УДК 517.956.4

Лось В.М., Мурач О.О.

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В УТОЧНЕНІЙ СОБОЛЕВСЬКІЙ ШКАЛІ

В уточненій соболєвській шкалі досліджено мішану задачу для рівняння теплопровідності з крайовою умовою Діріхле та однорідною початковою умовою. Ця шкала складається з анізотропних гільбертових просторів Хермандера, для яких показниками гладкості служать довільне дійсне число і функція, правильно змінна на нескінченності за Караматою. Встановлено, що оператор, породжений мішаною задачею, здійснює ізоморфізми між відповідними просторами Хермандера. Знайдено нові достатні умови, за яких узагальнені розв'язки задачі мають неперервні класичні похідні.

Ключові слова: *рівняння теплопровідності, мішана задача, повільно змінна функція, простір Хермандера, уточнена соболєвська шкала, теорема про ізоморфізми.*

Вступ. В статті розглянуто застосування деяких анізотропних функціональних просторів $H^{s,s/2,\varphi}$ узагальненої гладкості до рівняння теплопровідності. Показниками гладкості для цих просторів служать довільні дійсний числовий параметр s та неперервна функція $\varphi(r):[1,+\infty)\to(0,+\infty)$, повільно змінна на нескінченності за Й. Караматою [1]. Остання властивість значить, що $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)}=1$ для довільного $\lambda>0$. Стандартним прикладом такої функції є логарифмічна функція $\varphi(r)=\ln(r+1)$ аргументу $r\geq 1$.

Зазначені простори утворюють уточнену анізотропну соболєвську шкалу. Вона дозволяє більш тонко охарактеризувати гладкість/регулярність функцій/розподілів у термінах перетворення Фур'є, ніж класична соболєвська шкала [2, 3, 4].

Відмітимо, що уточнена ізотропна соболєвська шкала виявилася корисною в теорії еліптичних операторів і еліптичних крайових задач [5, 6].

Постановка задачі. Нехай $\Omega:=(0,l)\times(0,\tau)$–прямокутник в $\mathbf{R}^2$. Розглянемо в Ω мішану задачу для рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\ 0<x<l,\ 0<t<\tau, \tag{1}$$

$$u(0,t)=g_0(t),\ u(l,t)=g_1(t),\ 0<t<\tau \tag{2}$$

$$u(x,0)=0,\ 0<x<l. \tag{3}$$

Введемо простори, в яких розглядатимемо задачу (1)–(3).

Нехай M є множина усіх неперервних функцій $\varphi(r):[1,+\infty)\to(0,+\infty)$, повільно змінних на нескінченності за Караматою. Нехай $s\in R,\ \varphi\in M$. Позначимо через $H^{s,s/2,\varphi}\left(\mathbf{R}^2\right)$ лінійний простір усіх повільно зростаючих розподілів $u\in S'(\mathbf{R}^2)$ таких, що перетворення Фур'є $\tilde{u}$ розподілу u є локально інтегрованою за Лебегом на $\mathbf{R}^2$ функцією, що задовольняє умову

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\xi|^2+|\eta|\right)^s\varphi^2\left(\sqrt{1+|\xi|^2+|\eta|}\right)\left|\tilde{u}(\xi,\eta)\right|^2 d\xi d\eta<\infty.$$

У цьому просторі означена гільбертова норма за формулою

$$\|u\|^2_{H^{s,s/2,\varphi}\left(R^2\right)}:=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\xi|^2+|\eta|\right)^s\varphi^2\left(\sqrt{1+|\xi|^2+|\eta|}\right)\left|\tilde{u}(\xi,\eta)\right|^2 d\xi d\eta.$$

Простір $H^{s,s/2,\varphi}\left(\mathbf{R}^2\right)$ є окремий гільбертів випадок просторів, введених і систематично досліджених Л. Хермандером [7, 8]. У випадку, коли $\varphi(t)\equiv 1$, цей простір стає анізотропним простором Соболєва $H^{s,s/2}\left(\mathbf{R}^2\right)$.

Введемо потрібні нам аналоги цих просторів для області Ω. Покладемо

$$H_{+}^{s,s/2,\varphi}\left(\mathbf{R}^2\right):=\left\{\, u\in H^{s,s/2,\varphi}\left(\mathbf{R}^2\right) : \operatorname{supp} u\subseteq \mathbf{R}\times\left[0,+\infty\right)\right\},$$

$$H_{+}^{s,s/2,\varphi}\left(\Omega\right):=\left\{\, u\big|_{\Omega} : u\in H_{+}^{s,s/2,\varphi}\left(\mathbf{R}^2\right)\right\},$$

$$\|v\|_{H_{+}^{s,s/2,\varphi}(\Omega)}:=\inf\left\{\, \|u\|_{H^{s,s/2,\varphi}\left(\mathbf{R}^2\right)} : u\in H_{+}^{s,s/2,\varphi}\left(\mathbf{R}^2\right),\ u=v \ \text{в}\ \Omega\right\},$$

де $v\in H_{+}^{s,s/2,\varphi}\left(\Omega\right)$. Аналогічно вводяться ізотропні простори $H^{s,\varphi}\left(\mathbf{R}\right)$, $H_{+}^{s,\varphi}\left(\mathbf{R}\right)$ та $H_{+}^{s,\varphi}\left(0,\tau\right)$.

Дослідимо задачу (1)–(3) в уточненій соболєвській шкалі

$$\left\{\, H_{+}^{s,s/2,\varphi}\left(\Omega\right) : s\in\mathbf{R}, \varphi\in M\right\}. \tag{4}$$

Основні результати. Мішана задача (1) – (3) має наступну фундаментальну властивості в шкалі просторів (4).

Теорема 1. Для довільних параметрів $s>2$ і $\varphi\in M$ оператор, породжений задачею (1)-(3), встановлює ізоморфізм

$$H_{+}^{s,s/2,\varphi}\left(\Omega\right)\leftrightarrow H_{+}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}\left(\Omega\right)\oplus\left(H_{+}^{(s-1/2)/2,\varphi}\left(0;\tau\right)\right)^2.$$

Застосування шкали (4) дозволяє отримати достатні умови існування і неперервності класичних похідних розв’язку задачі (1)–(3).

Нехай k є довільне парне натуральне число, а $C^{k,k/2}\left(\bar{\Omega}\right)$ є лінійний простір функцій $u(x,t)$, які мають на $\bar{\Omega}$ неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial^{j+r}u(x,t)}{\partial x^j\partial t^r}$ для всіх цілих невід’ємних індексів j та r таких, що $j+2r\le k$.

Теорема 2. Нехай функціональний параметр $\varphi\in M$ задовольняє умову $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dt}{t\varphi^2(t)}<\infty$. Припустимо, що функція $u\in H_{+}^{2,1}\left(\Omega\right)$ є узагальненим розв’язком мішаної задачі (1) – (3), де

$$f\in H_{+}^{k-1/2,(k-1/2)/2,\varphi}\left(\Omega\right),\qquad g_0, g_1\in H_{+}^{(k+1)/2,\varphi}\left(0,\tau\right). \tag{5}$$

Тоді $u\in C^{k,k/2}\left(\bar{\Omega}\right)$.

Щодо останньої теореми зауважимо наступне. Якщо при дослідженні узагальненого розв’язку задачі (1)–(3) на наявність класичних похідних використовувати лише соболєвську шкалу (випадок $\varphi\equiv 1$), то доведеться замість умов (5) вимагати, щоб для деякого $\varepsilon>0$ виконувались включення

$$f\in H_{+}^{k-1/2+\varepsilon,(k-1/2+\varepsilon)/2}\left(\Omega\right),\ g_0, g_1\in H_{+}^{(k+1+\varepsilon)/2}\left(0,\tau\right).$$

Вони завищують основну гладкість правих частин, яка задається числовим параметром s.

Обґрунтування результатів. У випадку $\varphi\equiv 1$, $s/2\in N$ та $s\ge 2$ теорема 1 є класичним результатом М.С. Аграновіча та М.І. Вішика [2]. Для довільного $\varphi\in M$ ця теорема доводиться інтерполяцією з функціональним параметром анізотропних соболєвських просторів (пор. з [5, 6], де розглянуто ізотропні простори).

Теорема 2 випливає з теореми 1 та теореми вкладання Хермандера [7] (пор. з [5,6] де подібний результат отриманий для узагальнених розв'язків еліптичних крайових задач).

Висновки. В статті доведено, що оператор, відповідний мішаній задачі (1)-(3), встановлює ізоморфізм на уточненій соболєвській шкалі (теорема 1). Знайдені нові достатні умови неперервності узагальнених похідних розв'язків цієї задачі (теорема 2). Отримані результати уточнюють класичні теореми [2,3,4] про розв'язність мішаних параболічних задач та властивості їх розв'язків в соболєвській шкалі гільбертових функціональних просторів стосовно рівняння теплопровідності.

Запропонована методика доведень (застосування інтерполяції з функціональним параметром і теореми вкладення Хермандера) може бути застосована для загальних мішаних параболічних задач.

Використані джерела

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции.– Москва: Наука, 1985.–142с.
2. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи математических наук.– 1964.– Т.19, N3.– С.53-161.
3. S. D. Eidel'man, Parabolic equations, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 63 (Partial differential equations, VI.Elliptic and parabolic operators). – Berlin : Springer, 1994. – P. 205–316.
4. Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.Параболическиеграничныезадачи.–Кишинев: Штиница, 1992.– 328 с.
5. Михайлец В. А., Мурач А. А.Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи // Праці Інституту математики НАН України.– 2010.– Т.84.– 372с.
6. MikhailetsV. A., MurachA. A. The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math.Anal.– 2012. – V. 6, №2. –P. 211–281.
7. Хемандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.– Москва: Мир, 1965.– 380с.
8. Хемандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т.2.Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.– Москва: Мир, 1965.– 380 с.

Los V.N., Murach A.A.

MIXED PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION IN THE REFINED SOBOLEV SCALE

Themixed problem for the heat equation with theDirichlet boundary condition and homogeneous initial condition is investigated in the refined Sobolev scale.ThelatterconsistsofanisotropicHörmanderspaces whose smoothness indices are given by an arbitrary real number and function that varies slowly at infinity in the sense of Karamata. We show that the operator generated by the mixed problem sets isomorphisms between corresponding Hörmander spaces. We find new sufficient conditions for generalized solutions of the problem to have continuous derivatives.

Key words: *heat equation, mixed problem, slowly varying function, Hörmander space, refined Sobolev scale, theorem on isomorphisms.*

Стаття надійшла до редакції 06.06.2013 р.