УДК 517.988

Майборода І.М.

про узагальнення одного двостороннього методу розв’язування операторних рівнянь

Розглядається узагальнення одного двостороннього методу розв’язування операторних рівнянь.

Ключові слова: операторне рівняння, розв’язок, простір, алгоритм, обернений гетеротонний оператор.

При наближеному розв’язуванні операторних рівнянь дуже зручними є двосторонні алгоритми. Вони визначають два наближення, що апроксимують шуканий розв’язок знизу і зверху, що дозволяє звести питання про оцінку похибки до простого обчислення норми різниці знайдених наближень.

Нехай нелінійне операторне рівняння

$$x = T\,x \quad (1)$$

задане на деякій випуклій множині $D \subset E,$ де E структурно-нормований за допомогою К-лінеала N простір [1]. Нагадаємо деякі означення. Лінійна система E називається простором, структурно-нормованим за допомогою К-лінеала N, якщо кожному елементу $x \in E$ співставлений додатний елемент $\|x\| \in N$, що називається узагальненою нормою, і задовольняє звичайним аксіомам нормованого простору:

1. $\|x\| > \theta,$ якщо $x \neq \theta$;

2. $\|\lambda\,x\| = |\lambda|\,\|x\|;$ 3. $\|x_1 + x_2\| \le \|x_1\| + \|x_2\|.$

При цьому К-лінеал N називають нормуючим К-лінеалом.

Послідовність $\{x_n\}$ елементів $x_n \in N$ називають (0)-збіжною до елемента $x^* \in N$ $\left((0) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*\right),$ якщо існує такий елемент $b \in N$ і деяка монотонно спадна послідовність чисел $\{\lambda_n\},$ $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} 0,$ що $\|x_n - x^*\| \le \lambda_n b,\;\; n = 1, 2, \dots$. На основі збіжності в нормуючому К-лінеалі вводиться поняття збіжності в просторі E: послідовність $\{x_n\}$ елементів $x_n \in E$ (b_k)-збіжна до $x^* \in E$, якщо $(0) - \lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x^* \| = \theta.$. При цьому пишуть $(b_k) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Похідній Фреше $T'(x) \in L(E,E)$ оператора T співставимо гетеротонний оператор $B(u,\upsilon)$, визначений для $\forall u,\upsilon \in D$ і такий, що

$B(x,y) \le B(u,\upsilon)$, якщо $x \le u,\ \upsilon \le y$, (2)

$B(x,x) = T'(x)$. (3)

Існування такого оператора слідує вже з того факту, що якщо $T'(x)$ є ізотонним (антитонним) оператором, то досить покласти $B(u,u) = T'(u)$ $\left(B(\upsilon,\upsilon) = T'(\upsilon)\right)$.

Якщо $u_0, \upsilon_0 \in D$ – деякі початкові наближення до розв'язку x^* рівняння (1), то припускається існування оператора $\Gamma = \left[I - B\left(u_0(x), \upsilon_0(x)\right)\right]^{-1}$, де $I -$ тотожний оператор, і $\Gamma(x) = F(x,x)$, причому

$F(x;y) \le F(u,\upsilon),$ якщо $x \le u;\ \upsilon \le y$ (4)

і для оператора $T(x)$ має місце формула Ньютона-Лейбніца

$$T(x_0 + h) - T(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} T'(x)\,dx = \int_0^1 T'(x_0 + t\,h)\,h\,dt.$$

Послідовні наближення $\{u_n\}$ і $\{\upsilon_n\}$ до розв'язку рівняння (1) визначимо за допомогою алгоритма

$$u_{n+1} = F\left(T\,u_n - B(u_0,\upsilon_0)\,u_n,\ T\,\upsilon_n - B(u_0,\upsilon_0)\,\upsilon_n\right) \quad (5)$$

$$\upsilon_{n+1} = F\left(T\,\upsilon_n - B(u_0,\upsilon_0)\,\upsilon_n,\ T\,u_n - B(u_0,\upsilon_0)\,u_n\right) \quad (6)$$

Відмітимо, що якщо $\Gamma = \Gamma_+ + \Gamma_-$, де $\Gamma_+ -$ ізотонний, а $\Gamma_- -$ антитонний, то одержимо алгоритм роботи [2].

Теорема 1.Якщо для початкових наближень $u_0, \upsilon_0 \in D$ проведена ітерація за формулами (5), (6) і для елементів $u_0, \upsilon_0,\ u_1, \upsilon_1$ має місце нерівність

$u_0 \le u_1 \le \upsilon_1 \le \upsilon_0$, (7)

то має місце нерівність

$u_n \le u_{n+1} \le \upsilon_{n+1} \le \upsilon_n\,,\quad n = 1, 2, \ldots$. (8)

Доведення.Нехай нерівність (8) виконується для деякого $n \ge 0$. Доведемо, що

$$Tu_{n+1} - B(u_0, \upsilon_0)\, u_{n+1} \ge Tu_n - B(u_0, \upsilon_0)\, u_n \quad (9)$$

$$T\upsilon_{n+1} - B(u_0, \upsilon_0)\, \upsilon_{n+1} \le T\upsilon_n - B(u_0, \upsilon_0)\, \upsilon_n \quad (10)$$

$$Tu_{n+1} - B(u_0, \upsilon_0)\, u_{n+1} \le T\upsilon_{n+1} - B(u_0, \upsilon_0)\, \upsilon_{n+1} \quad (11)$$

За припущенням $u_{n+1} - u_n \ge 0$ і $Tu_{n+1} - Tu_n - B(u_0, \upsilon_0)(u_{n+1} - u_n) =$

$$= \int_0^1 \Big(B\,\big(u_n + t\,(u_{n+1} - u_n),\, u_n + t\,(u_{n+1} - u_n) \big)\,(u_{n+1} - u_n)\,dt - B(u_0, \upsilon_0) \Big)\,(u_{n+1} - u_n) =$$

$$= \int_0^1 B\,\big(u_n + t\,(u_{n+1} - u_n),\, u_n + t\,(u_{n+1} - u_n) \big) - B(u_0, \upsilon_0)\,(u_{n+1} - u_n)\,dt \ge 0,$$

так як за властивістю (2) $B\,\big(u_n + t\,(u_{n+1} - u_n),\, u_n + t\,(u_{n+1} - u_n) \big) - B(u_0, \upsilon_0) \ge 0$, то виконується (9).

Аналогічно доводиться нерівність (10). Доведемо нерівність (11).

$$T\upsilon_{n+1} - T\,u_{n+1} - B(u_0, \upsilon_0)\,(\upsilon_{n+1} - u_{n+1}) = \int_0^1 B\,\big(u_{n+1} + t\,(\upsilon_{n+1} - u_{n+1}),\, u_{n+1} + t\,(\upsilon_{n+1} - u_{n+1}) \big) \cdot$$

$$(\upsilon_{n+1} - u_{n+1})\,dt - B(u_0, \upsilon_0)\,(\upsilon_{n+1} - u_{n+1}) =$$

$$= \int_0^1 \Big(B\big(u_{n+1} + t\,(\upsilon_{n+1} - u_{n+1}),\, u_{n+1} + t\,(\upsilon_{n+1} - u_{n+1}) \big) - B(u_0, \upsilon_0) \Big)\,(\upsilon_{n+1} - u_{n+1})\,dt \ge 0,$$

так як $u_{n+1} \le \upsilon_{n+1}$ за припущенням, а $B\left(u_{n+1} + t(\upsilon_{n+1} - u_{n+1}),\, u_{n+1} + t(\upsilon_{n+1} - u_{n+1}) \right) - B(u_0, \upsilon_0) \ge 0$ за властивістю (2).

Введемо позначення: $\alpha_n = T u_n - B(u_0, \upsilon_0) u_n$

$\beta_n = T\upsilon_n - B(u_0, \upsilon_0)\upsilon_n$

тоді $u_{n+2} - u_{n+1} = F(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) - F(\alpha_n, \beta_n) \ge 0$, бо $\alpha_{n+1} \ge \alpha_n,\ \beta_{n+1} \le \beta_n$ і властивістю (4), тобто

$u_{n+1} \le u_{n+2}$ (12)

Для порівнювання υ_{n+1} і υ_{n+2} застосуємо нерівність (10).

$\upsilon_{n+1} - \upsilon_{n+2} = F(\beta_n, \alpha_n) - F(\beta_{n+1}, \alpha_{n+1}) \ge 0$, так як $\alpha_{n+1} \ge \alpha_n,\ \beta_{n+1} \le \beta_n$ і властивістю (4), тобто

$\upsilon_{n+2} \le \upsilon_{n+1}$. (13)

Покажемо, що із припущення $u_{n+1} \le \upsilon_{n+1}$ слідує нерівність $u_{n+2} \le \upsilon_{n+2}$.

Так як $\upsilon_{n+2} - u_{n+2} = F(\beta_{n+1}, \alpha_{n+1}) - F(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ і згідно нерівності (11) $\beta_{n+1} \ge \alpha_{n+1}$. За властивістю (4) $F(\beta_{n+1}, \alpha_{n+1}) - F(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) \ge 0$, тобто

$u_{n+2} \le \upsilon_{n+2}$ (14)

Таким чином, нерівності (8) доведені для $n+1$, а так як при $n=0$ вірні за умовою теореми, то тим самим вони доведені для любого n.

Теорема 2.Якщо початкові наближення $u_0, \upsilon_0 \in D$ такі, що задовольняють нерівність $u_0 \le x^* \le \upsilon_0$, де $x^* -$ розв’язок рівняння (1), то для послідовних наближень, що визначаються алгоритмом (5)-(6), мають місце нерівності

$u_n \le x^* \le \upsilon_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$. (15)

Доведення.Нехай нерівність (15) виконується для деякого $n \ge 0$. Так як x^*- розв'язок, то $x^* = F\left(Tx^* - B(u_0, \upsilon_0)x^*,\ Tx^* - B(u_0, \upsilon_0)x^*\right)$ і згідно припущенню $u_n \le x^* \le \upsilon_n$, то $x^* - u_{n+1} = F\left(Tx^* - B(u_0, \upsilon_0)x^*,\ Tx^* - B(u_0, \upsilon_0)x^*\right) - F\left(Tu_n - B(u_0, \upsilon_0)u_n,\ T\upsilon_n - B(u_0, \upsilon_0)\upsilon_n\right) \ge 0$,так як $Tx^* - B(u_0, \upsilon_0)x^* \ge Tu_n - B(u_0, \upsilon_0)u_n,\ Tx^* - B(u_0, \upsilon_0)x^* \le T\upsilon_n - B(u_0, \upsilon_0)\upsilon_n$ відповідно за нерівностями (9) і (10) і властивістю (4). Нерівність $x^* \le \upsilon_{n+1}$ доводиться аналогічно.

Визначимо швидкість збіжності послідовностей $\{u_n\}$, $\{\upsilon_n\}$ до розв'язку x^*, припускаючи, що в нормованому просторі N визначено множення елементів і норма додатних елементів монотонна. Введемо позначення: $\sigma_n = \varepsilon_0 \prod\limits_{i=1}^{n} J_i,\ n = 1, 2, 3, \ldots$, $J_k = \eta_0 \left(1 + \frac{1}{2} \prod\limits_{i=1}^{k-1} J_i\right)$, $k = 2, 3, \ldots$, $J_1 = \frac{3}{2}\eta_0$,

$\eta_0 = (Q_1 + Q_2)(L_1 + L_2)\varepsilon_0,\ \ \varepsilon_0 = \|\upsilon_0 - u_0\|$, (16)

де $L_1, L_2, Q_1, Q_2 -$ лінійні додатні оператори, що діють в N.

Теорема 3.Нехай рівняння (1) має на відрізку $[u_0, \upsilon_0]$ єдиний розв'язок x^*. Виконуються умови теорем 1 і 2, а також умови:

Оператори $B(u, \upsilon)$ і $F(u, \upsilon)$ задовольняють умовам Ліпшиця по обох змінних

$\|B(u, \upsilon) - B(x, y)\| \le L_1 \|u - x\| + L_2 \|\upsilon - y\|$,

$\|F(u, \upsilon) - F(x, y)\| \le Q_1 \|u - x\| + Q_2 \|\upsilon - y\|$.

$(0) - \lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \theta$.

Тоді послідовності $\{u_n\}$ і $\{\upsilon_n\}$ відповідно знизу і зверху (b_k)-збіжні до розв'язку x^* рівняння (1) з швидкістю, що характеризується нерівностями

$\|x^* - u_n\| \le \sigma_n,\ \|\upsilon_n - x^*\| \le \sigma_n$. (17)

Доведення.Із (5)-(6) знаходимо

$$\upsilon_{n+1} - u_{n+1} = F(\beta_n, \alpha_n) - F(\alpha_n, \beta_n) = F(\beta_n, \alpha_n) - F(\alpha_n, \alpha_n) + F(\alpha_n, \alpha_n) - F(\alpha_n, \beta_n).$$

Переходячи до норми, одержимо

$$\|\upsilon_{n+1}-u_{n+1}\| \le \| F(\beta_n,\alpha_n)-F(\alpha_n,\alpha_n)\| + \| F(\alpha_n,\alpha_n)-F(\alpha_n,\beta_n)\| \le$$

$$\le Q_1\|\beta_n-\alpha_n\|+Q_2\|\beta_n-\alpha_n\| = (Q_1+Q_2)\|\beta_n-\alpha_n\|.$$

Оцінимо $\|\beta_n-\alpha_n\| = \| T\upsilon_n - B(u_0,\upsilon_0)\upsilon_n - Tu_n - B(u_0,\upsilon_0)u_n\| =$

$$= \left\| \int_0^1 B\left(u_n+t(\upsilon_n-u_n),\, u_n+t(\upsilon_n-u_n)\right)(\upsilon_n-u_n)\,dt - B(u_0,\upsilon_0)(\upsilon_n-u_n) \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^1 \left(B\left(u_n+t(\upsilon_n-u_n),\, u_n+t(\upsilon_n-u_n)\right) - B(u_0,\upsilon_0)\right)(\upsilon_n-u_n)\,dt \right\| \le$$

$$\le \int_0^1 \| B\left(u_n+t(\upsilon_n-u_n),\, u_n+t(\upsilon_n-u_n)\right) - B(u_0,\upsilon_0)\| \, \|(\upsilon_n-u_n)\,dt\| \le$$

$$\le \int_0^1 L_1\| u_n+t(\upsilon_n-u_n)-u_0\| + L_2\| u_n+t(\upsilon_n-u_n)-\upsilon_0\| \, \|\upsilon_n-u_n\|\,dt \le$$

$$\le (L_1+L_2)\left(\|\upsilon_0-u_0\| + \frac{1}{2}\|\upsilon_n-u_n\| \right)\|\upsilon_n-u_n\|. \qquad (18)$$

Підставляючи (18) в попередню нерівність, одержимо

$$\|\upsilon_{n+1}-u_{n+1}\| \le (Q_1+Q_2)(L_1+L_2)\left(\|\upsilon_0-u_0\| + \frac{1}{2}\|\upsilon_n-u_n\| \right)\|\upsilon_n-u_n\| \qquad (19)$$

Покладемо в (19) послідовно $n=0,1,2,\dots$. Враховуючи позначення (16), одержимо

$$\|\upsilon_1-u_1\| \le (Q_1+Q_2)(L_1+L_2)\cdot\frac{3}{2}\|\upsilon_1-u_1\|^2 = \frac{3}{2}\eta_0\varepsilon_0 = J_1\varepsilon_0 = \sigma_1$$

$$\|\upsilon_2-u_2\| \le (Q_1+Q_2)(L_1+L_2)\cdot\left(\|\upsilon_0-u_0\| + \frac{1}{2}\|\upsilon_1-u_1\| \right)\|\upsilon_1-u_1\| \le$$

$$\le (Q_1+Q_2)(L_1+L_2)\cdot\left(\varepsilon_0 + \frac{1}{2}J_1\varepsilon_0 \right)\varepsilon_0 J_1 = \eta_0\varepsilon_0\left(1+\frac{1}{2}J_1\right)\cdot J_1 = \varepsilon_0\cdot J_1 J_2 = \sigma_2.$$

Методом математичної індукції доводимо, що $\|\upsilon_n-u_n\| = \varepsilon_0 \prod_{k=1}^{n} J_k = \sigma_n$.

Так як з теореми 2 слідують нерівності

$$\theta \le x^* - u_n \le \upsilon_n - u_n, \quad \theta \le \upsilon_n - x^* \le \upsilon_n - u_n, \qquad (20)$$

то оцінка (17) слідує із монотонності норми і нерівностей (20), а (b_k)-збіжність послідовностей $\{u_n\}$, $\{\upsilon_n\}$ до розв'язку x^* – із нерівностей (17) і (0)-збіжності до θ послідовності $\{\sigma_n\}$.

Зауваження.Якщо простір Е-банаховий, то оператори Q_1, Q_2, L_1, L_2 замінюються відповідними константами q_1, q_2, ℓ_1, ℓ_2, а елементи $\varepsilon_0, \eta_0 \in N$ – константами $\bar{\varepsilon}_0, \bar{\eta}_0$. Для збіжності послідовностей $\{u_n\}$, $\{\upsilon_n\}$ в цьому випадку достатньо виконання нерівності $\bar{\eta}_0 = (q_1 + q_2)(\ell_1 + \ell_2)\bar{\varepsilon}_0 < \frac{3}{2}$ із якої слідують нерівності $J_1 = \frac{3}{2}\bar{\eta}_0 < 1$, $J_k < J_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$, а значить і збіжність до θ числової послідовності $\bar{\sigma}_n = \bar{\varepsilon}_0 \prod_{k=1}^{n} J_k$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Використані джерела

Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.– М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

Курпель Н.С., Шпортюк Г.А. О двустороннем методе решения операторных уравнений.– В сб.: Нелинейные краевые задачи математической физики.– К.: Изд-во Ин-та матем. АН УССР, 1972.

Maiboroda I.M.

The considered generalized bilateral method for decision
of the operators equations

It is considered generalized bilateral method for decision of the operators equations.

Keywords: operator equations, decision, algorithm, space, reverse, geteroton operator.

Стаття надійшла до редакції 02.06.2013 р.