УДК 517.956.223

Аноп А.В.

ПРО КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ В РОЗШИРЕНІЙ СОБОЛЄВСЬКІЙ ШКАЛІ

В розширеній соболєвській шкалі досліджена задача Діріхле для довільного правильно еліптичного рівняння, заданого в обмеженій евклідовій області з гладкою межею. Ця шкала складається з гільбертових ізотропних просторів Хермандера, для яких показником гладкості служить довільна функція, RO-змінна на нескінченності. Доведено, що оператор, відповідний задачі, є обмеженим і фредгольмовим (з нульовим індексом) в цій шкалі. Встановлена апріорна оцінка розв’язку задачі і досліджена його гладкість.

Ключові слова: задача Діріхле, простір Хермандера, розширена соболєвська шкала, RO-змінна функція, фредгольмів оператор, апріорна оцінка.

Вступ.Простори Соболєва відіграють фундаментальну роль в теорії еліптичних крайових задач. Оператор, відповідний такій задачі, є обмеженим і нетеровим у підходящих парах соболєвських просторів. З цього важливого факту випливають теореми про ізоморфізми, породжені задачею, апріорні оцінки її розв’язків, твердження про підвищення гладкості розв’язків (див., наприклад, [1–4]). З точки зору застосувань цих результатів, особливо в спектральній теорії диференціальних операторів, найбільш корисними є гільбертові простори.

У цьому зв’язку природно постає питання про дослідження еліптичних крайових задач в інших класах гільбертових функціональних просторів. Тут перспективною представляється розширена соболєвська шкала (р. с. ш.), введена в [5, 6]. Вона складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних відносно пар гільбертових просторів Соболєва, і припускає наступний конструктивний опис. Р. с. ш. є класом ізотропних гільбертових просторів Хермандера [4], для яких показником гладкості служить довільна радіальна функція, RO-змінна на нескінченності [7].

В статті розглянута задача Діріхле для довільного правильно еліптичного диференціального рівняння, заданого в обмеженій евклідовій області з межею класу C^∞. Вона є важливим прикладом еліптичної крайової задачі. Мета роботи – встановити властивості задачі Діріхле в р. с. ш: фредгольмовість відповідного оператора, апріорну оцінку її розв’язків і твердження про підвищення їх гладкості.

Відмітимо, що властивості еліптичних операторів на многовидах без краю досліджені в р. с. ш в роботах [8–11]. Для більш вузького класу просторів Хермандера – уточненої соболєвської шкали – теорія еліптичних операторів і еліптичних крайових задач побудована в [5].

Постановка задачі.Нехай Ω – довільна відкрита обмежена область в евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$, де $n \geq 2.$ Припустимо, що її межа Γ є нескінченно гладким замкненим многовидом розмірності $n-1.$

Розглянемо в області Ω крайову задачу Діріхле для довільного правильно еліптичного лінійного диференціального рівняння:

$$Au \equiv \sum_{|\mu|\leq 2q} a_\mu(x) D^\mu u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad (1)$$

$$B_j u \equiv \frac{\partial^{j-1} u}{\partial \nu^{j-1}} = g_j$$ на Г для $j = 1, \ldots, q.$ (2)

Тут $2q \geq 2$ є парний порядок рівняння (1). Припускаємо, що всі його коефіцієнти a_μ є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями на $\overline{\Omega}.$ В крайових ум
до межі Г позначений через ν. Покладемо $B := (B_1, .., B_q).$

Будемо досліджувати властивості крайової задачі (1), (2) в р. с. ш.

Розширена соболєвська шкала складається з гільбертових ізотропних просторів Хермандера H^φ, для яких показником гладкості служить довільний функціональний параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$. Ці простори означають на $\mathbf{R}^n$ за допомогою перетворення Фур'є, а потім в стандартний спосіб вводять на Ω і Г. Наведемо відповідні означення.

Клас параметрів RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ таких, що $c^{-1} \leq \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leq c$ для довільних $t \geq 1$ і $\lambda \in [1, a]$ з деякими сталими $a > 1$ та $c \geq 1$ (останні не залежать від t і λ, але можуть залежати від φ). Такі функції називають RO-змінними на нескінченності; вони введені В. Г. Авакумовичем в 1936 р.і достатньо повно вивчені [7, с. 86–91].

Нам знадобиться наступна властивість класу RO. Для кожної функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ існують числа $s_0, s_1 \in \mathbf{R},\ s_0 \leq s_1,$ і $c_0, c_1 > 0$ такі, що

$$c_0 \lambda^{s_0} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c_1 \lambda^{s_1}$$ для всіх $t, \lambda \geq 1.$ (3)

Покладемо

$$\sigma_0(\varphi) := \sup \left\{ s_0 \in \mathbf{R} : \text{вірна ліва нерівність в (3)} \right\},$$

$$\sigma_1(\varphi) := \inf \left\{ s_1 \in \mathbf{R} : \text{вірна права нерівність в (3)} \right\}.$$

Тут $-\infty < \sigma_0(\varphi) \leq \sigma_1(\varphi) < \infty.$ Числа $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$ є відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської функції φ.

Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$. За означенням, гільбертів простір $H^\varphi(\mathbf{R}^n)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in S'(\mathbf{R}^n)$ таких, що

$$\|w\|_\varphi^2 := \int\limits_{\mathrm{R}^n} \varphi^2\left(\langle \xi \rangle\right) \left|(Fw)(\xi)\right|^2 d\xi < \infty.$$

Тут Fw – перетворення Фур'є розподілу w, $\langle \xi \rangle := \left(1 + |\xi|^2\right)^{1/2}$ є згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbf{R}^n,$ а $\| \cdot \|_\varphi$ – гільбертова норма в просторі $H^\varphi(\mathbf{R}^n)$.

Простір $H^{\varphi}(\Omega)$ є звуженням простору $H^{\varphi}(\mathbf{R}^n)$ в область Ω, а $H^{\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах належать до $H^{\varphi}(\mathbf{R}^{n-1})$ (див. деталі в [5, с. 139, 150]). Простори $H^{\varphi}(\Omega)$ і $H^{\varphi}(\Gamma)$ гільбертові. У випадку степеневої функції $\varphi(t) \equiv t^s$ вони стають просторами Соболєва $H^{(s)}(\Omega)$ і $H^{(s)}(\Gamma)$ порядку $s \in \mathbf{R}$.

Результати.Покладемо

$$N := \left\{u \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right) : \ Au = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \ Bu = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\right\},$$

$$N^{+} := \left\{w \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right) : \ A^{+}w = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \ Bw = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\right\}.$$

Тут A^{+} є диференціальний вираз, формально спряжений до A. Простори N і N^{+} мають однакову скінченну вимірність [3, с. 226, 227].

Позначимо $\rho(t) := t$ для $t \geq 1.$ Якщо $\varphi \in \mathrm{RO}$, то $\varphi\rho^{s} \in \mathrm{RO}$ для кожного $s \in \mathbf{R}$.

Сформулюємо результати статті.

Теорема 1.Для довільного функціонального параметра $\varphi \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\varphi) > -q - 1/2,$ відображення $u \mapsto (Au, Bu),$ де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$(A,B) : H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) \to H^{\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\rho^{2q-j+1/2}}(\Gamma) =: H_{\varphi}(\Omega,\Gamma). \tag{4}$$

Цей оператор фредгольмів. Його ядро дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g_1, ..., g_q) \in H_{\varphi}(\Omega,\Gamma)$ таких, що

$$(f,w)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{q} \left(g_j, \frac{\partial^{2q-j} w}{\partial \nu^{2q-j}}\right)_{\Gamma} = 0 \ \ \text{для} \ \ \text{довільного} \ \ w \in N^{+}. \tag{5}$$

Тут вирази $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ і $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$ позначають скалярні добутки у просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ відповідно, а також продовження цих добутків за неперервністю.

Нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T : E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 – банахові простори, називається фредгольмовим, якщо його ядро ker T і коядро $\operatorname{coker} T := E_2 / T(E_1)$ мають однакову скінченну вимірність. З нерівності $\dim \operatorname{coker} T < \infty$ випливає, що область значень $T(E_1)$ оператора T замкнена в E_2.

Теорема 2.Нехай задано функціональний параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$, для якого $\sigma_0(\varphi) > -q - 1/2$. Тоді існує число $c = c(\varphi) > 0$ таке, що для довільного розподілу $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ виконується апріорна оцінка

$$\|u\|H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) \le c\left(\|(A,B)u\|H_{\varphi}(\Omega,\Gamma) + \|u\|L_2(\Omega)\right). \qquad (6)$$

Наступна теорема є властивістю підвищення гладкості розв’язку крайової задачі (1), (2) в розширеній соболєвській шкалі.

Теорема 3.Припустимо, що розподіл $u \in \bigcup_{s>q-1/2} H^{(s)}(\Omega)$ є розв’язком крайової задачі (1), (2), де $(f, g_1, \ldots, g_q) \in H_{\varphi}(\Omega,\Gamma)$ для деякого параметра $\varphi \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\varphi) > -q-1/2$. Тоді $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$.

Доведення результатів.Доведемо теорему 1. У соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^s$ і $s > -q-1/2$, вона відома (див., наприклад, [2, с. 128–130] і [3, сс. 223, 224]). Звідси виведемо її за допомогою інтерполяції з функціональним параметром [5, п. 1.1].

Виберемо числа $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$ такі, що $-q-1/2 < s_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Покладемо $\psi(t) := t^{-s_0/(s_1-s_0)}\varphi\left(t^{1/(s_1-s_0)}\right)$ при $t \ge 1$ та $\psi(t) := 1$ при $0 < t < 1.$ Функція ψ є інтерполяційним параметром [5, с. 137]. Для кожного $s \in \{s_0, s_1\}$ розглянемо лінійні обмежені і фредгольмові оператори

$$(A,B): H^{(s+2q)}(\Omega) \to H^{(s)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s+2q-j+1/2)}(\Gamma) =: H_{(s)}(\Omega,\Gamma), \qquad (7)$$

що діють у просторах Соболєва і мають спільне ядро N. Їх обмеженість тягне за собою обмеженість оператора

$$(A,B): \left[H^{(s_0+2q)}(\Omega), H^{(s_1+2q)}(\Omega)\right]_{\psi} \to \left[H_{(s_0)}(\Omega,\Gamma), H_{(s_1)}(\Omega,\Gamma)\right]_{\psi}.$$

Він діє у просторах, отриманих інтерполяцією з параметром ψ відповідних пар просторів Соболєва.

В силу [5, с. 140] і [12, с. 8] маємо наступні рівності гільбертових просторів з точністю до еквівалентності норм у них:

$$\left[H^{(s_0+2q)}(\Omega), H^{(s_1+2q)}(\Omega)\right]_{\psi} = H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega),$$

$$\left[H_{(s_0)}(\Omega,\Gamma), H_{(s_1)}(\Omega,\Gamma)\right]_{\psi} = H_{\varphi}(\Omega,\Gamma).$$

Тому останній оператор є оператором (4). Згідно з [5, с. 35] він успадковує властивість фредгольмовості операторів (7). Окрім того, його ядром є N, а область значень дорівнює $H_{\varphi}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)H_{(s_0)}(\Omega,\Gamma)$, тобто складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in H_{\varphi}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (5).

Теорема 1 доведена.

Доведемо теорему 2. Розглянемо розклад в ортогональну суму

$$L_2(\Omega) = N \oplus \left\{ u \in L_2(\Omega) : (u,w)_\Omega = 0 \text{ для кожного } w \in N \right\}.$$

Позначимо через P ортопроектор простору $L_2(\Omega)$ на другий доданок у цій сумі. Її звуження на простір $H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ утворює розклад цього простору в пряму суму підпросторів

$$H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) = N \dotplus \left\{ u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) : (u,w)_\Omega = 0 \text{ для кожного } w \in N \right\}.$$

Звуження оператора P на простір $H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ є оператором косого проектування цього простору на другий доданок в останній сумі паралельно підпростору N.

В силу теореми 1, звуження оператора (4) на підпростір $P\left(H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)\right)$ здійснює ізоморфізм

$$(A,B) : P\left(H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)\right) \leftrightarrow (A,B)H_\varphi(\Omega,\Gamma). \quad (8)$$

Тому для довільного $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ маємо

$$\|Pu\|_{H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)} \le c_1 \|(A,B)Pu\|_{H_\varphi(\Omega,\Gamma)} = c_1 \|(A,B)u\|_{H_\varphi(\Omega,\Gamma)}. \qquad (9)$$

Тут c_1 є норма оператора, оберненого до (8). Окрім того,

$$\|(1-P)u\|_{H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)} \le c_2 \|u\|_{L_2(\Omega)}. \quad (10)$$

Тут c_2 є норма обмеженого оператора $\mathbf{1} - P : L_2(\Omega) \to N$, де N розглядаємо як скінченновимірний підпростір в $H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$. (Нагадаємо, що в скінченновимірних просторах усі норми еквівалентні.)

Тепер апріорна оцінка (6) є прямим наслідком формул (9) і (10). Теорема 2 доведена.

Доведемо теорему 3. Вектор $(f, g_1, \dots, g_q) = (A,B)u$ належить до $H_\varphi(\Omega,\Gamma)$ за умовою і задовольняє (5) в силу теореми 1. Тому, згідно цієї ж теореми, існує $u_1 \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ таке, що $(f, g_1, \dots, g_q) = (A,B)u_1.$ Отже, $(A,B)(u-u_1) = 0,$ тобто $w := u - u_1 \in N \subset C^\infty(\overline{\Omega}).$ Звідси $u = u_1 + w \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$. Теорема 3 доведена.

Висновки.В статті досліджено крайову задачу Діріхле (1), (2) в р. с. ш. Доведено, що цій задачі відповідає обмежений і фредгольмів оператор (4). Для її розв’язків встановлена апріорна оцінка (6). Доведена властивість підвищення гладкості розв’язків в р. с. ш.

Авторка вдячна О.О. Мурачу за керівництво роботою.

Використаніджерела

Agranovich M. S. Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci., Vol. 79. Partial differential equations, IX. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1–144.

Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – М.: Наука, 1984. – 360 с.

Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.

Михайлец В. А., Мурач А. А. Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214)

Михайлец В. А., Мурач А. А. Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. –2013. – Т. 65, № 3. – С. 392–404.

Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.

Михайлец В. А., Мурач А. А. Об эллиптических операторах на замкнутом компактном многообразии // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 29 –35.

Зинченко Т. Н., Мурач А. А. Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 64, № 11. – С. 1477–1491.

Murach A. A., Zinchenko T. Parameter–elliptic operators on the extended Sobolev scale // Methods Funct. Anal. Topology. – 2013. – V. 19, No. 1. – P. 29–39.

Зинченко Т. Н. Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале // Доп. НАН України. – 2013. – № 3. – С. 14–20.

Mikhailets V. A., Murach A. A. Interpolation Hilbert spaces for a couple of Sobolev spaces. – Preprint arXiv:1106.2049v2 [math.FA] 25 Dec 2012. – 15 p.

Anop A.V.

On the Dirichlet boundary-value problem
in the extended Sobolev scale

In the extended Sobolev scale, we investigate the Dirichlet boundary-value problem for an arbitrary properly elliptic equation given in a bounded Euclidean domain with smooth boundary. This scale consists of isotropic inner product Hörmander spaces whose smoothness index is an arbitrary function RO-varying at infinity. We prove that the operator corresponding to the problem is bounded and Fredholm (of zero index) on the scale. An a priori estimate for the solutions to the problem is established, and their smoothness is investigated.

Key words: Dirichlet problem, Hörmander space, extended Sobolev scale, RO-varying function, Fredholm operator, a priory estimate.

Стаття надійшла до редакції 10.07.2013 р.