УДК 378.016:51

Лапа Т.В., Мовша О.М.

Застосування диференціального числення функції багатьох змінних в економічних дослідженнях при викладанні курсу вищої математики для економістів

У статті розглянуті приклади розв’язування на практичних заняттях з вищої математики задач прикладного характера за темою: "Диференціальне числення функції багатьох змінних" для студентів економічних спеціальностей.

Ключові слова: вища математика, частинні похідні, застосування в економіці.

Для розвитку творчого мислення студентів, розвитку їх дослідницької діяльності викладач може у своїй повсякденній роботі не тільки давати знання з курсу вищої математики, але й показати зв’язок предмета з майбутньою спеціальністю, що допоможе зацікавити студентів предметом, покаже прикладну направленість математики та продемонструє тісний зв’язок математики зі спеціальними дисциплінами економічної направленості.

Вивчаючи економічні процеси в сучасному суспільстві, майбутні фахівці у сфері економіки, повинні вміти будувати економіко-математичні моделі, які описують виробництво, проаналізувавши необхідну інформацію про фактори й ресурси для виготовлення товарів або надання послуг. Для цього поряд з іншими дослідженнями доцільно застосовувати і диференціальне числення функції багатьох змінних.

Багатофакторна виробнича функція багатьох змінних є функцією від n незалежних змінних x1, x2, …, xnякі набувають значень обсягів ресурсів, що використовуються у виробництві $\left(x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, x_n \right)$, а значення функції виражає обсяг випуску продукції: y = f(x) = f (x1, x2, …, xn).

Функція y = f(x1, x2, …, xn)маєневід’ємнічастинні похідні, які називають граничними продуктами, тобто $\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0,\ i = 1, \ldots, n.$ Це означає, що зі зростанням витрат одного ресурсу за незмінного обсягу іншого обсяг випуску продукції збільшується.

На практиці, будуючи виробничу функцію, за обсяг річного випуску у зазвичай беруть їхній сукупний продукт (дохід), а як ресурси розглядають основний капітал (x1= K– обсяг основного капіталу, що використовується протягом року) і працю (x2 = L– витрати праці, що використовуються протягом року). Таким чином, дістають двофакторну виробничу функцію y = f (x1, x2)= f(K, L), наприклад, функцію Кобба-Дугласа.

У деяких випадках L та K залежні. Наприклад, фірма впровадила у виробництво нове обладнання (змінна K зросла на величину K1), яке дало можливість скоротити кількість праці у декілька разів. У цьому прикладі можна встановить функціональну залежність між L та K.

Але в загальних випадках L та K розглядають як незалежні змінні.

Частинну похідну першого порядку $\frac{\partial f}{\partial L}$ називають граничною продуктивністю праці при фіксованому K або маргінальною продуктивністю праці, $\frac{\partial f}{\partial K}$ – граничною продуктивністю капіталу при фіксованому L або маргінальною продуктивністю капіталу, яка характеризує зміну випуску продукції у разі постійних трудових затрат.

Приклад. Кількість одиниць P випущеної продукції визначається за формулою f = x3y + y2x, де x– кількість одиниць праці, що може вимірюватись річними робочими годинами, y– сума капіталу, вкладеного у виробництво. Визначити маргінальну продуктивність праці і маргінальну продуктивність капіталу. З'ясувати, чи будуть зростати прибутки виробництва, якщо x = 60, y = 100.

Обчислимо маргінальну продуктивність праці $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Маємо $\frac{\partial f}{\partial x}$ =3x2y + y2; $\frac{\partial f}{\partial x}$ (x = 60, y = 100) = 1090000.

Аналогічно знайдемо маргінальну продуктивність капіталу $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Маємо $\frac{\partial f}{\partial y}$ = x3 + 2yx; $\frac{\partial f}{\partial y}$ (x = 60, y = 100) = 228000.

Прибутки виробництва зростатимуть, якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0.$

Маємо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ = 6 xy; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (x= 60, y = 100) =36000 > 0.

Отже, прибутки підприємства зростають.

В економічному аналізі процесу виробництва за допомогою виробничих функцій використовуються такі показники, як часткові еластичності за факторами виробництва та еластичність виробництва.

Відношення граничної продуктивності i-го ресурсу Ri до його середньої продуктивності P_{x_i} називають частинною еластичністю випуску за i-м фактором виробництва й позначають

$$E_{x_i}(f) = \frac{R_i}{P_{x_i}} = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n.$$

Суму $E(x) = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ називають еластичністю виробництва.

З економічного погляду еластичності характеризують процент приросту обсягу випуску продукції зі збільшенням витрат ресурсу на 1%.

Так, наприклад, часткові еластичності виробничої функції Кобба-Дугласа y=A $\cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$, A$> 0, \alpha + \beta = 1$ дорівнюють відповідно

EK(y) = $\frac{K}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial K} = \frac{K}{\text{А} \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}} \alpha \cdot \text{A} \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{\beta} = \alpha$;

EL (y) = $\frac{L}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial L} = \frac{L}{\text{А} \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}} \cdot \beta \cdot \text{A} \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta-1} = \beta$, а

E(x)=$\alpha + \beta = 1$.

Вважатимо, що товари А і В взаємозв’язані, якщо попит на товар А залежить не тільки від його вартості, а й від вартості товару В.

Позначимо РА та РВ вартість одиниці відповідного товару. Нехай X_A та XB– кількісний попит на товари А і В відповідно. Якщо А і В взаємозв’язані, тоді XA та XB будуть функціями двох змінних, тобто

XA = f(PA, PB);XB = φ (PA, PB).

Частинна похідна $\frac{\partial X_A}{\partial P_A}$ має зміст граничного попиту на товар А відносно його вартості PA.

Частинна похідна $\frac{\partial X_A}{\partial P_B}$ граничний попит на товар А відносно вартості P_B

Еластичність вартості товару А відносно PA визначається формулою $E_{P_A} = \frac{P_A}{X_A} \cdot \frac{\partial X_A}{\partial P_A}$.

Аналогічно визначається еластичність вартості товару А відносно PB–$E_{P_B} = \frac{P_B}{X_A} \cdot \frac{\partial X_A}{\partial P_B}$.

Приклад. Підприємство випускає 2 види взаємозамінних товарів А і В. Кількісний попит XA і XB на товари А і В відповідно визначаються функціями X_A = PA3 + 4PB, XB = PA3– $2P_B$, де PA і PB– ціна одиниці товарів А і В відповідно. Визначити, чи будуть товари А і В конкурентними?

Товари А і В будуть конкурентними, якщо $\frac{\partial X_A}{\partial P_B} > 0$ і $\frac{\partial X_B}{\partial P_A} > 0$.

Знаходимо $\frac{\partial X_A}{\partial P_B} = 4$, $\frac{\partial X_B}{\partial P_A} = 3P_A^2$. Оскільки $\frac{\partial X_A}{\partial P_B} > 0$ і $\frac{\partial X_B}{\partial P_A} > 0$, то товари конкурентні.

Приклад. Нехай функція попиту на товар А має вид XA = f(PA, PB) = 15 – 2PA + PB.

Знайти частинні показники еластичностей.

Маємо

$$E_{P_A} = \frac{P_A}{X_A} \cdot \frac{\partial X_A}{\partial P_A} = \frac{P_A}{15-2P_A + P_B} \cdot (-2) = \frac{-2P_A}{15-2P_A + P_B};$$

$$E_{P_B} = \frac{P_B}{X_A} \cdot \frac{\partial X_A}{\partial P_B} = \frac{P_B}{15-2P_A + P_B} \cdot (1) = \frac{P_B}{15-2P_A + P_B}.$$

Наприклад, для PA = 4 і PB = 3 дістанемо $E_{P_A} = -0{,}8$. Це означає, що якщо ціна товару А зростає на 1%, а ціна товару В залишається без змін, то попит на товар А зменшується на 0,8%.

Аналогічно обчислимо $E_{P_B} = 0{,}3$. Отже, якщо ціна товару В зростає на 1% при незмінній ціні товару А, то попит на товар А зростає приблизно на 0,3%.

Нехай фірма випускає один товар (його обсяг позначимо через y) і використовує для його виробництва певні ресурси. Позначимо через $x1$, $x2$, …, x_n обсяги різних ресурсів, які фірма використовує для випуску продукції, а через $p1$, $p2$, …, p_n– відповідно їхні ціни (всі p_i – сталі величини). Витрати виробництва одночасно пов'язані з випуском продукції, і цей зв'язок визначає виробнича функція y= f(x1, x2, …, xn), яка виражає обсяг y продукції, що випускається, через обсяги x1, x2, …, x_n ресурсів, які використовуються у виробництві.

Припускатимемо, що виробнича функція не спадна в економічній області. Звідси випливає, що її частинні похідні, які називаються граничними продуктами, невід'ємні в цій області.

Прибутком P фірми за певний інтервал часу називають різницю між одержаним нею доходом та витратами виробництва Q : P= R–Q.

Основна задача багаторесурсної фірми, полягає в тому, що фірма намагається одержати максимальний прибуток шляхом раціонального розподілу ресурсів, які використовуються у виробництві. З математичного погляду ця задача зводиться до розв'язання задачі про знаходження максимального значення функції прибутку P =P(x1, x2, …, xn); тобто функцію прибутку досліджують на екстремум і визначають, при яких значеннях (x_1^*, x_2^*, … , x_n^*) вона набуває свого найбільшого значення. Такий набір ресурсів називають оптимальним.

Приклад. Невелика фірма виробляє 2 види товарів А та В. Ціна кожної одиниці товарів А– 100 грн., а В– 80 грн. Функція витрат має вигляд: Q = x2 + xy + y2, де x і y – обсяги випуску товарів А і В відповідно. Визначити такі значення обсягів товарів А та В, за яких прибуток фірми буде максимальним.

Сумарний прибуток від продажу товарів А і В: R = 100x + 80y.

Прибутком фірми є різниця між сумарним доходом R і витратами Q.

Тобто z = P(x,y)=R–Q = 100x + 80y–x2–xy–y2.

Цю функцію необхідно дослідити на екстремум. Для цього знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 100 - 2x - y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 80 - x - 2y.$$

Координати стаціонарної точки визначимо з системи рівнянь $\begin{cases} 100 - 2x - y = 0; \\ 80 - x - 2y = 0; \end{cases} <=> \begin{cases} x = 40; \\ y = 20. \end{cases}$

Отже, стаціонарна точка M має координати M (40, 20).

Знайдемо частинні похідні другого порядку в точці M.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \qquad A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M) = -2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1; \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M) = -1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2; \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M) = -2.$$

Складемо вираз Δ = AC–B2 = –2(–2) – 1 = 3 > 0, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M) < 0$, то точка M є точкою максимуму, причому

zmax = 100 · 40 + 80 · 20 – 402– 40 · 20 – 202 = 2800.

Отже, при обсягах виробництва x = 40 і y = 20 фірма матиме максимальний прибуток 2800 грн.

Приклад

Функція доходу деякого підприємства, що випускає 2 види продукції має вид f (x, y) = xy (млн. грн.). Знайти найбільший можливий дохід підприємства за умов обмежень на випуск продукції   x2 + y2 = 2.

З математичної точки зору ця задача зводиться до знаходження умовного екстремума. Для розв'язання її складемо функцію Лагранжа L(x,y, λ) = xy + λ (x2 + y2– 2) і знайдемо стаціонарні точки, розв'язавши систему рівнянь.

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \text{тобто} \begin{cases} y + 2\lambda x = 0, \\ x + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Маємо 4 розв'язки: $(1, 1, -\frac{1}{2})$, $(-1, 1, \frac{1}{2})$, $(1, -1, \frac{1}{2})$, $(-1, -1, -\frac{1}{2})$. Це означає, що точками можливого умовного екстремуму функції z = xy є точки M1 (1, 1), M2 (1, –1), M3 (–1, 1), M4 (–1, –1).

Виходячи з умови задачі, x> 0 і y> 0, тому розглядати точки M2, M3, M4 не потрібно.

Позначимо

$$\boldsymbol{Q} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}; -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо значення виразу Q в точці M1. Для цього обчислимо $\varphi'_x = 2x, \varphi'_y = 2y, \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda,$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

Маємо $Q = (2y; -2x)\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2y \\ -2x \end{pmatrix}$.

Отже, $(M_1) = (2\ -2)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -16 < 0$, тобто в точці M1 функція z = xy має умовний локальний максимум, який дорівнює z (1, 1) = 1. Тому робимо висновок, що найбільший можливий дохід підприємства 1 млн. грн.

Ми розглянули лише деякі приклади застосування математичного аналізу при вивченні курсу вищої математики для студентів економічних спеціальностей, але й вони збагатять досвід студентів, сприятимуть кращому засвоєнню предмета, навчать застосовувати елементи математики у різних ситуаціях, які можуть виникнути в майбутньому на виробництві, тощо.

Використані джерела

Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. Посібник. – К.: Либідь. 2007. – 770 с.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах : Учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Высшая школа. 1980. – 320 с.

LapaT.V.,MovshaA.M.

Applying of Differential Calculus of Functions of Several Variables
in Economic Research in Teaching
of Higher Mathematics for Economists

The article deals with examples of solving Applied Problems of Mathematics character on "Differentialcalculus of functions of several variables" at practicallessons for students of economicspecialties.

Key words: higher mathematics, partial derivatives, applying ineconomy.

Стаття надійшла до редакції 25.08.2013 р.