УДК 517

Синенко М.А.

ДОСЛІДЖЕННЯ МНОЖИНИ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

В роботі вивчається множина розв'язків одного трансцендентного рівняння в залежності від параметра. Дослідження проводиться шляхом вивчення поведінки відповідних функцій.

Ключові слова: *параметр, розв'язки рівняння, функція, нерухома точка.*

Необхідність визначення кількості розв'язків алгебраїчного чи трансцендентного рівняння часто виникає як складова частина більш складних задач, наприклад, при відокремленні розв'язків рівняння. Для цього можна використовувати графічний метод. Однак, деякі рівняння потребують більш детального аналізу відповідних функцій. В даній роботі розглянемо приклад такого рівняння.

Визначимо кількістьрозв'язків рівняння

$$a^x = \log_a x \tag{1}$$

в залежності від параметра а. Відмітимо, що це рівняння є частинним випадком більш загального рівняння $f(x) = f^{-1}(x)$ і при будь-яких а еквівалентно рівнянню

$$f(f(x)) = x\,, \tag{2}$$

де $f(x) = a^x$.

Поряд з рівнянням (1) розглянемо також рівняння

$$f(x) = x \tag{3}$$

Якщо x_0 – нерухома точка функції $f(x)$, тобто $f(x_0) = x_0$, то x_0 є також розв'язком рівняння (2). Дійсно, $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$ [1].

Лема. Якщо функція $f(x)$ зростаюча на області визначення, то рівняння $f(f(x)) = x$ і $f(x) = x$ еквівалентні.

Доведення

Нехай x_0 – розв'язок рівняння (3), тоді $f(x_0) = x_0$ і, відповідно, $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, тобто x_0 розв'язок (2).

Навпаки, нехай $f(f(x_0)) = x_0$ і $x_0 \neq f(x_0)$. Тоді або $x_0 > f(x_0)$, або $x_0 < f(x_0)$. Оскільки $f(x)$ зростає, то в першому випадку маємо $f(x_0) > f(f(x_0)) = x_0$, а в другому, відповідно, $f(x_0) < f(f(x_0)) = x_0$. Отримано протиріччя, отже, $f(x_0) = x_0$.

Як видно із доведення, для еквівалентності рівнянь (2) і (3) суттєво зростання функції $f(x)$.Оскільки при $a > 1$ функція $y = a^x$ зростає, то рівняння (2)і (3) еквівалентні.

Дослідимо рівняння

$$a^x = x \tag{4}$$

Розпочнемо з випадку $a > 1$. Замінимо (4) на еквівалентне рівняння

$$a = \frac{\ln x}{x} \tag{5}$$

І для встановлення множини його розв'язків розглянемо функцію $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$.

$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1-\ln x}{x^2}$ і $\frac{d\varphi}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = e$. Неважко перевірити, що $x = e$ – точка максимуму функції $\varphi(x)$, причому $\varphi(e) = e^{-1}$. Отже, при $\ln a > e^{-1}$, тобто при $a > e^{e^{-1}}$ рівняння (4) не має розв'язків, при $a = e^{e^{-1}}$ має один розв'язок і при $1 < a < e^{e^{-1}}$ має два розв'язки.

Випадок $0 < a < 1$.

При $0 < a < 1$ рівняння $a^x = x$ має єдиний розв'язок. Однак, оскільки при заданому значенні a функція $f(x) = a^x$ спадна, рівняння (2) та (3) не еквівалентні. Перевіримо, чи має рівняння (1) інші розв'язки. Для цього розглянемо функцію

$$\psi(x) = a^x - \log_a x \tag{6}$$

та дослідимо її поведінку.

$$\psi'(x) = a^x - \frac{1}{x\ln a} = \frac{xa^x \ln^2 a - 1}{x\ln a} \qquad (7)$$

Відмітимо, що знаменник дробу (7) від'ємний при усіх $x > 0$ і, отже, знак $\psi'(x)$ протилежний до знаку чисельника дробу. Розглянемо тепер функцію

$$h(x) = xa^x \ln^2 a - 1 \qquad (8)$$

та знайдемо її точки екстремуму $h'(x) = \ln^2 a(a^x + xa^x \ln a) = a^x \ln^2 a(1 + x\ln a)$ $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x\ln a = 0$ $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x\ln a = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\ln a}$

Легко бачити, що при $x \in \left(0; -\dfrac{1}{\ln a}\right)$ функція $h(x)$ зростає, при $x \in \left(-\dfrac{1}{\ln a}; +\infty\right)$–спадає і досягає максимуму при $x = -\dfrac{1}{\ln a}$ причому $h_{\max} = h(-\dfrac{1}{\ln a}) = -\dfrac{1}{\ln a} a^{-\frac{1}{\ln a}} \ln^2 a - 1 = -a^{-\log_a e} \ln a - 1 = -\dfrac{\ln a}{e} - 1.$

Якщо $h_{\max}(x) \le 0$ при всіх додатних значеннях x, то $\psi'(x) \ge 0,$ функція $\psi(x)$ зростає і рівняння (1) має єдиний розв'язок.

Розв'язавши нерівність $-\dfrac{\ln a}{e} - 1 \le 0$, маємо $a \ge e^{-e}$. Отже, якщо

$$a \in (e^{-e}; 1) \qquad (9)$$

рівняння (1) має єдиний розв'язок.

При $a \in (0; e^{-e})$ $h_{\max} > 0$, причому $h(0) = -1$, $h(1) = a\ln^2 a - 1$. Оскільки функція $g(a) = a\ln^2 a$ досягає локального максимуму при $a = 1$, і цей максимум дорівнює 0, то $h(1) < 0$. Згідно з теоремою Больцано-Вейєрштрасса [2] функція $h(x)$ має два нулі, які ми позначимо α та β, причому $0 < \alpha < -\dfrac{1}{\ln a}$, $-\dfrac{1}{\ln a} < \beta < 1$. Це означає, що функція $\psi(x)$ зростає при $x \in (0; \alpha)$, спадає при $x \in (\alpha; \beta)$ і знову зростає при $x \in (\beta; 1)$. Точки α і β – відповідно точка локального максимуму та точка локального мінімуму функції $\psi(x)$.

Переконаємося, що x_0 – розв'язок рівняння $a^x = x$ – при $a \in (0; e^{-e})$ менше ніж $\dfrac{1}{e}$. Припустивши протилежне, а саме $x_0 > \dfrac{1}{e}$, отримаємо протиріччя. Дійсно, $x_0 = a^{x_0} < a^{e^{-1}} < \dfrac{1}{e}$. Далі обчислимо $h(x_0)$.

$$h(x_0) = x_0^2 \ln^2 x_0 - 1 = \ln^2 a^{x_0} - 1 = \ln^2 x_0 - 1 \qquad (10)$$

$\ln x_0 < -1$, тому $h(x_0) > 0$ і $\psi'(x_0) < 0$, тобто x_0 належить проміжку спадання функції $\psi(x)$ і, отже, $\alpha < x_0 < \beta$. Остання нерівність означає, що $\psi(\alpha) > 0$, а $\psi(\beta) < 0$, і при $a \in (0; e^{-e})$ рівняння $a^x = \log_a x$ має три розв'язки.

Використані джерела

1. Robert L. Devaney Dynamics of Simple Maps // Proceedings of Symposia in Applied Mathematics.– 1988.– Vol. 39.– P. 1–25.
2. Никольский С. М. Курс математического анализа.–М.: Наука, 1983.–466с.

Sinenko M. A.

THE EXPLORATION OF SOLUTIONS ONE EQUATION IN PARAMATER

The subject of the paper concerns itself with solutions of one equation in parameter. To describe this solution we study behavior of corresponding functions.

Key words: *parameter, solution of equation, function, fixed point.*

Стаття надійшла до редакції 02.06.2013 р.