

МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО ВИВЧЕННЯ РОЗПОДІЛУ МАКСВЕЛЛА-БОЛЬЦМАНА В КУРСІ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

У статті проводиться короткий аналіз методики вивчення розподілу Максвелла-Больцмана в курсі теоретичної фізики, що має важливе значення в фундаментальній і фаховій підготовці майбутнього вчителя фізики.

Ключові слова: макроскопічна система, функція розподілу, принцип інваріантності ймовірності.

Постановка проблеми. Загальновизнано, що основу професіоналізму, конкурентоспроможності та мобільності майбутнього вчителя фізики складають фундаментальні наукові знання. Останні, зокрема, формуються при вивченні студентами курсу теоретичної фізики, що є завершальним етапом їх фундаментальної підготовки. Саме на його засадах відбувається систематизація в сприйнятті та відображенні явищ навколишнього світу в процесі їх пізнання, формується світогляд, науковий стиль мислення, шліфується інтуїція та компетенції майбутнього фахівця.

У розпорядженні викладача курсу теоретичної фізики сьогодні достатньо різноманітної навчально-методичної літератури, як вітчизняних, так і зарубіжних авторів. Незважаючи на методичну цінність існуючих видань, необхідність удосконалення методики викладання курсу в сучасних умовах модернізації вищої педагогічної освіти в контексті європейських вимог, посилення фундаментальності та професійної спрямованості в підготовці майбутніх учителів фізики є цілком очевидною. Створення умов, які б спонукали студентів до самостійного пошуку й самовдосконалення, сприяли активізації пізнавальної діяльності, оволодінню методологією наукового пізнання є чи не головним завданням роботи сучасного викладача. Останнє, безумовно, повинно знайти адекватне відображення в методиці викладання основних/ключових питань навчального курсу. До таких, зокрема, можна віднести з'ясування фізичного змісту розподілу Максвелла-Больцмана – одного з перших в історії науки класичних статистичних розподілів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемам навчання фізики у вищих навчальних закладах та різним аспектам фахової підготовки майбутнього вчителя фізики присвячені дослідження П. Атаманчука, Л. Благодаренко, І. Богданова, О. Бугайова, Б. Будного, Г. Бушка, С. Величка, В. Вовкотруба, С. Гончаренка, О. Іваницького, Л. Калапуші, А. Касперського, О. Коновала, Е. Коршака, Д. Костюкевича, О. Ляшенка, М. Мартинюка, В. Мендерецького, Ю.Орищина, А. Павленка, Ю. Пасічника, В. Савченка, М. Садового, О. Сергеева, В. Сергієнка, Н. Сосницької, Н. Стучинської, Б. Суся, І. Тичини, В. Шарко, М. Шута та ін. Зазначимо, що методика навчання фізики у вищій школі за останнє десятиріччя розвивається досить інтенсивно. Проте комплексні дослідження, присвячені науково-методичним засадам навчання курсу теоретичної фізики майбутнім учителям фізики, що відображають сучасні ідеї й тенденції розвитку вищої педагогічної освіти в контексті європейських вимог та дозволяють формувати їх професійну компетентність на сьогодні майже відсутні. Тому метою статті є короткий аналіз методики вивчення розподілу Максвелла-Больцмана – одного з ключових питань курсу теоретичної фізики, що має важливе значення в фундаментальній і фаховій підготовці майбутнього вчителя.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо найзагальніший випадок, коли одноатомний ідеальний газ перебуває в зовнішньому полі. Якщо частинку газу розглядати як квазінезалежну підсистему, то розподіл для її координат і проекцій імпульсу можна отримати прямим застосуванням до неї класичного канонічного розподілу Гіббса (КРГ). Енергія однієї частинки дорівнює: $E = p^2 / 2m + U(x, y, z)$; $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, де $U(x, y, z)$ – її потенціальна енергія в зовнішньому полі. КРГ визначає ймовірність того, що координати та проекції імпульсу частинки мають певні значення [1, с.59]:

$$dW(x, y, z; p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{p^2}{2mkT} - \frac{U}{kT}} dx dy \dots dp_z, \text{ де } Z = \int e^{-\frac{p^2}{2mkT} - \frac{U}{kT}} dx dy \dots dp_z. \quad (1)$$

Формулу (1) називають *розподілом Максвелла-Больцмана*, який можна представити у вигляді множення двох незалежних розподілів імовірностей – розподілу Максвелла для імпульсів:

$$dW_{p_x, p_y, p_z} = A \cdot e^{-p^2/2mkT} dp_x dp_y dp_z, \text{ де } A = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2/2mkT} dp_x dp_y dp_z \right]^{-1} \quad (2)$$

та розподілу Больцмана для координат:

$$dW_{x, y, z} = B \cdot e^{-U/KT} dx dy dz, \text{ де } B = \left[\int_V \int_V \int_V e^{-U/KT} dx dy dz \right]^{-1}. \quad (3)$$

Розподіл Максвелла за швидкостями. Цей розподіл є універсальним, тобто він не залежить ні від природи частинок, які складають газ, ні від зовнішнього силового поля. Згідно статистичної теорії нормувальний множник має вигляд: $A = 2\pi mkT^{-3/2}$ [4, с.130]. Розподіл Максвелла за імпульсами можна перетворити на розподіл за швидкостями:

$$dW_{v_x, v_y, v_z} = m/2\pi kT^{-3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z.$$

Враховуючи статистичну незалежність проекцій швидкості частинки, останній вираз можна представити як множення трьох розподілів імовірностей. З розподілу для проекцій швидкості отримаємо розподіл для модуля швидкості. Якщо швидкості частинки v_x , v_y та v_z відкласти за осями декартової системи координат, то об'єм простору швидкостей, який відповідає модулю швидкості від v до $v+dv$ дорівнюватиме $V_v = S_{\text{сфери}} \cdot dv = 4\pi v^2 \cdot dv$, тобто:

$$dW_v = 4\pi m/2\pi kT^{-3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv, \quad (4)$$

звідки дістаємо загальний вигляд функції розподілу молекул:

$$f_v = 4\pi m/2\pi kT^{-3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2. \quad (5)$$

Графік функції (5) зображено на малюнку 1. Оскільки зі збільшенням v експонента $e^{-mv^2/2kT}$ спадає швидше, ніж множник v^2 зростає, функція f_v , починаючись в нулі (через v^2), досягає максимуму і потім асимптотично наближається до нуля. Площина під кривою дорівнює одиниці: $\int_0^{\infty} f_v dv = 1$.

Практичний інтерес має не розподіл молекул за модулем швидкості, а число молекул, швидкості яких належать певному інтервалу $v, v+dv$. Згідно означення маємо: $dN_v = NdW_v = Nf_v dv$, звідки виходить:

$$f_v = \frac{dN}{N} \frac{1}{dv}. \text{ Функція розподілу молекул ідеального газу}$$

за швидкостями f_v має зміст відносного числа (доли)

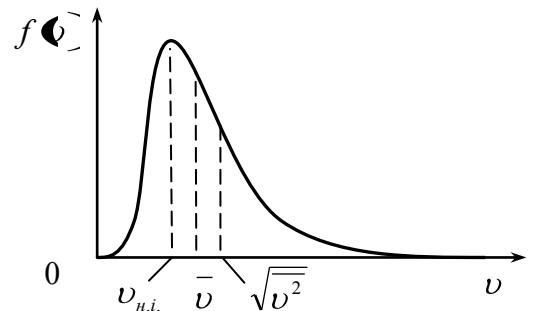
молекул газу, розрахованого на одиничний інтервал швидкостей в околі v . Знаючи f_v , можна знайти характерні швидкості молекул ідеального газу.

1) *Найімовірніша швидкість* $v_{н.і.}$ – швидкість, що відповідає максимуму функції розподілу f_v , яку знаходять за умови: $f'_v = 0$. 2) *Середня швидкість* \bar{v} – швидкість, що визначає середній імпульс теплового руху молекул газу, яку розраховують згідно відомого з теорії ймовірностей виразу: $\bar{v} = \int_0^{\infty} v f_v dv$. 3) *Середньоквадратична швидкість* $\bar{v}_{кв}$ – швидкість, що визначає середню кінетичну

енергію теплового руху молекул: $\bar{v}_{кв} \equiv \sqrt{\bar{v}^2} = \left[\int_0^{\infty} v^2 f_v dv \right]^{1/2}$. У результаті розрахунків можна отримати формули:

$$v_{н.і.} = 2kT/m^{1/2}; \quad \bar{v} = 8kT/\pi m^{1/2}; \quad \bar{v}_{кв} = 3kT/m^{1/2}, \quad (6)$$

звідки виходить: $v_{н.і.} \div \bar{v} \div \sqrt{\bar{v}^2} = 1 \div 1,13 \div 1,22$.

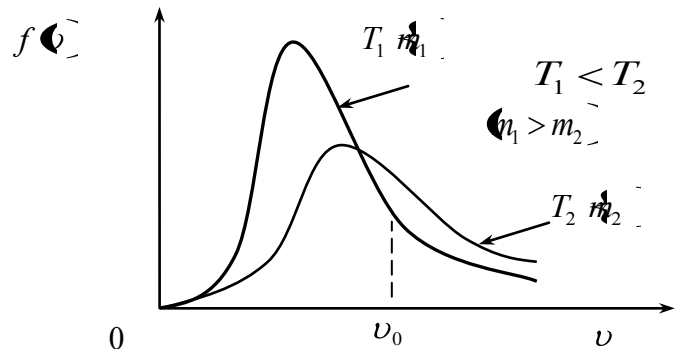


Мал. 1. Розподіл Максвелла

Аналіз статистичного розподілу Максвелла. 1) Крива функції розподілу $f v$ проходить через початок координат. Отже, в газі немає нерухомих молекул. 2) Крива має максимум, після якого асимптотично наближається до осі абсцис. Отже, дуже великі швидкості молекул газу малоімовірні. 3) Крива розподілу швидкостей несиметрична – в один бік її спад крутіший, ніж в інший, тобто $\bar{v} \neq v_{н.і.}$. 4) Якщо підставити значення $v_{н.і.}$ у формулу розподілу (5) можна знайти максимальне значення функції:

$$f v_{н.і.} = 4/e \cdot \sqrt{m/2\pi kT} \sim \sqrt{m/T}.$$

Як бачимо, зі збільшенням температури газу (зменшенням маси частинок) максимум функції зміщується вправо і стає нижчим, при цьому площа, яку обмежує крива розподілу, лишається сталою. На рис. 2 зображено дві криві розподілу, які можна трактувати або як ті, що відповідають різним температурам газу з певною масою його молекул, або ті, що відповідають різним масам молекул з певною температурою газу.



Мал. 2

5). Відносну кількість молекул газу, швидкості яких перевищують деяке значення v_0 визначають умовою:

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_0}^{\infty} f v dv. \text{ Як бачимо з мал. 2, кількість молекул, швидкості яких переважають } v_0, \text{ сильно зростає зі}$$

збільшенням температури. Згідно таблиці 1 у 70% всіх молекул газу швидкість відрізняється з найімовірнішою не більше ніж на 50%. Швидкості, які перевищують $v_{н.і.}$ більше ніж у 3 рази, притаманні тільки 0,04% молекул газу.

6). Середню швидкість молекул \bar{v} можна оцінити.

$v/v_{н.і.}$	0 – 0,5	0,5 – 1,5	1,5 – 2	2 – 3	> 3	> 5
$\Delta N/N, \%$	8,1	70,7	16,6	4,6	0,04	$8 \cdot 10^{-9}$

Згідно (6), наприклад, для молекул кисню за кімнатної

температури: $\bar{v} \approx 500 \text{ м/с}$. Отже, кожна молекула кисню проходить в секунду шлях, який дорівнює в середньому 0,5 км. Через дуже часті зіткнення молекул, цей шлях складається з величезного числа коротких прямолінійних відрізків, які утворюють ламану лінію. Якщо маємо суміш газів, які перебувають у рівновазі, то в межах молекул кожного сорту має місце розподіл (5) зі своїм значенням m . При цьому більш важкі молекули рухатимуться в середньому з меншою швидкістю.

7). Якщо використати відому формулу $E = mv^2/2$, то з (5), враховуючи принцип інваріантності ймовірності $[f v dv = dN/N = f E dE]$, можна отримати розподіл ймовірностей для значень енергії частинки:

$$f E = 2/\sqrt{\pi} kT^{-3/2} \cdot \sqrt{E} \cdot e^{-E/kT}. \quad (7)$$

З розподілу молекул за енергіями (7) можна знайти середню кінетичну енергію молекул ідеального газу. За означенням середнього маємо: $\bar{E} = \int_0^{\infty} E \frac{2}{\sqrt{\pi}} kT^{-3/2} \cdot \sqrt{E} \cdot e^{-E/kT} dE = \frac{3}{2} kT$ або $\bar{E} = \frac{m}{2} \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$. Як

бачимо, абсолютна температура T виступає мірою середньої кінетичної енергії теплового (хаотичного) руху молекул ідеального газу, тобто вона є статистичним параметром. Поняття температури втрачає сенс за малої кількості молекул, тим більше, не можна говорити про температуру однієї молекули.

З метою експериментальної перевірки розподілу Максвелла проводилися різноманітні досліді: Річардсона (1908 р.) і Штерна (1920 р.), Сміта і Комптона (1925 р.), Ельддріджа (1927 р.), Ламмерта (1929 р.), Д.Міллер і П.Куш (1955 р.) та ін. Результати всіх дослідів повністю підтвердили закон розподілу Максвелла, встановлений ним теоретично у 1859 році, що свідчить про справедливість статистичної теорії. Отже, будь-якому явищу, яке проходить в середовищі з великою кількістю частинок, властивий статистичний характер. Такі явища підлягають законам великих чисел. Закон Максвелла – це перший приклад статистичного закону в науці. Він перший усвідомив, що випадковий рух окремих молекул підпорядкований певному статистичному закону. Слід підкреслити, що закон розподілу Максвелла та всі висновки з нього справедливі лише для газу, що перебуває в рівноважному стані.

Розподіл Больцмана. Розглянемо два конкретні випадки застосування розподілу Больцмана (3).

1). Якщо $U x, y, z = 0$, то $dW x, y, z = B \cdot dx dy dz$, де $B = 1/V$. Отже, всі положення частинки у вільному просторі рівноймовірні.

2). У однорідному полі тяжіння поблизу поверхні Землі потенціальна енергія молекули $U = mgz$, тому: $dW_z \sim e^{-mgz/kT} dz$, звідки для функції розподілу частинок з висотою $z = h$ маємо наступний вираз: $f_z = e^{-mgz/kT}$.

Якщо середнє число частинок газу в 1 см^3 буде змінюватися з висотою, то воно повинно бути пропорційним густині ймовірності для координати z :

$$n_z = n_0 e^{-mgz/kT}, \quad (8)$$

де n_0 – концентрація частинок на висоті $z = 0$.

З формули видно, що за $T \rightarrow \infty$ на висоті h концентрація газу $n \rightarrow n_0$, тобто за високих температур молекули газу розподіляються рівномірно за всю висоту газового стовпу. Якщо $T \rightarrow 0\text{K}$ то $n \rightarrow 0$, тобто за низьких температур усе більше молекул під дією сил тяжіння опускається на дно посудини. Розподіл молекул з висотою (8) є разом з тим і розподілом за значенням їх потенціальної енергії: $n_z = n_0 e^{-U/kT}$. Больцман довів, що так само молекули газу розподіляються у будь-якому іншому потенціальному полі. Враховуючи, що тиск газу пропорційний концентрації, дістаємо відому *барометричну формулу*:

$$P_z = P_0 e^{-mgz/kT}. \quad (9)$$

Як бачимо, тиск газу спадає з висотою тим швидше, чим більше маса молекул та чим нижче його температура. На мал. 3 зображено дві криві, які можна трактувати або як ті, що відповідають різним масам молекул газу за певної температури, або ті, що відповідають різним температурам за певної маси його молекул.

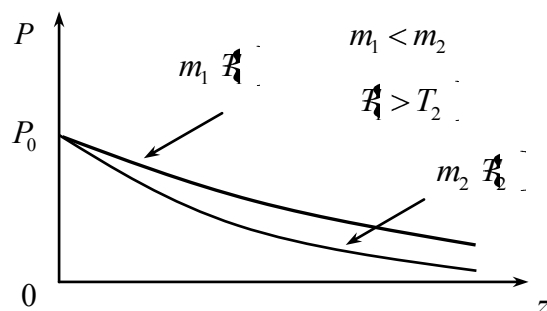
Розподіл Больцмана був підтверджений дослідями Ж. Перена з колоїдними розчинами (1909 р.). Спостереження за розподілом броунівських частинок гумігуту в рідині з висотою цілком підтвердили розподіл Больцмана. При цьому Перен зумів обчислити сталу Больцмана, яка входить в формулу (8), а за нею і сталу Авогадро N_A . За результатами дослідів на різних емульсіях значення N_A було в межах від $6,5 \cdot 10^{23}$ до $7,2 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$, що цілком узгоджується з її табличним значенням [2].

Аналіз статистичного розподілу Больцмана.

Розподіл молекул з висотою встановлюється у результаті дії двох чинників: а) тяжіння до Землі mg , яке намагається розташувати їх на земній поверхні та б) тепловий рух kT , який намагається розкидати їх рівномірно з висотою. У випадку більшої маси молекули і меншої температури переважає перша тенденція, тому вони концентруються біля поверхні Землі. У крайньому випадку за $T = 0\text{K}$ тепловий рух зовсім припиняється і під впливом тяжіння молекули розташовуються на земній поверхні. Дослід підтверджує ці висновки: у земній атмосфері більш важкі компоненти за умов рівноваги перебувають переважно у нижчих шарах, більш легкі – у верхніх. (Так, для кисню висота, на якій його концентрація спадає вдвічі, дорівнює 5 км, для водню відповідно 80 км). За високих температур навпаки, переважає тепловий рух, концентрація молекул повільно спадає, так що молекули розподіляються з висотою майже рівномірно.

Виникає кілька природних питань: як пояснити, що, незважаючи на свою вагу, молекули газу не падають вниз? Статистична теорія на це дає просту та ясну відповідь. Молекули можуть затримуватися на висоті, бо вони мають енергію, достатню для того, щоб рухатися, перемагаючи силу власної ваги. Але чому ж тільки небагато молекул піднімається на дуже велику висоту? Тому, що енергія молекул різна. Під час зіткнень вони постійно обмінюються енергією, і то одні з них, то інші дістають енергію, достатню для того, щоб рухатися вгору проти сили тяжіння. Звичайно, молекули можуть рухатися як униз, так і вгору. Через те їх рух у полі земного тяжіння можна уявити собі як ряд піднімань та опускань, які чергуються без певної послідовності. У результаті вони переходять з верхніх до нижчих шарів і навпаки, але завжди деяке число молекул присутнє у верхніх шарах, при цьому їх тим менше, чим більша її висота.

Чи треба це розуміти так, що всі швидкі молекули піднімаються вгору, а повільні залишаються внизу, причому швидкі з них, рухаючись вгору, зменшують свою швидкість і рухаються так само повільно, як і ті молекули, що лишилися внизу? А може, й у верхніх шарах атмосфери зустрічатимуться молекули з великими швидкостями? Яка ймовірність того, що молекула на значній висоті матиме певне значення швидкості? Чи ця ймовірність така сама, як і для нижчих шарів, тобто чи залежить швидкість молекули від її координати?



Мал. 3. Розподіл Больцмана

Відповідь на ці питання не самоочевидна. Згідно статистичної теорії ймовірність певного значення швидкості молекули не залежить від її положення, і навпаки, ймовірність того чи іншого положення молекули не залежить від її швидкості. З цього виходить важливий висновок: розподіл молекул за швидкостями не залежить від того, чи перебувають вони в полі тяжіння або в якомусь іншому полі, чи взагалі поля немає. Отже, розподіл молекул за швидкостями у полі тяжіння в усіх шарах атмосфери однаковий. Це є максвеллівський розподіл, який встановлюється автоматично внаслідок зіткнень між молекулами. Через те середня кінетична енергія молекули у верхніх шарах атмосфери така сама, як і для нижчих, а отже, і температура в усіх шарах має бути однаковою. Експериментальні дослідження показали, що на значних відстанях від поверхні Землі реальний хід залежності тиску з висотою різниться із законом (9). Це пов'язано з тим, що атмосфера не перебуває у рівноважному стані, вона неоднорідна за своїм складом (у повітрі завжди присутня водяна пара), її температура під час підйому над поверхнею змінюється складним чином, що й обумовлює різноманітні відхилення від класичного закону (9).

Таким чином, закон розподілу молекул з висотою в полі тяжіння є закон статистичний, встановлюється в результаті неупорядкованого руху й лишається вірним тільки за великого числа молекул. Цікавий факт, в атмосферах планет відбувається явище розсіяння в космічний простір. З розподілу Максвелла виходить, що в газі завжди присутня частина молекул з дуже великими швидкостями (порівняно з другою космічною швидкістю для даної планети), вихід яких і призводить до поступового розсіяння верхніх шарів атмосфери. Таке розсіяння проходить тим скоріше, чим менше маса планети і вище її температура. Для Землі цей ефект надзвичайно малий, а от планети Марс, Меркурій та Місяць вже загубили таким чином свої атмосфери [1].

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямку дослідження. Процес професійної підготовки майбутнього вчителя фізики передбачає вивчення фундаментальних фізичних теорій, до числа яких, безперечно, відносять термодинаміку й статистичну фізику. Остання традиційно досліджує властивості різноманітних макроскопічних систем, тобто таких, що складаються з величезної кількості частинок. Застосування статистичних методів до макросистем історично сприяло теоретичному обґрунтуванню основних положень і законів термодинаміки та забезпечило їх поглиблений аналіз. На наш погляд, ефективному засвоєнню одного з важливих питань курсу теоретичної фізики сприятиме максимальна лаконічність математичного апарату, цілісність, логічність та послідовність викладання навчального матеріалу, надання навчально-пізнавальної діяльності творчого, дослідницького спрямування. З пасивного споживача знань студент має перетворитися на активного їх творця, оскільки справді фундаментальним є саме особистісне знання. Безумовно, засвоєння теоретичних матеріалів буде найефективнішим тільки разом із розв'язанням відповідних задач навчального курсу.

Використані джерела

1. Ансельм А. И. Основы статистической физики и термодинамики / А. И. Ансельм. – М. : Просвещение, 1973. – 423 с.
2. Булавін Л. А. Молекулярна фізика / Л. А. Булавін. – К. : Знання, 2006. – 567 с.
3. Королюк С.Л. Основы статистичної фізики та термодинаміки / С.Л. Королюк, С.В. Мельничук, О.Д. Валь. – Чернівці : Книги ХХІ, 2004. – 347 с.
4. Школа О. В. Основы термодинаміки і статистичної фізики : навч. посібник / Олександр Школа. – Донецьк : Юго-Восток, 2009. – 374 с.

Shkola O.V.

THE METHODOLOGICAL APPROACHES OF TEACHING THE MAXWELL-BOLTZMANN'S DISTRIBUTION IN THE COURSE OF THEORETICAL PHYSICS

The article deals with the brief analysis of the methodology of teaching of Maxwell-Boltzmann's distribution in the course of theoretical physics. It has a great importance in basic and professional training of future teachers of physics.

Key words: *the macroscopic system, the function of distribution, the principle of irreversibility's invariance.*

Стаття рекомендована доктором педагогічних наук, професором, завідувачем кафедри методики викладання фізико-математичних дисциплін та інформаційних технологій у навчанні БДПУ Н.Л. Сосницькою.

Стаття надійшла до редакції 14.03.2013