УДК 512.075

Майборода І.М.

КЛАСИЧНІ НЕРІВНОСТІ І ЗАДАЧІ НА ЕКСТРЕМУМИ

Наводяться найпростіші доведення класичних нерівностей та їх застосування до задач на екстремуми.

Ключові слова: *нерівність, середнє арифметичне, середнє геометричне, середнє квадратичне, найбільше та найменше значення.*

Психологи вважають, що для запам'ятання розв'язків задач краще розв'язати одну задачу п'ятьма способами, ніж розв'язати п'ять задач, але одним способом. Дійсно, якщо розв'язок задачі не сподобався людині, то скоріше за все вона забуде його. Але якщо людина побачить, що задача розв'язана багатьма способами, то вона, по-перше, вже зверне більшу увагу на цю задачу, а по-друге, зможе знайти найбільш прийнятий для себе спосіб.

Хороший математик, так як і хороший майстер, повинен володіти багатьма способами розв'язування задач одного класу, в тому числі й задач на екстремум. Всім відомо загальний метод за допомогою диференціального числення розв'язування таких задач. Поняття екстремума застосовується і до доведення нерівностей.

У цій статті наводяться (на думку автора) найпростіші доведення класичних нерівностей і показується застосування їх до розв'язування задач на екстремуми. Цей матеріал можна застосовувати при вивченні відповідних тем з математики в курсі середньої школи. Багато цікавих задач на екстремуми заховано в різного роду "класичних нерівностях".

Нерівність між середнім геометричним і середнім арифметичним

Теорема. Для будь-яких невід'ємних чисел $x_1, x_2 \dots, x_n$ має місце нерівність

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \tag{1}$$

Нерівність точна. Це значить, що в (1) інколи досягається рівність, це буває тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Розглянемо випадок спочатку для $n = 2$. Їх середнім арифметичним називають число $\dfrac{a+b}{2}$, де $a \ge 0$ і $b \ge 0$, а середнім геометричним число $\sqrt{ab}$, тобто доведемо, що $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$.

Розглянемо очевидну нерівність $0 \le (a-b)^2 \Rightarrow 2ab \le a^2 + b^2 \Rightarrow 4ab \le a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Таким чином $4ab \le (a+b)^2$. Звідки

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \tag{2}$$

Користуючись поняттям арифметичного квадратного кореня нерівність (2) доводиться ще краще, а саме $0 \le (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \Rightarrow a - 2\sqrt{ab} + b$. Звідки $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$.

В загальному випадку найпростіше доведення мабуть належить Елерсу. Доведемо по індукції, що із $x_1 \dots x_n = 1,\ x_i > 0$ слідує нерівність $x_1 + \dots + x_n \ge n$. Для $n = 1$ це очевидно. Нехай для $n = m$ твердження доведено, і припустимо, що $x_1 \dots x_m \cdot x_{m+1} = 1$. Тоді існують два числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \ge 1$, а $x_2 \le 1$ і $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \le 0$, або $x_1 \cdot x_2 + 1 \le x_1 + x_2$. Із припущення індукції слідує, що

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m + x_{m+1} \ge 1 + x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_m + x_{m+1} \ge 1 + m,$$

так як $x_1 \cdot x_2 + x_3 + \dots + x_{m+1} \ge m$ за припущенням. Звідси $\dfrac{x_1 + \dots + x_{m+1}}{1+m} \ge 1 = \sqrt[m+1]{x_1 \dots x_{m+1}}$.

У відомій книжці Е. Беккенбеха і Р. Беллмана "Нерівності" наведено дванадцять доведень цієї нерівності.

З цієї теореми слідують важливі наслідки для застосування до задач на екстремуми.

Наслідок 1. Добуток n додатних чисел приймає найбільше значення при рівності співмножників, якщо сума їх є величина постійна.

Наслідок 2. Сума n додатних чисел приймає найменше значення при рівності доданків, якщо їх добуток є величина постійна.

Задача 1. Знайти максимум добутку двох чисел, якщо їх сума є постійною.

Так як сума чисел постійна, то добуток їх згідно наслідку 1 буде найбільшим при рівності їх, тобто при рівності цих чисел.

Задача 2. Знайти найбільшу площу прямокутного трикутника, якщо сума його довжин катетів постійна.

Так як сума довжин катетів постійна, а площа прямокутного трикутника $S = \frac{1}{2}ab$, то згідно наслідку 1 площа трикутника буде найбільшою при $a = b$. Отже, серед всіх прямокутних трикутників з постійною сумою довжин катетів найбільшу площу має рівнобедрений прямокутний трикутник.

Задача 3.В дану кулю вписати конус найбільшого об'єму.

Позначимо через R радіус кулі, r і h відповідно радіус основи і висоту конуса. Тоді об'єм конуса дорівнює $V = \frac{\pi h^2(2R-h)}{3}$, або $\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2R-h)$.

Середнє арифметичне $\frac{\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+2R-h}{3} = \frac{2R}{3}$ величина постійна. Рівність досягається, коли $\frac{h}{2} = 2R-h,$ звідки $h = \frac{4}{3}R$. Отже, при $h = \frac{4}{3}R$ об'єм конуса максимальний.

Задача 4. В даний конус вписати циліндр найбільшого об'єму.

Нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним є цікавою темою позакласної роботи з математики.

Нерівність між середнім арифметичним і середнім квадратичним

Теорема.Середнє арифметичне не більше середнього квадратичного, тобто $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \le \left(\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$, де $\left(\frac{x_1^2+\ldots x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ – середнє квадратичне.

Нерівність є точною. Якщо всі числа рівні, вона перетворюється в рівність. Нерівність можна доводити по-різному. На наш погляд, найпростіше наступне.

Піднісши до квадрату $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ і скориставшись нерівністю $2ab \le a^2+b^2$, одержимо

$$\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\ldots+2x_{n-1}x_n}{n^2} \le$$

$$\le \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+(x_1^2+x_2^2)+(x_1^2+x_3^2)+\ldots+(x_{n-1}^2+x_n^2)}{n^2} = \frac{n(x_1^2+\ldots+x_n^2)}{n^2} = \frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n},$$

що й потрібно було довести.

Порівнюючи нерівності між середнім арифметичним, середнім геометричним і середнім квадратичним, одержуємо, що для будь-яких невід'ємних чисел $x_1, \ldots, x_n$ має місце точна нерівність $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n} \le \left(\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$,зокрема при $n=2$ $\sqrt{x_1x_2} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$, що й потрібно було довести.

Теорема.Середнє геометричне не перевищує середнього квадратичного.

Наслідок 1.Добуток n додатних чисел є найбільшим при рівності співмножників, якщо сума їх квадратів є величина постійна.

Наслідок 2. Сума квадратів n додатних чисел є найменшою при рівності доданків, якщо добуток їх є величина постійна.

Задача 5.Серед прямокутників, вписаних в круг, знайти прямокутник найбільшої площі. (квадрат)

Задача 6.Серед прямокутних паралелепіпедів, вписаних в кулю, знайти паралелепіпед найбільшого об'єму (куб).

Задача 7.Серед циліндрів, вписаних в кулю, знайти циліндр найбільшого об'єму (якщо радіус кулі R, радіус циліндра r, висота циліндра h, то $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$).

Нерівність Коші-Буняковського

Теорема.Для будь-яких дійсних чисел $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Маємо для будь-якого числа x

$$(a_1 + b_1 x)^2 + \ldots + (a_n + b_n x)^2 = a_1{}^2 + \ldots + a_n{}^2 + 2x \cdot (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) + (b_1{}^2 + \ldots + b_n{}^2) x^2 = bx^2 + 2cx + a,$$

де $b = b_1{}^2 + \ldots + b_n{}^2$, $c = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$, $a = a_1{}^2 + \ldots + a_n{}^2$. Так як $b > 0$, $bx^2 + 2cx + a \ge 0$, то дискримінант $c^2 - ab \le 0$, тобто $(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \le (a_1{}^2 + \ldots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + \ldots + b_n{}^2)$, що й потрібно було довести. Цю нерівність можна розглянути в школі при вивченні квадратного тричлена.

Цю нерівність можна розглянути при вивченні скалярного добутку векторів. Нехай вектори $\bar{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ і $\bar{b}\,(b_1, b_2, b_3)$. Тоді скалярний добуток дорівнює $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \left|\bar{a}\right| \left|\bar{b}\right| \cos\varphi$, де $\varphi -$ кут між ними, $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$, $\left|\bar{b}\right| = \sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}$. Так як $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, то $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} \cdot \sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}\ \cos\varphi$. Так як $\left|\cos\phi\right| \le 1$, то $\sqrt{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \le (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)\ (b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2)$, що й треба було довести.

Нерівність точна. Вона перетворюється в рівність при $\cos 0^\circ = 1$, тобто при паралельності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Узагальнюючи поняття вектора і скалярного добутку на *n*-мірний простір, одержимо початкову нерівність.

Наслідок 1. Якщо суми квадратів чисел a_i і b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ є величини постійні, то добуток їх приймає найбільше значення при рівності співмножників, тобто при $a_i = b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Наслідок 2. Якщо сума добутків є величина постійна, то добуток суми квадратів приймає найменше значення при рівності співмножників, тобто при $a_i = b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Задача 8. Знайти найбільше і найменше значення функції
$f(x,\ y) = 6\sin x \cos y + 2\sin x \sin y + 3\cos x.$

Нехай $\bar{a} = (6;\ 2;\ 3)$, $\bar{b} = (\sin x \cos y;\ \sin x \sin y;\ \cos x)$. Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, маємо $f(x, y)^2 \le (6^2 + 2^2 + 3^2)\ ((\sin x \cos y)^2 + (\sin x \sin y)^2 + \cos^2 x) = 49\ \ -7 \le f(x, y) \le 7.$

Отже, найменше значення $f(x,\ y)$ дорівнює –7, найбільше 7.

Задача 9. Який із всіх прямокутних паралелепіпедів з даною сумою ребер має найменшу діагональ.

Нехай x, y, z – ребра паралелепіпеда, їх сума $x + y + z = const$. Квадрат діагоналі $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, одержимо $c = 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \le \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3}\,d$.

Рівність досягається при $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Тобто паралелепіпедом є куб.

Використані джерела

1. Сорокин Г.А. Доказательство некоторых классических неравенств с помощью производной // Математика в школе.– 1980.– № 6.
2. Сорокин Г.А. Экстремум и неравенство // Математика в школе.– 1997.– № 1.
3. Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г. Неравенства.–М.-Л., 1948.

Maiboroda I.M.

CLASSICINEQUALITYAND PROBLEMSFOREXTREMUMS

We give the simplest proof of the classical inequalities and their application to problems on the extremums.

Keywords:*inequality,the arithmetic mean,geometric mean, mean square, the highest and lowestvalues.*

Стаття надійшла до редакції 02.06.2013 р.