УДК 378.147:511

Гончарова С.М.

ВИВЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ФУНКЦІЙ В ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ ЯК НЕВІД'ЄМНА СКЛАДОВА ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Пропонується авторський підхід до змісту та структури вивчення теми "Найважливіші числові функції в теорії чисел", як невід'ємної складової формування математичної компетентності, в курсі "Алгебра і теорія чисел" педагогічного університету. Розглядаються функції виділення цілої та дробової частини, приклади мультиплікативних функцій, функція Ейлера.

Ключові слова: математична компетентність, теорія чисел, мультиплікативні функції, функція Ейлера.

Проблема перегляду змісту та структури навчального матеріалу безперечно є актуальною в рамках компетентнісного підходу в підготовці вчителя математики. Про необхідність забезпечення високоякісної освіти у сфері підготовки вчителя математики у ВНЗ наголошується в Законах України "Про освіту", "Про загальну середню освіту", "Про вищу освіту", у Національній доктрині розвитку освіти України у XXI ст. Реалізація окреслених завдань висуває нові вимоги до змісту професійної підготовки вчителя математики, що потребує в першу чергу уточнення змісту вивчення фахових дисциплін загалом, і зокрема вивчення розділу теорії чисел в курсі "Алгебра та теорія чисел".

Одним з найважливіших аспектів підготовки майбутніх учителів математики є становлення у них математичної компетентності, оскільки ефективно формувати математичну компетентність в учнів може лише педагог, який володіє високим рівнем математичної компетентності. Слідуючи за Раковим С.А. [4] під математичною компетентністю (особистості) будемо розуміти здатність застосовувати систему засвоєних математичних знань, умінь і навичок у дослідженні математичних моделей професійних завдань, включаючи вміння логічно мислити, оцінювати, відбирати і використовувати інформацію, самостійно приймати рішення.

Розвиток теорії чисел відіграє важливу роль для багатьох розділів математики. Важко назвати такий розділ математики, який не був би зв'язаний з поняттям натурального числа, що є одним із основних понять усієї математики. Теорія чисел в сучасному розумінні вивчає не тільки властивості цілих раціональних чисел, а й властивості інших класів чисел, причому для доведення своїх тверджень вона використовує засоби математичного аналізу, теорії функцій комплексної змінної, алгебри тощо. Крім того, в багатьох питаннях теорії чисел велике значення мають геометричні міркування. Використовуючи при розв'язанні своїх задач результати і методи різних математичних дисциплін, теорія чисел, у свою чергу, сприяє розвитку і вдосконалення цих дисциплін.

Вивчення теорії чисел має велике значення для вчителя математики. У ньому докладно викладаються і обґрунтовуються питання подільності цілих чисел, теорія періодичних десяткових дробів, теорія неперервних або ланцюгових дробів, найважливіші функції теорії чисел, розв'язування невизначених рівнянь першого степеня в цілих числах, тобто питання, з якими повинен бути обізнаний кожен учитель математики.

На жаль, в педагогічних вузах теорія чисел не вивчається як окрема дисципліна в системі підготовки вчителів математики, а входить до складу курсу "Алгебра і теорія чисел".

"Алгебра і теорія чисел" є однією із фундаментальних дисциплін в системі фахової підготовки майбутнього вчителя математики. Актуальна необхідність модернізації змісту даної навчальної дисципліни в різних аспектах неодноразово підкреслювалась в роботах авторів Требенко Д.Я., Требенко О.О.Аналіз останніх досліджень і публікацій засвідчив, що проблемі реалізації компетентнісного підходу до формування математичних компетентностей присвячені роботи І. М. Аллагулова, В. В. Ачкана, Л. І. Зайцевої, С. А. Ракова, Н. Г. Ходирєвої, О. В. Шавальової.

Виходячи с важливості перегляду змісту дисципліни "Алгебра і теорія чисел", та значення теорії чисел в системі підготовки вчителів математики, постає проблема створення такої методичної системи вивчення теорії чисел, яка б дозволила не виходячи за рамки відведеного програмою часу, охопити якнайбільший об'єм навчального матеріалу.

Одним із важливих етапів створення методичної системи вивчення теорії чисел є добір змісту навчальної дисципліни та визначення її місця в системі фахової підготовки майбутніх вчителів математики.

Отже мета даної статті: полягає у розробці методики навчання теми "Найважливіші числові функції в теорії чисел", що сприятиме формуванню математичної компетентності студентів, визначенні її змісту та структури.

Виклад основного матеріалу. Під час вивчення теми "Найважливіші числові функції в теорії чисел" розглянемо такі питання:

1. Функції виділення цілої та дробової частини дійсного числа.

2. Поняття мультиплікативної функції та її властивості.

3. Приклади мультиплікативних функцій:

а) кількість дільників числа;

б) сума додатних дільників числа;

в) функція Ейлера та її властивості.

4. Функція Мебіуса. Формула обернення Мебіуса.

1. Функція виділення цілої частини дійсного числа x повертає найбільше число, яке не перевищує x:

$$[x] = N; \qquad x = N + Z; \quad 0 < q < 1.$$

Приклади

$$[-100] = -100; \quad [45{,}9] = 45; \quad [-5{,}1] = -6.$$

Функція виділення дробової частини дійсного числа x повертає різницю між числом x та його цілою частиною $[x]$:

$\{x\} = x - |x| = q; \qquad 0 < q < 1$.

Приклади

$\{-100\} = 0; \quad \{45,9\} = 0,9; \quad \{-5,1\} = 0,9$.

Приклад застосування функції виділення цілої частини

Визначити степінь α простого числа $p,$ з яким це число входить до числа $n!$.

Розв'язання

У числі $n!$ множників, які кратні $p,$ буде $\left[\frac{n}{p}\right].$ Серед них множників, кратних $p^2,$ буде $\left[\frac{n}{p^2}\right],$ і т. д. доти, доки $p^k \le n,$ а $p^{k+1} > n.$ Отже, загальна кількість входжень p до $n!$ буде $\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right].$

Приклад

Знайти з яким степенем число $p = 2$ входить до числа $11!$

Розв'язання

$\alpha = \left[\frac{11}{2}\right] + \left[\frac{11}{4}\right] + \left[\frac{11}{8}\right] = 5 + 2 + 1 = 8.$

Дійсно, $11! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 1 \cdot 2^1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2^1 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 9 \cdot (2^1 \cdot 5) \cdot 11.$

Порахувавши усі степені 2, побачимо, що 2 входить у число $11!$ дійсно у степені $1 + 2 + 1 + 3 + 1 = 8.$

2. Поняття мультиплікативної функції та її властивості

Особливо важливу роль у теорії чисел відіграють так звані мультиплікативні функції.

Функція f(a) називається мультиплікативною, якщо для неї виконуються дві умови:

1.f(a) визначена для всіх натуральних a і не є тотожно рівною нулю;

2. Для будь-яких натуральних a1 і a2 : (a1, a2) = 1 виконується рівність:

f(a1a2) = f(a1)f(a2).

Найпростішим прикладом мультиплікативної функції є f(a) = as , де s– будь-яке дійсне або комплексне число. Справді, навіть при довільних a1 і a2 маємо:

f(a1a2) = (a1a2)s = a1sa2s = f(a1)f(a2).

Відзначимо такі властивості мультиплікативних функцій:

Властивість 1. f(1) = 1.

Справді, нехай число a $\in$ N таке, що f(a) ≠ 0. Тоді, f(a) = f(1a) = f(1)f(a), отже, f(1) = 1.

Властивість 2. Добуток двох мультиплікативних функцій – функція мультиплікативна.

Нехай f(a) = f1(a)f2(a)–задана мультиплікативна функція.

f(a1a2) = f1(a1a2)f2(a1a2) = f1(a1)f1(a2)f2(a1)f2(a2) = (f1(a1)f2(a1))(f1(a2)f2(a2)) = =f(a1)f(a2).

Властивість 3. Якщо f(a) –мультиплікативна функція, а a1,a2,…ak– попарно взаємно прості числа, то

f(a1a2…ak) = f(a1)f(a2)…f(ak).

Справді, для k = 1, 2 твердження справедливе; припустимо, що воно справедливе для k – 1 і доведемо його справедливість для k. Оскільки (ai, aj) = 1 при всіх i ≠ j за умовою, то (a1, a2,…ak-1, ak) = 1. За означенням мультиплікативної функції дістанемо: f(a1a2…ak-1ak) = f(a1a2…ak-1)f(ak); але за припущенням f(a1a2…ak-1) = f(a1)f(a2)…f(ak-1), і справедливість цієї властивості стає очевидною.

Властивість 4. Нехай f(a)– мультиплікативна функція і $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа a. Позначимо символом $\sum\limits_{d/a}$ суму, поширену на всі натуральні дільники d числа a (включаючи 1 і саме a). При цих позначеннях справедлива така важлива тотожність, яка виражає основну властивість мультиплікативних функцій:

$$\sum_{d/a} f(d) = \left[1 + f(p_1) + \dots + f\left(p_1^{\alpha_1}\right)\right] \dots \left[1 + f(p_k) + \dots + f\left(p_k^{\alpha_k}\right)\right] \qquad (1)$$

Для доведення цієї тотожності розкриємо дужки в її правій частині. Дістанемо суму доданків виду $f\left(p_1^{\beta_1}\right) f\left(p_2^{\beta_2}\right) \dots f\left(p_k^{\beta_k}\right)$, де $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ (i = 1, 2, …k), або внаслідок мультиплікативності даної функції, $f\left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}\right) = f(d)$, бо $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ є не що інше, як дільники d числа a. З правила множення многочлена на многочлен випливає, що жоден такий доданок не буде пропущений і не повторюється більше, ніж один раз. А це саме й буде те, що стоїть в лівій частині тотожності (1).

Для f(a) = as тотожність (1) набере вигляду:

$$\sum_{d/a} d^s = \left(1 + p_1^s + p_1^{2s} + \dots + p_1^{\alpha_1 s}\right) \dots \left(1 + p_k^s + p_k^{2s} + \dots + p_k^{\alpha_k s}\right) \qquad (2)$$

3. Приклади мультиплікативних функцій

Використовуючи тотожність (2) наведемо приклади мультиплікативних функцій.

а)Кількість дільників числа $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$.

Підставимо в тотожність (2) значення s = 0, бачимо, що її ліва частина при цьому визначає число всіх натуральних дільників даного а; позначаючи його через τ(а) , дістанемо:

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1). \qquad (3)$$

τ(а)– мультиплікативна функція визначення кількості дільників числа а.

Для р простого числа кількість дільників дорівнює 2.

Приклади.

Знайти кількість дільників числа:

1.а = 31;2.а = 64;3.а = 84.

Розв’язання

1.а = 31 – просте число. Отже, τ (31) = 2. Це числа 1 та 31.

2. а = 64 = 26– степінь простого числа 2. Отже, τ (26) = 6 + 1 = 7.

3. а = 84 = 22·3·7 – скористаємося формулою (3):

τ (22·3·7) = (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12.

Знайти натуральне число а, яке ділиться на 12 і має рівно 14 натуральних дільників.

Розв’язання. Оскільки 12 = 22·3, то а має вигляд $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, де $\alpha_1 \geq 2$ і $\alpha_2 \geq 1.$ Використовуючи тотожність (3) маємо 14 = 7·2 = (α1 + 1)(α2 + 1)…(αk + 1) тепер випливає, що α1 + 1 = 7, α2 + 1 = 2 і k = 2, тобто а = 26·31 = 192.

б)Сума додатних дільників числа $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$.

Підставимо в тотожність (2) значення s = 1. Ліва частина дасть суму всіх натуральних дільників числа а; позначаючи її через S(a), матимемо:

$$S(a) = \sum_{d/a} d = \left(1 + p_1^s + p_1^{2s} + \ldots + p_1^{\alpha_1 s}\right) \ldots \left(1 + p_k^s + p_k^{2s} + \ldots + p_k^{\alpha_k s}\right).$$

Спрощуючи праву частину, дістанемо:

$$S(a)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} \qquad (4)$$

S(a)– мультиплікативна функція визначення суми додатних дільників числа a.

Приклади

Знайти суму дільників числа

1.a = 24·5·73·19;2.a = 84.

Розв'язання.

1. $S\left(2^4\cdot5\cdot7^3\cdot19\right)=\frac{2^5-1}{1}\cdot\frac{5^2-1}{4}\cdot\frac{7^4-1}{6}\cdot\frac{19^2-1}{18}=1488000;$

2. $S\left(2^2\cdot3\cdot7\right)=\frac{2^3-1}{1}\cdot\frac{3^2-1}{2}\cdot\frac{7^2-1}{6}=\frac{5\cdot8\cdot48}{12}=160.$

Після розгляду двох даних прикладів мультиплікативних функцій, доцільно запропонувати студентам самостійно розглянути наступні питання:

1. Досконалі числа.

2. Числа Мерсенна.

3. Дружні числа.

Цей матеріал має цікаве історичне підґрунтя і може бути використаний на факультативних заняттях з математики та математичних гуртках.

в) Функція Ейлера та її властивості

Введення поняття функції Ейлера пропонується наступним чином.

Функція Ейлера визначає для довільного цілого додатного числа a кількість чисел з ряду цілих $0\le b_i\le a-1,$ взаємно простих з числом a, тобто таких, що $\left(a,b_i\right)=1.$

Позначається функція Ейлера $\varphi(a)$.

Приклади $\varphi(1)=1$ – за означенням.

$a=2,\quad \varphi(2)=1$, поперед числа 2 є одне число – 1;

$a=3,\quad \varphi(3)=2$, взаємно прості з 3 – 1,2;

$a = 4 \quad \varphi(4) = 2$, взаємно прості з 4 – 1,3;

$a = 5 \quad \varphi(5) = 4$, взаємно прості з 5 – 1,2,3,5;

$a = 13 \quad \varphi(13) = 12$, оскільки 13 – просте число, то увесь ряд цілих чисел, менших за 13 є взаємно простий з ним.

Функція Ейлера для простого числа та для числа, яке є степенем простого числа:

1) для $a = p$ – простого числа – $\varphi(p) = p^1 - p^0 = p - 1$;

2) для $a = p^\alpha$ – степеня простого числа – $\varphi(p) = p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^\alpha - p^{\alpha-1}.$

Функція Ейлера є мультиплікативною функцією.

Розглянемо канонічне подання довільного цілого $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Для довільного цілого функція Ейлера буде мати вигляд

$$\varphi(a) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}\right) = a \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

або

$$\varphi(a) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right)\left(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}\right)\ldots\left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).$$

Приклади

$$\varphi\left(28 = 2^2 \cdot 7\right) = \varphi\left(2^2\right)\varphi(7) = \left(2^2 - 2^1\right)(7 - 1) = 2 \cdot 6 = 12,$$

це (1,3,5,9,11,13,15,17,19,23,25,27);

$\varphi(101) = 100$, оскільки 101 – просте число;

$$\varphi(10) = \varphi(2)\varphi(5) = (2 - 1)(5 - 1) = 4;$$

$$\varphi(100) = \varphi\left(2^2\right)\varphi\left(5^2\right) = \left(2^2 - 2^1\right)\left(5^2 - 5^1\right) = 2 \cdot 20 = 40;$$

$$\varphi(1024) = \varphi\left(2^{10}\right) = \left(2^{10} - 2^9\right) = 1024 - 512 = 512 = 2^9.$$

Розгляд наступного питання "Функція Мебіуса. Формула обернення Мебіуса" виноситься на самостійне опрацювання в рамках виконання творчого проекту.

Висновки. Вивчення теми "Найважливіші числові функції в теорії чисел"має велике значення для майбутньої професійної діяльності вчителя математики, знаходить широке застосування в комбінаторному аналізі та криптографії, має багатий матеріал для використання на факультативних та гурткових заняттях з математики в школі.

Нагальним і важливим, на наш погляд, є удосконалення методичної системи навчання різних розділів математики з метою сприяння набуттю майбутніми вчителями математичної компетентності, яка є невід'ємною частиною загальної компетентності людини – інтегрованої характеристики особистості.

Використані джерела

Ачкан В. В. Формування математичних компетентностей старшокласників у процесі вивчення рівнянь та нерівностей : автореф.дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.02 "Теорія і методика навчання (математика)" /Ачкан Віталій Валентинович ; Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова.– К., 2009.– 20. с.

Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел: В 2-х ч.–Київ: Вища шк. Головне вид-во, 1976.– Ч. 2.– 384 с.

Раков С.А. Формування математичних компетентностей вчителя математики на основі дослідницького підходу з використанням інформаційних технологій: Автореф. дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02.– К., 2005.– 47 с.

Требенко Д. Я. Требенко О. О. Алгебра і теорія чисел: В 2-х ч.– Київ: НПУімені М.П.Драгоманова.– 2006.– Ч.1.– 400 с.

Требенко Д. Я. Проблема розробки науково-методичних та теоретичних засад методики та самої методики навчання вищої алгебри як актуальна проблема якісної підготовки майбутнього вчителя математики / Д. Я. Требенко // Дидактика математики: пробл. і дослідж. : зб. наук. пр.– 2009.– Вип. 31.–С. 23-27.

Шавальова О. В. Реалізація компетентнісного підходу у математичній підготовці студентів медичних коледжів в умовах комп'ютеризації навчання : автореф.дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.02 "Теорія і методика навчання математики" / Шавальова Ольга Володимирівна; Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова – К., 2007.– 20 с.

Goncharova S.M.

STUDY OF NUMERIC FUNCTIONS
IN NUMBER THEORY AS AN INTEGRAL PART
MATHEMATICAL COMPETENCE OF FUTURE TEACHERS
OF MATHEMATICS

The author proposes an approach to content and structure study of the topic "The most important numerical functions in number theory" as an integral part of the formation of mathematical competence in the course "Algebra and Number Theory" PedagogicalUniversity in simple to understand manner. We consider the function selection decimal part, examples of multiplicative functions, Euler function.

Keywords: mathematical competence, number theory, multiplicative functions, Euler function

Стаття надійшла до редакції 05.08.2013 р.