УДК 371.56

Одинець Ю.А.

ФОРМУВАННЯ ПОНЯТЬ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

У статті розглянуто наявність багато численних варіантів тлумачення та визначення понять рівняння і нерівності в учнів і що дезорієнтує вчителя у визначенні межі між науково виваженими означеннями та методично виправданими.

Ключові слова: *рівняння, нерівність, тотожність, множина, розв'язання.*

Серед змістових ліній шкільного курсу математики суттєво значущою у математичній підготовці випускника загальноосвітньої середньої школи є лінія рівнянь і нерівностей. І це не випадково, адже по-перше, саме в ній як у фокусі переплітаються практично всі інші змістові ліній курсу; по-друге говорити про належну повноцінну математичну компетентність випускника школи, ВНЗ, як вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати помилку обчислень без групового володіння провідними поняттями лінії рівнянь і нерівностей аж ніяк неможливо.

Аналіз математичної та методичної літератури свідчить про наявність багато численних варіантів тлумачення та визначення понять рівняння і нерівності в учнів і, що не менш важливо, дезорієнтує вчителя у визначенні межі між науково виваженими означеннями та методично виправданими. Мета статті – розглянути деякі з цих означень.

Найбільш поширена точка зору, відповідно до якої тотожність, як рівність, істина, тобто справедлива при всіх допустимих значеннях букв, що входять до неї, протиставляється рівнянню, як рівності справедливої не при всіх допустимих значеннях букв-невідомих.

Якщо прийняти цю точку зору, ми не зможемо відповісти на запитання, що є запис $f(x) = \varphi(x)$ рівняння чи тотожність, поки не визначимо, чи при всіх допустимих значеннях невідомого має місце рівність. Якщо задано, наприклад, рівняння $ax=b$, то відповідно цієї точки зору, при $a=0$ це рівняння, а при $a=b=0$ це вже не рівняння, а тотожність.

Відома інша точка зору, відповідно до якої тотожність не протиставляється рівнянню, а трактується як його окремий випадок. Щоб краще зрозуміти недосконаліть і такого підходу уточнимо все-таки що спільного між поняттями "рівняння" і "тотожність" і чим вони відрізняються.

Тотожність не вид рівняння. Справді, якщо поняття A є видом поняття B, то A повинно мати всі властивості B (наприклад, квадрат є окремим видом прямокутника, тому він має всі властивості прямокутника). А тотожність немає властивостей рівняння. Навпаки, ці два поняття розглядають у різних планах:

1) тотожність доводять, а рівняння розв'язують;

2) тотожності бувають правильні і неправильні, а для рівняння такі терміни не вживають, рівняння бувають рівносильні або нерівносильні;

3) для тотожностей справджується транзитивна властивість (на спільній області визначення виразів A, B, C з тотожностей $A=B$ і $B=C$ неодмінно випливає, що $A=C$), а для рівнянь така властивість не справджується. Тому доведення тотожностей записують ланцюжком, а розв'язуючи рівняння, ланцюжків рівностей не пишуть.

Як бачимо, є багато підстав не вважати тотожність окремим видом рівняння.

Це два різні поняття, хоч та сама рівність може репрезентувати і тотожність, і рівняння, залежно від того, якими словами вона супроводжується.

Розглянемо дві вправи: "При яких значеннях x істинна рівність $\lg x^2 = 2\lg x$?" і "Доведіть, що при кожному додатному x істинна рівність $\lg x^2 = 2\lg x$".

В обох вправах розглядаються однакові рівності, але в першій цю рівність прийнято називати рівнянням, а в другій – тотожністю.

Часто дотримуються функціонального трактування рівняння: "Рівняння з одним невідомим є рівність двох функцій $f_1(x) = f_2(x)$, що розглядається на спільній області їх визначення. Це означення, на наш погляд, також невдале, оскільки функцію можна задавати не лише аналітично, а й графічно, таблично та іншими способами. Тоді як зрозуміти слова "рівність двох функцій"? Слід уточнити цей вислів: "рівність двох функцій, заданих аналітично". Проте і це доповнення не вносить ясності, бо тепер функцією називають не вираз, а деяку залежність (відповідність), і вислів "рівність двох функцій" має зовсім інший зміст.

Слід зауважити, що означення через функцію має ще певні незручності. Пояснимо це прикладом. Розв'язуючи трансцендентне рівняння $(f(x))^{\varphi(x)} = \psi(x)$, за такого підходу інколи втрачають розв'язки. Справді, функція $y = (f(x))^{\varphi(x)}$ за означенням визначена лише для $f(x) > 0$. Тому виключаються випадки, коли $f(x) \le 0$, що призводить до звуження множини розв'язків рівняння. Наприклад, для рівняння $x^{x+1} = x^2$ значення $x=1$, $x=0$ виключаються з множини розв'язків при функціональному визначенні рівняння. Проте за іншим означенням ці значення x є коренями рівняння.

У методичній літературі зустрічається і думка про те, що рівняння – це сама рівність, а лише питання про існування рівності, або про існування значень невідомого, при яких має місце рівність. Ця точка зору помилкова, оскільки ототожнює поняття "рівняння" з поняттям "розв'язати рівняння". Дійсно, розв'язати рівняння – це означає відповісти на запитання, чи існують (а якщо існують, то скільки і які) значення невідомого, які задовольняють рівняння, але при цьому питання про те, що таке саме рівняння, залишається відкритим. З іншого боку, прийняття такої точки зору також ускладнює ситуацію розв'язання завдань міжпредметних зв'язків.

Дійсно, у відповідності з вищезазначеним запис $S = \frac{gt^2}{2}$ не є рівнянням, поки не поставлено запитання про існування значень "невідомих", при яких має місце рівність, проте фізики стверджують, що це – "рівняння вільного падіння тіл".

А. Фуше у своїй "Педагогіці математики" пише: "Рівняння – рівність, яка ще не істина і котру прагнуть зробити істиною, без того, щоб бути впевненим в тому, що це реально". Навряд що саме таке тлумачення що-небудь пояснює.

Запропоновані вище різні трактування загального поняття рівняння (і аналогічно нерівності) (звичайно, включаючи явно некоректні) по суті приписують термінам "рівняння" і "нерівність" різні сутнісні значення. Тому, на наш погляд, недоречно говорити про правильність тієї чи іншої трактовки відповідних понять. Можливо лише вести мову про доцільність або недоцільність (педагогічну) того чи іншого трактування цих понять.

Труднощі, що виникають у зв'язку з пошуками ефективного трактування загальних понять рівняння і нерівності, на нашу думку, обумовлені тим, що ці поняття автори намагалися звести лише до власне математичних. Ці ускладнення знімаються, якщо вийти за межі власне математичних об'єктів у їх класичному розумінні, і використати для трактовки загальних понять рівняння і нерівності деякі поняття сучасної логіки, зокрема поняття логічної функції (предиката).

Розглянемо з цієї точки зору загальні поняття рівняння і нерівності, множини розв'язків, застосування логічних понять до аналізу процесу розв'язання рівнянь, нерівностей та їх систем. Ми викристалізуємо лише загальні основи, на яких може бути побудована конкретна методика вивчення рівнянь та нерівностей.

Зауважимо, що поділ логічних формул на рівняння і нерівності є чисто синтаксичним і не розкриває сутності цих понять. Все, що ми будуємо висвітлювати надалі про рівняння, справедливо і для нерівності.

Що ж представляє собою рівняння $T_1 = T_2$?

Якщо жоден із алгебраїчних виразів T_1 і T_2 не містить змінних, то рівняння $T_1 = T_2$ є істинне або хибне висловлення про рівність (термін "рівність" сприймається лише в розумінні відношення рівності). Так, 3+1=4 істинне висловлення про рівність, а 3+1=5 хибне. Традиційно 3+1=4 та 3+1=5 не відносять до рівнянь. Проте їх віднесення до рівнянь доцільне не лише з логічної точки зору (про це буде висловлено далі), але і з педагогічної. Дійсно розв'язуючи рівняння *x*+3+1=4+*x* та *x*+3+1=5+*x*, ми перетворимо їх у рівносильні їм рівняння 3+1=4 та 3+1=5, і саме у цих випадках учні мають певні ускладнення у визначенні "множини розв'язків".

Особливий інтерес, звичайно, являє випадок коли хоча б один з алгебраїчних виразів T_1 або T_2 містить змінні. У цьому випадку рівняння $T_1 = T_2$ вже являє собою не висловлення, а висловлювальну форму, що визначає деяку логічну функцію числової змінної (або числових змінних).

Рівняння завжди розглядається на якійсь певній множині (область визначення (існування) логічної функції). Підмножина цієї множини, на якій воно перетворюється в істинне висловлення (область істинності логічної функції), називається множиною розв'язків рівняння.

Завдання "розв'язати рівняння" означає вимогу визначити множину розв'язків рівняння.

Цілком очевидно, що множина розв'язків рівняння суттєво залежить від тієї множини, на якій розглядається це рівняння. Так рівняння, $x^2 + x - 6 = 0$ на множині $A = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ не має розв'язків, тобто множина розв'язків порожня: $\left\{ x \middle| x \in A \; i \; x^2 + x - 6 = 0 \right\} = \varnothing$, оскільки жоден з елементів множини *A* не перетворює висловлювальну форму $x^2 + x - 6 = 0$ в істинне висловлювання. На множині натуральних чисел *N* це рівняння має один розв'язок: $\left\{ x \middle| x \in N \; i \; x^2 + x - 6 = 0 \right\} = \{2\}$; на множині цілих чисел *Z* – два розв'язки: $\left\{ x \middle| x \in Z \; i \; x^2 + x - 6 = 0 \right\} = \{-3; 2\}$.

Звичайно на різних етапах навчання ми розв'язуємо рівняння на різних множинах (*N, Z, Q, R*), кожна з котрих на відповідному етапі є універсальною числовою множиною.

Розглянемо розв'язання рівнянь на множині *R*, що допускають важливе геометричне тлумачення.

а) Рівняння з однією змінною на множині *R* визначає відображення $R \to \{I, X\}$, тобто логічну функцію з областю визначення *R* та областю значень $\{I, X\}$. Множина *E* розв'язків цього рівняння – підмножина *R* $(E \subseteq R)$.

Геометрично дійсне число – точка прямої, а множина *R* – множина всіх точок прямої або пряма. Множина *E* – підмножина точок прямої, а кожний розв'язок – точка прямої.

б) Рівняння з двома змінними – двомісна висловлювальна форма, що визначає на множині R_2 всі можливі пари дійсних чисел або відображення $R_2 \to \{I, X\}$. Множина *E* розв'язків цього рівняння – підмножина R_2 $(E \subseteq R_2)$, а кожний розв'язок – пара дійсних чисел.

Геометрично кожна пара дійсних чисел – точка площини, а R_2 – множина всіх точок площини або площина. Множина E – підмножина точок площини, а кожний розв'язок – точка площини.

в) Рівняння з трьома змінними – тримісна висловлювальна форма, що визначає на множині R_3 всі можливі трійки дійсних чисел або відображення $R_3 \to \{I, X\}$. Множина E розв'язків цього рівняння – підмножина R_3 $(E \subseteq R_3)$, а кожний розв'язок – трійка дійсних чисел.

Геометрично кожна впорядкована трійка дійсних чисел – точка простору, а R_3 – множина всіх точок простору або простір (тривимірний). Множина E – підмножина точок простору, а будь-який розв'язок – точка простору.

г) Шлях до подальшого узагальнення відкритий. Рівняння з n змінними $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n = b$, де $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, b$ – певні дійсні числа, а $x, x^2, x^3, ..., x^n$ – змінні з множини дійсних чисел, презентує собою n-місну, висловлювальну форму, що визначає n-місний предикат на множині R_n всеможливих наборів з n дійсних чисел або відображення $R_n \to \{I, X\}$.. Множина E розв'язків цього рівняння – підмножина R_n $(E \subseteq R_n)$,а кожний розв'язок – упорядкована система з n дійсних чисел.

Зручно і тут скористатися геометричною мовою. Кожний набір (упорядкована система) з n дійсних чисел дійсних чисел називається точкою n-мірного простору, тоді R_n – множина всіх точок n-мірного простору або n-мірний простір. Множина E у цьому випадку – підмножина точок n-мірного простору або n-мірний вектор.

Позначимо рівняння $f(x) = \varphi(x)$, що розглядається на деякій множині A, через $L(x)$, тобто $L(x)$ – логічна функція (одномісний предикат) з областю визначення A. Тоді множина E розв'язків рівняння $L(x)$ запишеться так $E = \{x | x \in A \ i \ L(x)\}$.

Нехай на множині A визначено два рівняння $L(x)$ і $L_1(x)$. Виходячи із загального розуміння відношення слідування між предикатами, одержимо наступне тлумачення цього відношення між рівняннями: рівняння $L_1(x)$ є наслідком рівняння $L(x)$, якщо $L_1(x)$ перетворюється в істинне висловлення при всіх тих значеннях $x \in A$, при яких $L(x)$ перетворюється в істинне висловлення, тобто якщо істинне висловлення $\forall x(L(x) \to L_1(x))$. Природно, виникає питання, в якому відношенні знаходяться у цьому випадку множини розв'язків цих рівнянь. З означення слідування отримаємо, що $E \subseteq E_1$.

Якщо кожне з двох рівнянь є наслідком іншого, тобто якщо істинне висловлення $\forall x[(L(x) \to L_1(x))\, i\, (L_1(x) \to L(x))]$, то ці рівняння еквівалентні, або рівносильні, тобто істинне висловлення $\forall x(L(x) \Leftrightarrow L_1(x))$. Це означає, що $E \subseteq E_1$ і $E_1 \subseteq E$, тобто $E = E_1$.

Таким чином, рівняння $L(x)$ і $L_1(x)$ рівносильні тоді і тільки тоді, коли множини їх розв'язків співпадають.

Простота запропонованої теорії рівнянь та нерівностей очевидна у її застосуваннях, зокрема при зведенні складних рівнянь та нерівностей до більш простих, визначення множини розв'язків перших через множину розв'язків останніх, системи рівнянь і т.п. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 1

Відношення еквівалентності рівнянь з точки зору запропонованого підходу зводяться до логічного відношення еквівалентності. Цим по суті ми і користуємося у процесі розв'язання рівнянь і нерівностей. Наприклад, розв'язуючи рівняння $(x+5)(x-6)=0$, встановлюємо еквівалентність $(x+5)(x-6)=0$ $\Leftrightarrow$ $(x+5)=0$ або $(x-6)=0$ і визначаємо область істинності диз'юнкції як об'єднання областей істинності складових її більш простих висловлювальних форм (лінійних рівнянь):

$\{x | (x+5)(x-6)=0\} = \{x | x+5=0 \, \textit{або} \, x-6=0\} = \{x | x+5=0\} \cup \{x | x-6=0\} = \{-5\} \cup \{6\} = \{-5; 6\}$.

Взагалі, розв'язуючи рівняння $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, ми встановлюємо еквівалентність $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $f_1(x) = 0$ або $f_2(x) = 0$ (на перерізі областей визначення функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$) і на цій підставі маємо: $\{x | f_1(x) \cdot f_2(x) = 0\} = \{x | f_1(x) = 0 \, \textit{або} \, f_2(x) = 0\} = \{x | f_1(x) = 0\} \cup \{x | f_2(x) = 0\} = E_1 \cup E_2$, де $E_1 = \{x | f_1(x) = 0\}$, $E_2 = \{x | f_2(x) = 0\}$.

Приклад 2

Розв'язуючи рівняння $|f_1(x)| + |f_2(x)| = 0$, ми користуємося еквівалентністю $|f_1(x)| + |f_2(x)| = 0$ $\Leftrightarrow$ $f_1(x) = 0$ і $f_2(x) = 0$, тому множина розв'язків заданого рівняння подається через множини E_1 та E_2 таким чином:

$$\{x \| f_1(x)| + |f_2(x)| = 0\} = \{x | f_1(x) = 0 \ i \ f_2(x) = 0\} = \{x | f_1(x) = 0\} \cap \{x | f_2(x) = 0\} = E_1 \cap E_2.$$

Приклад 3

Розв’язуючи рівняння $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0,$ ми встановлюємо еквівалентність $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0 \Leftrightarrow f_1(x)=0$ і $\overline{f_2(x)=0}.$ Тоді множина розв’язків заданого рівняння подається через множини E_1 та E_2 таким чином:

$$\left\{x\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0\right.\right\}=\left\{x\,|\,f_1(x)=0\ i\ f_2(x)\neq 0\right\}=\left\{x\,|\,f_1(x)=0\right\}\cap\left\{x\,|\,f_2(x)\neq 0\right\}=E_1\cap\overline{E_2},\ \text{де}\ \overline{E_2}=R\setminus E_2.$$

Розглянемо поняття "система рівнянь". Введення цього поняття слугуватиме наочним прикладом того, як інколи у навчанні штучно ускладнюються прості питання в пошуках їх "доступного тлумачення" учням. На превеликий жаль, в шкільних підручниках ми знаходимо визначення (або пояснення) системи рівнянь, які ні з логічної, ні з дидактичної точки зору не сприятливі.

Враховуючи обмеженість змісту запропонованого матеріалу, ми рекомендуємо читачеві самостійно проаналізувати існуючі означення.

Що ж у дійсності, у звичайній практиці навчання, розуміють під системою рівнянь (або нерівностей)? Система рівнянь (або нерівностей) – кон’юнкція цих рівнянь (або нерівностей).

Так під системою $\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$ розуміють кон’юнкцію $f_1(x,y)=0$ і $f_2(x,y)=0,$ а отже, множина розв’язків системи є область істинності цієї кон’юнкції або переріз множини розв’язків рівнянь системи:

$$\left\{(x,y)\,|\,f_1(x,y)=0\ i\ f_2(x,y)=0\right\}=\left\{(x,y)\,|\,f_1(x,y)=0\right\}\cap\left\{(x,y)\,|\,f_2(x,y)=0\right\}.$$

Звичайно, ми розуміємо, що в загальному шкільному навчанні неможливо застосовувати термін "диз’юнкція", "кон’юнкція", проте їх сутність може бути збережена і означення системи (сукупності) рівнянь (нерівностей) може бути подане в такій редакції: "два або більше рівняння об’єднані сполучником "і" ("або") утворюють систему (сукупність) рівнянь (нерівностей)". Аналогічно можливо обійти і термін "переріз множин" і зазначити, що множина розв’язків системи складається із спільних розв’язків рівнянь системи.

Зазначимо, що запропонований матеріал в першу чергу адресовано вчителям математики та студентам – математикам педагогічних університетів. На нашу думку, він може бути успішно використаний вчителем математики для роботи в профільних класах загальноосвітньої школи та при організації факультативних курсів.

Використані джерела

1. Завало С.Т. Елементарна математика. Алгебра: Підручник для фізико-математичних факультетів пед. інститутів УРСР. – К: Рад. шк., 1961. – 240 с.
2. Слепкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей пед. навч. закладів. – К: Зодіак - ЕКО, 2000. – 512 с.
3. Столяр А.А. Педагогика математики: Учебное пособие для физ.-мат. фак. пед.ин-тов. – Мн.: Высш. шк., 1986. – 414 с.
4. Современные основы школьного курса математики // Н.Я. Виленкин, К.И. Дуничев, Л.А. Калужнин, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1980. – 240 с.

Odynets Y.A.

FORMING THE CONCEPTS OF EQUATION AND INEQUALITY

In the article the presence of numerous variants of interpretation and determination of concepts of equation and inequality is considered for students and that confuses a teacher in determination of border between the scientifically weighed determinations and methodical justified.

Key words: *equation, inequality, identity, set, solution.*

Стаття рекомендована кафедрою вищої та прикладної математики Чернігівського національного педагогічного університету імені Т.Г. Шевченка.

Стаття надійшла до редакції 18.05.2013