші, другі лінії, з яких кожна дорівнює більшій з ліній першого ряду, то сума всіх квадратів на лініях, рівних більшій, додана до квадрата на більшій і додана до площі, яка міститься між меншою лінією і лінією, що складається з усіх нерівних ліній, дорівнює потроєній сумі квадратів, побудованих на нерівних лініях" (рис. 4).

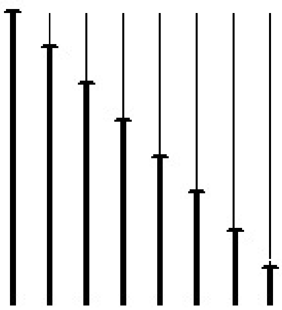

Рис. 4.

У сучасних позначеннях, прийнявши за одиницю довжину найменшого відрізка, маємо: $n \cdot n^2 + n^2 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$. Застосувавши формулу для суми арифметичної прогресії маємо: $n^2(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}=3\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)$, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}=3\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)$. Звідки одержуємо шукану формулу: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Для коментарів методу Архімеда використаємо прямокутну числову таблицю, в якій n рядків і (2n+1) стовпців [1: 50]. У кожному стовпці зверху вниз ідуть числа натурального ряду, починаючи з одиниці (рис. 5).

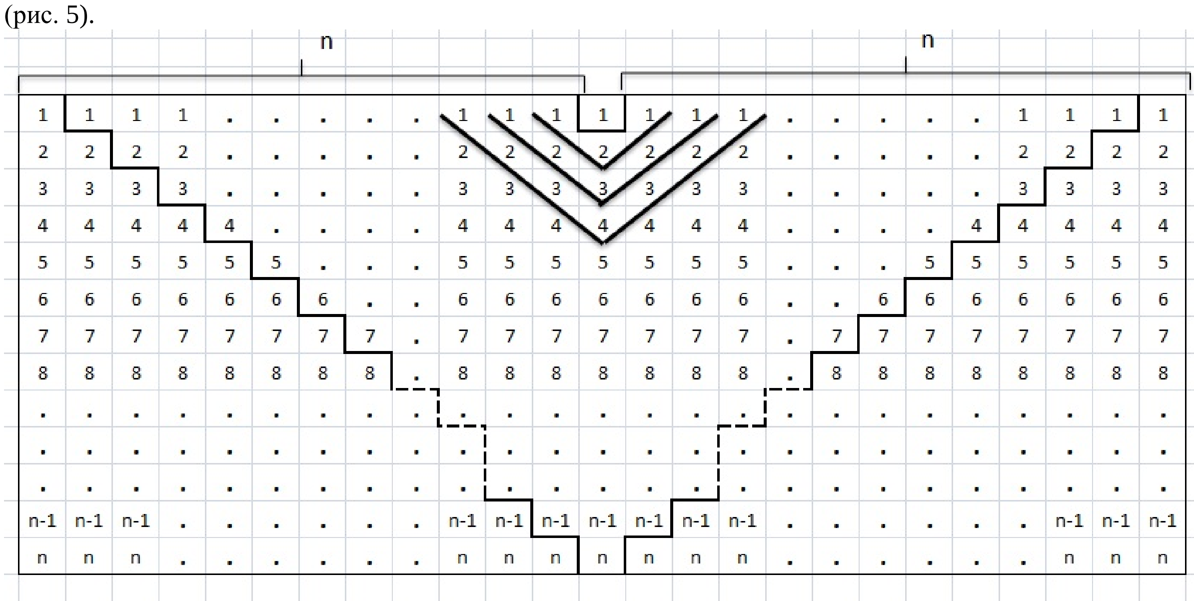

Рис. 5.

Сума чисел кожного стовпця $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Усіх стовпців (2n+1), то сума всіх чисел в таблиці дорівнює $\frac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

Обчислимо суму всіх чисел в таблиці іншим способом. Для цього розділимо таблицю ламаною лінією на три частини (рис. 5). Кількість чисел в лівій і правій частині, які розташовані під ламаною лінією, рівні. Обчислимо суму чисел кожної із частин:

$1+(2+2)+(3+3+3)+(4+4+4+4)+\ldots+(n+n+\ldots+n)=1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2$. Знайдемо суму чисел над ламаною таким способом: $1+(1+2+1)+(1+2+3+2+1)+\ldots+(1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+3+2+1)$. Для перетворення кожного доданка використаємо тотожність:

$(1+2+3+\ldots+(n-1)+n)+(1+2+3+\ldots+(n-1))=n^2$, яку легко довести на основі формули для суми членів арифметичної прогресії. Отримаємо, що сума всіх чисел, над ламаною лінією дорівнює $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ і є такою ж, як і суми в лівій і правій частині таблиці під ламаною лінією. Отже, маємо суму всіх чисел таблиці: $3\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)$.

Порівнявши результати першого і другого способу підрахунку чисел в таблиці, маємо формулу: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}=3\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)$. Тобто доведено ту ж рівність, що і в методі Архімеда.

4. Задача. Знайти суму кубів перших n натуральних чисел $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$.

До цієї задачі в історії математики поверталися математики різних часів. Індійський математик Апастамба (VI або V ст. до н. е.) – автор трактату "Сульва-сутри", який є найстародавнішою пам’яткою індійської математики. Він знав правило обчислення суми кубів чисел натурального ряду на геометричній основі. Подамо його розв’язання [3: 25].

Використаємо таблицю множення натуральних чисел (Піфагорова таблиця). Розглянемо гномони, які утворилися (рис. 6)

1	2	...	n
2	2*2	...	2n
...	...	...	...
n	2n	...	n*n

Рис. 6.

Сума чисел у кожному гномоні дає куби послідовних натуральних чисел $1=1^3$, $2+2\cdot 2+2=2^3$, $3+3\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 3+3=3^3$, … Знайдемо суму чисел в останньому гномоні

$$n+2n+...+n\cdot n+(n-1)n+...+2n+n=n(1+2+...+n)+n(1+2+...+(n-1))=$$

$=n((1+2+...+n)+(1+2+...+(n-1)))=n\cdot n^2=n^3$. Маємо: сума чисел у таблиці, обрахована за допомогою гномонів, дорівнює: $S=1^3+2^3+3^3+...+n^3$. Обчислимо цю суму, додаючи числа по рядках:

$(1+2+3+...+n)+2(1+2+3+...+n)+...+n(1+2+3+...+n)=(1+2+3+...+n)^2$. Отже, одержуємо: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$, або $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

У І ст. цю формулу довів видатний індійський математик Аріабхата І (476 – 550). Його діяльність відкриває золоте століття індійської математики. В трактаті "Арабхатіам", написаному у віршах, він наводить правила сумування рядів трикутних, квадратних та кубічних чисел.

Давньогрецький математик Нікомаха з Герази жив між 30 і 150 р. р. до н. е., або, як вважають деякі історики, у І ст. н. е., відомий як автор "Вступу до арифметики". Найбільш цікавим у цій книзі є сумування числових рядів, доведення, що кубічні числа є сумою послідовних непарних чисел. Так $1^3=1$, $2^3=3+5$, $3^3=7+9+11$ тощо. Це твердження пізніше було використане для визначення суми кубів перших натуральних чисел.

В уривку з Арцерианського кодексу (римський рукопис VI або VII століття), який приписують римським геометрам Епафродиту та Вітрувію Руфу, сумуються куби натуральних чисел. При розв'язанні використовується твердження Нікомаха: куб числа n є сума послідовних непарних чисел від (n^2-n+1) до (n^2+n-1) [2: 18].

На початку XI ст. з'явилися твори багдадського математика ал-Караджи. В алгебраїчному трактаті "Аль-Фархі" наводяться вирази для суми квадратів і суми кубів натурального ряду чисел. Зокрема розв'язується задача: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$ [3: 31].

Розв'язання.

Розглянемо квадрат, сторона якого дорівнює $1+2+3+...+n$. Розіб'ємо її на відрізки довжиною $1, 2,..., n$ і на кожному побудуємо гномон (рис. 7).

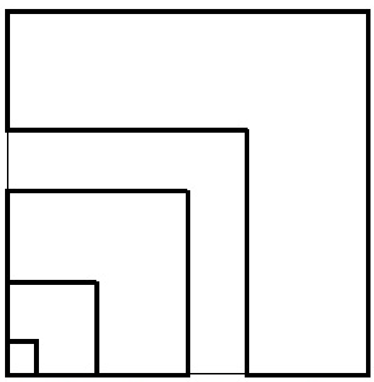

Рис. 7.

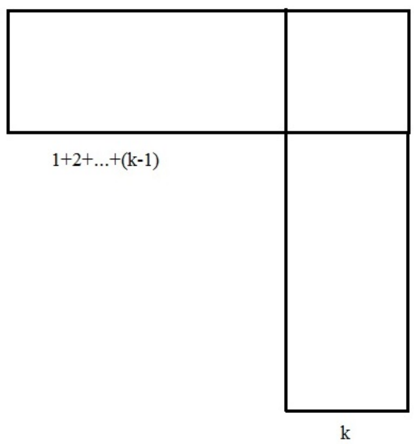

Рис. 8.

Якщо довжина відрізка, на якому побудований гномон, дорівнює k (рис. 8), то квадрат, що розміщено в кутку має сторону k, а кожний із прямокутників має сторони k та $(1+2+\ldots+(k-1))$. Площа гномона: $k^2+2k(1+2+\ldots+(k-1))=k^2+2k\cdot\frac{1+(k-1)}{2}\cdot(k-1)=k^3$.

Маємо, з одного боку площа квадрата дорівнює $(1+2+3+\ldots+n)^2$, а з другого боку, – це сума площ гномонів, тобто $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$. Доведено: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$. Аналогічне доведення дав арабський математик Абу Бекр Махоммед (X – XI ст.).

5. Задача Ібн-ал-Хайсама (965 – 1039). Знайти суму четвертих степенів n перших натуральних чисел $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4$ [3: 31].

Ібн-ал-Хайсам – арабський математик, працював у Каїрі. Його книжка "Оптика" мала великий вплив на розвиток науки в середні віки. Знайшов суму четвертих степенів n перших натуральних чисел $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}\left(6n^5+15n^4+10n^3-n\right)$. Для розв'язання задачі можна використати тотожність $n^5-(n-1)^5=5n^4-10n^3+10n^2-5n+1$ або метод математичної індукції. Пізніше в XV ст. ця формула була знайдена Джемшидом ібн-Масуд-ал-Каши в Самарканді (рік народження невідомий – помер 1429) [1: 25].

З часом було знайдено формули для обчислення п'ятих та подальших степенів n перших чисел натурального ряду. Так, німецький математик Йоганн Фаульгабер (1580 – 1635) у творі "Продовження нового чудового мистецтва" (1617) навів без доведення формули для обчислення суми виду $1^n+2^n+3^n+\ldots$, де $n=1, 2, 3, \ldots, 11$. Зокрема: $1^5+2^5+3^5+\ldots+n^5=\frac{1}{12}\left(2n^6+6n^5+5n^4-n^2\right)$, яку можна довести методом математичної індукції [3: 39]. Відома формула для обчислення суми m-тих степенів n перших чисел натурального ряду:

$$1^m+2^m+\ldots+n^m=\frac{n^{m+1}}{m+1}+\frac{n^m}{2}+\frac{mn^{m-1}}{12}-\frac{m(m-1)(m-2)}{720}n^{m-3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{30240}n^{m-5}$$

(останній доданок n або n^2).

Висновок. При сумуванні чисел натурального ряду ми використовували методи геометричної алгебри. Надалі доцільно використати також інші методи, які виникли в історії математики при подальшому їх розвитку. Також доцільно розповсюдити геометричний метод на обчислення нескінченних сум.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Депман И. Я. Рассказы о решении задач / И. Я. Депман. – Ленинград : Госиздат, 1957. – 128 с.
2. Попов Г. Н. Сборник исторических задач по элементарной математике / Г. Н. Попов. – М.-Л. : ОНТИ, 1938. – 216 с.
3. Баврин И. И. Старинные задачи / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. – М. : Просвещение, 1994. – 128 с.

REFERENCES (TRANSLATED & TRANSLITERATED)

1. Depman I. Ya. Rasskazy o reshenii zadach [Stories about Problems' Solving] / I. Ya. Depman. – Leningrad : Gosizdat. – 1957. – 128 s.
2. Popov G. N. Sbornik istoricheskikh zadach po elementarnoy matematike [Historical Problems of Elementary Mathematics] / G. N. Popov. – M.-L. : ONTI, 1938. – 216 s.
3. Bavrin I. I. Starinnyye zadachi [Ancient Tasks] / I. I. Bavrin, E. A. Fribus. – M. : Prosveshcheniye, 1994. – 128 s.

Матеріал надійшов до редакції 05.02. 2015 р.

Дидковская Т. В., Сверчевская И. А. Степенные суммы в исторических задачах.

История математики рассматривается как интеграционная основа обучения курсу алгебры будущих учителей математики. Среди различных подходов к использованию истории математики выбраны задачи на вычисление степенных сумм чисел натурального ряда. К каждой задаче предложена историческая справка, которая дает возможность заинтересовать задачей, развивает творческие способности, порождает мыслительную активность студентов. Рекомендуется использовать геометрические методы, которые делают решение наглядным, интересным и более понятным.

Ключевые слова: *степенная сумма, геометрическая алгебра, геометрические методы, историческая задача.*

Didkivska T. V., Sverchevska I. A. Sumas of Powers in Historical Problems.

The paper focuses on history of mathematics as an integrative base of teaching algebra to future teachers of mathematics. Among different approaches to the use of history of mathematics we have chosen famous problems which contain calculation sums of powers of natural series. Every problem comes with the historical reference aimed to awake the students' interest to the problem, stimulate their intellectual activity and develop their creative skills. We recommend using geometric methods, which make problem solving more illustrative, interesting and understandable. Geometric calculations of sums of first powers in Babylonian tables are given. Pythagoras of Samos, an Ionian Greek philosopher and mathematician (c. 580 – c. 500 BC), gives the finding of sum of odd numbers. The method of calculation of sums of the second powers was advised by Archimedes, an ancient Greek mathematician, physicist and engineer (c. 287 BC – c. 212 BC). Calculation of sum of the third powers of natural numbers was investigated by Indian mathematicians Apastamba (c. 600 BC), who used gnomon, Aryabhata I (476 – 550 CE) and other mathematicians. In the 1st century this problem was solved by Nicomachus, a Greek mathematician, and by Roman geometers in the 6th or 7th century. In the early 11th century, Al-Karaji, a Baghdadian mathematician, gave the geometric proof of the formula for sum of cubes of natural numbers. Lastly we consider the formula for sum of the fourth powers and the general case of formula for sum of the n^{th} powers. Some problems contain commentaries to the author's solving and historical references.

Key words: *sum of powers, geometric algebra, geometric methods, historical problems.*