УДК 517.956.222

Зінченко Т.М.

# РІВНОМІРНО ЕЛІПТИЧНІ СИСТЕМИ В РОЗШИРЕНІЙ СОБОЛЄВСЬКІЙ ШКАЛІ

В розширеній соболєвській шкалі досліджена довільна рівномірно еліптична в $\mathbf{R}^n$ за Дуглісом-Ніренбергом система псевдодиференціальних рівнянь. Ця шкала складається з гільбертових ізотропних просторів Хермандера, для яких індексом гладкості служить будь-яка радіальна функція, RO-змінна на нескінченності. Встановлена апріорна оцінка розв'язків такої системи і досліджена їх регулярність.

Ключові слова: рівномірна еліптична система, простір Хермандера, розширена соболєвська шкала, RO-змінна функція, апріорна оцінка, регулярність розв'язку.

Вступ.В теорії еліптичних диференціальних рівнянь фундаментальну роль відіграють апріорні оцінки їх розв'язків в соболєвській шкалі функціональних просторів [1]. Такі оцінки дозволяють дослідити регулярність узагальнених розв'язків еліптичних рівнянь і мають важливі застосування до еліптичних крайових задач, в спектральній теорії диференціальних операторів та інші [1, 2].

У цьому зв'язку викликає чималий інтерес встановлення нових апріорних оцінок в різних класах функціональних просторів. Серед них вельми цікавою з точки зору застосувань є розширена соболєвська шкала, введена в [3,4]. Вона утворена гільбертовими просторами Хермандера $H^{\varphi}$ [5], де індексом гладкості служить довільна додатна функція $\varphi$, RO-змінна на нескінченності [6]. Ця шкала характеризується тим, що складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва. Завдяки функціональному параметру $\varphi$ вона градуйована більш тонко, ніж соболєвська шкала, що дає змогу отримати більш точні результати [7–9].

В статті розглянута загальна рівномірно еліптична за Дуглісом–Ніренбергом система псевдо-диференціальних рівнянь, заданих в евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$. Мета роботи – встановити апріорні оцінки розв'язків системи в розширеній соболєвській шкалі та дослідити регулярність цих розв'язків.

Постановка задачі.Нехай в $\mathbf{R}^n$, де $n \ge 1$, задана система з $p \ge 2$ лінійних псевдодиференціальних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{p} A_{j,k} u_{j,k} = f_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad \Leftrightarrow \quad Au = f. \tag{1}$$

Тут усі $A_{j,k}$ є скалярні класичні псевдодиференціальні оператори (ПДО), задані в $\mathbf{R}^n$ [1, с. 8, 15], а $A := (A_{j,k})$ є квадратна матриця порядку p, утворена цими ПДО.

Надалі припускаємо, що система (1) рівномірно еліптична в $\mathbf{R}^n$ за Дуглісом-Ніренбергом [1, с. 51], тобто виконуються наступні умови:

i) існують дійсні числа $l_1,\dots,l_p$ і $m_1,\dots,m_p$ такі, що $\operatorname{ord} A_{j,k} \le l_j + m_k$;

ii) знайдеться число $c>0$ таке, що для довільних векторів $x,\xi \in \mathbf{R}^n$ із $\|\xi\|=1$ виконується нерівність $\left| \det \left( a_{j,k}^{(0)}(x,\xi) \right)_{j,k=1}^{p} \right| \ge c.$

Тут $a_{j,k}^{(0)}(x,\xi)$ є головний символ ПДО $A_{j,k}$ у випадку $\operatorname{ord} A_{j,k} = l_j + m_k$, та $a_{j,k}^{(0)}(x,\xi) \equiv 0$ у випадку $\operatorname{ord} A_{j,k} < l_j + m_k$.

Досліджуємо систему (1) в розширеній соболєвській шкалі. Вона складається з гільбертових просторів $H^{\varphi} := \left\{ w \in S'(\mathrm{R}^n) : \|w\|_{\varphi}^2 := \int\limits_{\mathrm{R}^n} \varphi^2\left(\langle\xi\rangle\right) |(Fw)(\xi)|^2 \, d\xi < \infty \right\}$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$.

Тут $S'(\mathbf{R}^n)$ є лінійний топологічний простір Л. Шварца повільно зростаючих розподілів в $\mathbf{R}^n$, $Fw$ – перетворення Фур'є розподілу w, $\langle\xi\rangle := \left(1+|\xi|^2\right)^{1/2}$ є згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbf{R}^n$, а $\|\cdot\|_{\varphi}$ – гільбертова норма в просторі $H^{\varphi}$. Функціональний параметр $\varphi$ пробігає клас RO, що складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi:[1,\infty) \to (0,\infty)$ таких, що $c^{-1} \le \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \le c$ для довільних $t \ge 1$ і $\lambda \in [1,a]$ з деякими сталими $a>1$ та $c \ge 1$ (ці сталі не залежать від t і λ, але можуть залежати від $\varphi$ ).

Функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ називають RO-змінними на нескінченності. Клас RO введений В. Авакумовичем і добре вивчений [6].

Простір $H^{\varphi}$ є окремий ізотропний гільбертів випадок просторів, введених і систематично вивчених Л. Хермандером [5, п. 2.2]. Функціональний параметр ф служить показником гладкості для цього простору. У важливому випадку степеневої функції $\varphi(t) \equiv t^s$ маємо $H^{\varphi} = H^{(s)}$ – простір Соболєва порядку $s \in \mathbf{R}^n$.

Результати.Позначимо $\rho(t) := t$ для $t \ge 0.$ Звісно, якщо $\varphi \in \mathrm{RO}$, то $\varphi\rho^{m_k}, \varphi\rho^{-l_j} \in \mathrm{RO}$.

Теорема 1.Нехай задані функція $\varphi \in \mathrm{RO}$ і число $\sigma > 0.$ Тоді існують числа $c_1 = c_1(\varphi) > 0$ і $c_2 = c_2(\varphi,\sigma) > 0$ такі, що для довільних вектор-функцій

$$u = \operatorname{col}(u_1,\dots,u_p) \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}, \qquad f = \operatorname{col}(f_1,\dots,f_p) \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}, \tag{2}$$

які справджують рівняння $Au=f$ в $\mathbf{R}^n$, справедливі апріорні оцінки

$$\sum_{j=1}^{p} \|f_j\|_{\varphi\rho^{-l_j}} \le c_1 \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|_{\varphi\rho^{m_k}}, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|_{\varphi\rho^{m_k}} \le c_2 \sum_{j=1}^{p} \|f_j\|_{\varphi\rho^{-l_j}} + c_2 \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|_{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}. \tag{4}$$

Нехай V є довільна відкрита непорожня підмножина простору $\mathbf{R}^n$. Дослідимо внутрішню регулярність розв'язку еліптичної системи $Au=f$ наV в розширеній соболєвській шкалі. Для цього введемо відповідні аналоги простору $H^{\varphi}$, де $\varphi\in\mathrm{RO}$. Покладемо

$$H^{-\infty}:=\bigcup_{s\in\mathbf{R}}H^{(s)}=\bigcup_{\varphi\in\mathrm{RO}}H^{\varphi}$$ і $$H^{\infty}:=\bigcap_{s\in\mathbf{R}}H^{(s)}=\bigcap_{\varphi\in\mathrm{RO}}H^{\varphi}.$$

Позначимо через $H^{\varphi}_{\mathrm{int}}(V)$ лінійний простір усіх розподілів $w\in H^{-\infty}$ таких, що $\chi w\in H^{\varphi}$ для кожної функції $\chi\in C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbf{R}^n),$ яка задовольняє умовам $\operatorname{supp}\chi\subset V$ і $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi,\partial V)>0.$ Тут $C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbf{R}^n)$ є клас усіх нескінченно диференційовних функцій $\chi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{C},$ всі частинні похідні яких обмежені на $\mathbf{R}^n$. Звісно, якщо $V=\mathbf{R}^n$, то $H^{\varphi}_{\mathrm{int}}(V)=H^{\varphi}$.

Теорема 2.Нехай $\varphi\in\mathrm{RO}$. Припустимо, що вектор-функція $u\in(H^{-\infty})^p$ є розв'язком рівняння $Au=f$ на відкритій множині $V\subseteq\mathbf{R}^n$, де $f_j\in H^{\varphi\rho^{-l_j}}_{\mathrm{int}}(V)$ для всіх $j\in\{1,\dots,p\}$. Тоді $u_k\in H^{\varphi\rho^{m_k}}_{\mathrm{int}}(V)$ для всіх $k\in\{1,\dots,p\}$.

Обґрунтування результатів.Доведемо теорему 1. Нехай виконується її умова. Оцінка (3) еквівалентна обмеженості матричного ПДО $$A:\ \bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k}}\to\bigoplus_{j=1}^{p}H^{\varphi\rho^{-l_j}}.$$

Ця обмеженість є прямим наслідком леми 2 зі статті [4, с. 400] і умови $\operatorname{ord}A_{j,k}\le l_j+m_k$.

Доведемо оцінку (4). Позначимо через $\|\cdot\|'_{\varphi}$, $\|\cdot\|''_{\varphi}$ і $\|\cdot\|'_{\varphi,\sigma}$ відповідно норми у просторах

$$\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k}},\quad \bigoplus_{j=1}^{p}H^{\varphi\rho^{-l_j}}\quad\text{і}\quad \bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}.$$

Як відомо [1, с. 52], для рівномірно еліптичного матричного ПДО A існує параметрикс B. Останній є класичним матричним ПДО $B=\left(B_{k,j}\right)_{k,j=1}^{p}$ таким, що $\operatorname{ord}B_{k,j}\le -m_k-l_j$ і $BA=I+T$. Тут $T=\left(T_{j,k}\right)_{j,k=1}^{p}$ – деякий матричний ПДО, усі елементи якого мають порядок $-\infty$, а I є тотожний оператор у просторі $S'(\mathbf{R}^n)$.

Нехай вектор-функції (2) задовольняють рівняння $Au=f$ в $\mathbf{R}^n$. Тоді $Bf=BAu=u+Tu.$ Звідси випливає потрібна оцінка (4):

$$\|u\|'_{\varphi}=\|Bf-Tu\|'_{\varphi}\le\|Bf\|'_{\varphi}+\|Tu\|'_{\varphi}\le c\,\|f\|''_{\varphi}+c\,\|u\|'_{\varphi,\sigma}.$$

Тут c– максимум норм операторів

$$B:\ \bigoplus_{j=1}^{p}H^{\varphi\rho^{-l_j}}\to\bigoplus_{k=1}^{p}H^{\varphi\rho^{m_k}},\qquad(5)$$

$T: \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}} \to \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} H^{\varphi\rho^{m_k}}$.

Вони обмежені в силу згаданої леми 2 статті [4, с. 400].

Теорема 1 доведена.

Доведемо теорему 2. Нехай виконується її умова. Спочатку розглянемо випадок, коли $V = \mathbf{R}^n$. За умовою теореми, $Au = f$ в $\mathbf{R}^n$, де $f \in \overset{p}{\underset{j=1}{\oplus}} H^{\varphi\rho^{-l_j}}$. Скориставшись параметриксом B матричного ПДО A, запишемо $Bf = BAu = u + Tu$; звідси $u = Bf - Tu$. Тут $Bf \in \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} H^{\varphi\rho^{m_k}}$ в силу (5), і $Tu \in (H^{\infty})^p$, оскільки усі $\operatorname{ord} T_{j,k} = -\infty$. Отже, $u \in \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} H^{\varphi\rho^{m_k}}$, що і треба було довести у випадку $V = \mathbf{R}^n$.

Розглянемо тепер випадок, коли $V \neq \mathbf{R}^n$. Виберемо довільну функцію $\chi \in C_{\mathrm{b}}^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ таку, що $\operatorname{supp} \chi \subset V$ і $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \chi, \partial V) > 0$. Для неї існує функція $\eta \in C_{\mathrm{b}}^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ така, що $\operatorname{supp} \eta \subset V$, $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \eta, \partial V) > 0$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp} \chi$ [3, с. 73]. Скориставшись рівністю $BAu = u + Tu$, запишемо

$$\chi u = \chi BAu - \chi Tu = \chi B \eta Au + \chi B(1-\eta)Au - \chi Tu. \quad (6)$$

Оскільки $Au = f$ на множині V, то $\eta Au = \eta f$ в $\mathbf{R}^n$, де $\eta f \in \overset{p}{\underset{j=1}{\oplus}} H^{\varphi\rho^{-l_j}}$ за умовою теореми. Отже, в силу (5) маємо: $\chi B \eta Au = \chi B \eta f \in \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} H^{\varphi\rho^{m_k}}$.

Окрім того, оскільки матриці $\chi B(1-\eta)$, де $1-\eta = 0$ в околі $\operatorname{supp} \chi$, і T складаються з ПДО порядку $-\infty$, то вектор-функції $\chi B(1-\eta)Au$ і Tu належать до $(H^{\infty})^p$. Тому в силу (6) маємо включення $\chi u \in \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} H^{\varphi\rho^{m_k}}$. Воно з урахуванням вибору функції χ значить, що $u_k \in H_{\mathrm{int}}^{\varphi\rho^{m_k}}(V)$ для всіх $k \in \{1, \ldots, p\}$.

Теорема 2 доведена.

Висновки.В статті досліджено рівномірно еліптичну за Дуглісом-Ніренбергом систему (1) в розширеній соболєвській шкалі. Для розв'язків системи встановлено апріорні оцінки (теорема 1). Показано як внутрішня регулярність правих частин системи впливає на регулярність її розв'язку (теорема 2).

Авторка вдячна О. О. Мурачу за керівництво роботою.

Використаніджерела

Агранович М. С. Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Итоги науки и техники.Совр. пробл. математики. Фунд. напр. Т. 63 – М.: ВИНИТИ, 1990. – С. 5–129.

Agranovich M. S. Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1–144.

Михайлец В. А., Мурач А. А. Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

Михайлец В. А., Мурач А. А. Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. –2013. – Т. 65, № 3, – С. 392–404.

Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.

Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.

Михайлец В. А., Мурач А. А. Об эллиптических операторах на замкнутом компактном много-образии // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 29–35.

Зинченко Т. Н., Мурач А. А. Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 64, № 11. – С. 1477–1491.

Murach A. A., Zinchenko T. Parameter–elliptic operators on the extended Sobolev scale // Methods Funct.Anal. Topology. – 2013. – V. 19, No. 1. – P. 29–39.

Zinchenko T.M.

Uniformly elliptic systems in the extended Sobolev scale

A Douglis–Nirenberg uniformly elliptic system of pseudodifferential equations in $\mathbf{R}^n$ is investigated in the extended Sobolev scale. The latter consists of isotropic inner product Hörmander spaces whose smoothness index is an arbitrary radial function RO-varying at infinity. We prove an a priori estimate for solutions to the system and investigate their regularity.

Key words: uniformly elliptic system, Hörmander space, extended Sobolev scale,
RO-varying function, a priori estimate, regularity of solution.

Стаття надійшла до редакції 10.06.2013 р.