УДК 372.851

Грамбовська Л.В.

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ І МОДУЛЯМИ ВИДУ $|ax+b|+|ax\text{-}b|=f(x)$

У статі розглянуто так звані "простіші" рівняння з параметрами (лінійні многочлени відносно невідомої величини і параметра). На конкретних прикладах проілюстровано, що навіть схожі за виглядом рівняння, які містять параметр і знак модуля, є досить складними і не можуть розв’язуватися однаковими способами. Уміння розв’язувати лінійні рівняння є ключовими у формуванні умінь загалом розв’язувати завдання з параметрами.

Ключові слова: *рівняння з параметрами, невідома величина і параметр під знаком модуля.*

Традиційно "важкою" темою шкільного курсу математики вважається тема "Розв’язування рівнянь, нерівностей і текстових задач з параметрами". Це зумовлено різними об’єктивними причинами, серед яких можна виділити: невеликий обсяг навчального часу, який виділений програмою для вивчення даної теми, неможливість алгоритмізувати підхід до розв’язування такого класу завдань, розмаїттям завдань і таке інше. Разом з тим завдання даного типу широко представлені в різних навчальних матеріалах. Отже, вміння розв’язувати рівняння з параметрами є важливою складовою загальнонавчальної компетентності школярів.

У спеціальній літературі, присвяченій методам розв’язування рівнянь з параметрами зазвичай розглядаються квадратні рівняння, або такі, що зводяться до квадратних. Наприклад, це роботи Апостолової Г. В. [1], Горнштейна П. І. [2], Дорофеєва Г. В., Репети В. К., Шестакова С. А, Ястребинецького Г. А. та інших. Разом з тим рівняння, що містять многочлени першого степеня відносно невідомої величини і параметра, представлені у таких роботах в невеликому обсязі, (переважно розглядаються окремі поодинокі приклади).

Зазначимо, що вміння розв’язувати будь-які рівняння з параметрами формуються саме у процесі розв’язування лінійних рівнянь. І тільки після цього починає формуватися усвідомлене розуміння методів розв’язування інших рівнянь з параметрами. Підкреслимо також, що навіть схожі за виглядом рівняння, що містять многочлени першого степеня відносно невідомої величини і параметра, можуть розв’язуватися зовсім різними способами.

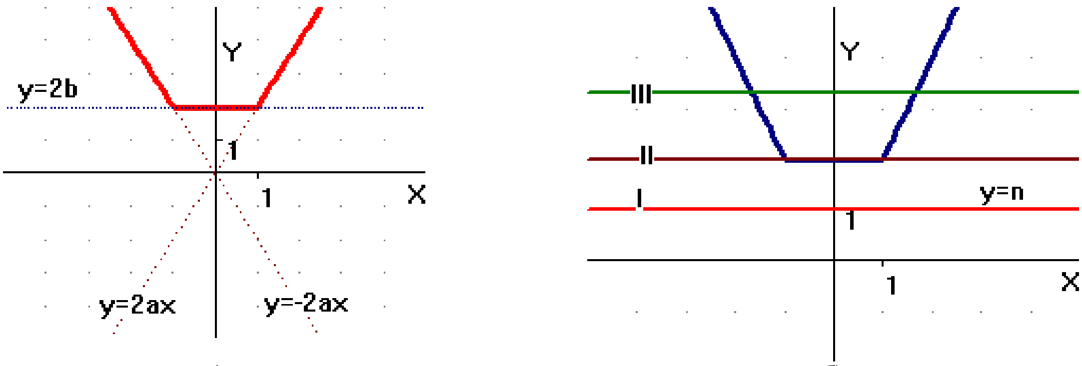
У даній статті порівняно розв’язання окремих типів рівнянь з параметрами і модулями виду $|ax+b|+|ax–b|= f(x)$, де параметр може міститися як у лівій, так і у правій частинах рівняння.

Розглянемо рівняння типу $|ax+b|+|ax–b|=f(x)$. В одному випадку параметр буде міститися тільки у правій частині рівняння (вираз $f(x)$), у іншому – параметр буде міститися і ліворуч і праворуч.

Для конкретності розглянемо рівняння типу

$$|ax+b|+|ax–b| = n, \tag{1.1}$$

де a, b – дійсні фіксовані числа, $a>0$, $b>0$, n – параметр. Графік функції $y=|ax+b|+|ax-b|$, що відповідає лівій частині рівняння (1.1), показано на рис. 1.1,а. Графіком функції $y=n$ є сімейство прямих, паралельних до осі Ох (рис. 1.1,б). У рівняння (1.1) буде стільки розв’язків, скільки разів графік прямої $y=n$ перетне графік функції $y=|ax+b|+|ax-b|$. У процесі дослідження графіків, побудованих на рис. 1,1,б можна з’ясувати, що при певних значеннях параметра n на графіках функцій $y=|ax+b|+|ax-b|$ і $y=n$ може не бути точок перетину, графіки можуть співпадати, може бути дві спільні точки. Відповідно у рівняння (1.1) може не бути розв’язків, бути безліч, бути два розв’язки.



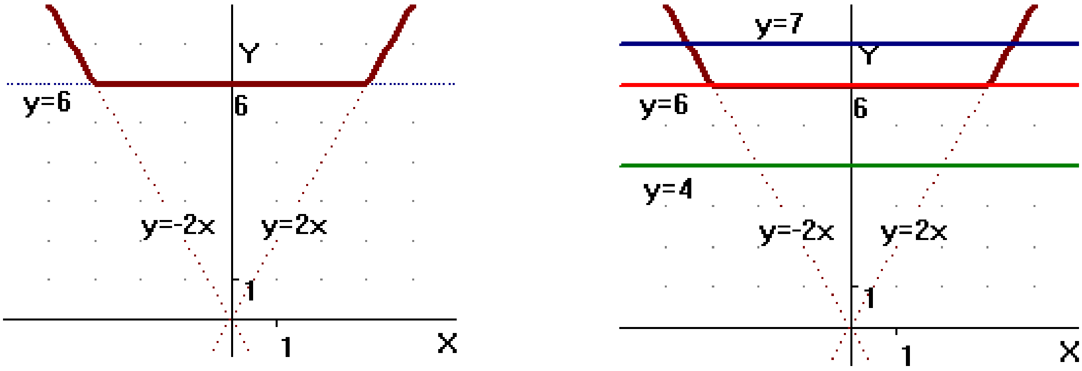
а) б)

Рис. 1.1

Приклад 1.1. *Залежно від значень параметра k з'ясувати кількість розв'язків рівняння*

$$|x+3|+|x-3|=2k+1. \tag{1.2}$$

Розв'язування. Порівняємо рівняння (1.2) з рівнянням (1.1) (тобто з рівнянням $|ax+b|+|ax-b|=n$). Маємо $a=1$, $b=3$, $m=0$, $n=2k+1$. Ліва частина рівняння (1.2) являє собою графік функції, який складається з частини графіків $y=2a|x|=2|x|$ та $y=2b=2\cdot 3=6$ (рис. 1.2, а).



а) б)

Рис. 1.2

Правій частині рівняння (1.2) відповідає сімейство прямих $y=n$, паралельних до осі Ox (рис. 1.2,б). $2k+1=6$, $k=2{,}5$.

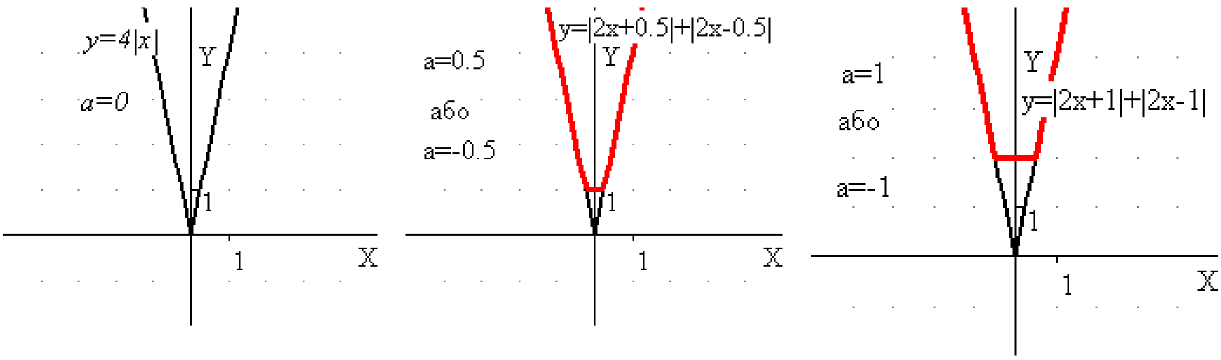
Відповідь. Якщо $k\in(-\infty;2{,}5)$, то у рівняння розв'язків немає; якщо $k=2{,}5$, то безліч розв'язків, якщо $k\in(2{,}5;\infty)$, то два розв'язки.

Приклад 1.2. *Знайти кількість розв'язків і розв'язати рівняння залежно від значень параметра a*

$$|2x+a|+|2x-a|=a+3. \tag{1.3}$$

Розв'язування. І спосіб. Розглянемо спосіб, яким був розв'язаний попередній приклад. Проте складність цього графічного розв'язання полягає в тому, що параметр міститься у правій частині рівняння (1.3) та одночасно знаходиться під знаком модуля у лівій частині. Позначимо праву і ліву частини рівняння через $y=a+3$ та $y=|2x+a|+|2x-a|$.

Розглянемо функцію $y=|2x+a|+|2x-a|$. Якщо $a=0$, то графіком функції $y=|2x+a|+|2x-a|=2|2x|=4|x|$ є "кут", як показано на рис. 1.3,а. Якщо параметр a набуває інших значень, то графік функції $y=a+3$ може набувати вигляду, як показано на рис. 1.3, б, в.



а) б) в)

Рис. 1.3

Виходячи з наведених міркувань, можна уявити загальний вигляд сімейства графіків функцій виду $y=|2x+a|+|2x-a|$. Щодо функцій виду $y=a+3$, то кожен з графіків функцій даного сімейства паралельний до осі Ox. Разом з тим, наведених міркувань недостатньо, щоб зрозуміти, як поводяться ці функції разом, тобто при яких значеннях параметра a їх графіки перетинаються чи не перетинаються. Отже, розглянутий спосіб, який був дієвим у першому прикладі, не дає бажаного результату у другому прикладі.

ІІ спосіб. Розв'яжемо рівняння (1.3) відносно невідомої величини x. Для цього прирівняємо до нуля підмодульні вирази: $2x+a=0$, $x=-0{,}5a$ та $2x-a=0$, $x=0{,}5a$. Прямими $x=f(a)=-0{,}5a$ та $x=f(a)=0{,}5a$ площину aOx ділиться на чотири множини точок з координатами $(a;\ x)$, які описуються системами нерівностей: $x\le -0{,}5$ і $x\le 0{,}5$; $x\le -0{,}5$ і $x\ge 0{,}5$; $x\ge -0{,}5$ і $x\le 0{,}5$; $x\ge -0{,}5$ і $x\ge 0{,}5$.

Розв'яжемо рівняння (1.3) у кожній з цих областей. Можна з'ясувати, що рівняння (1.3) на кожній з областей набуде вигляду:

$$\left[\begin{array}{ll} x=-0,25a-0,75, & \text{якщо } x\le -0,5a \text{ і } x\le 0,5a, \\ a=-1, & \text{якщо } x\le -0,5a \text{ і } x\ge 0,5a, \\ a=3, & \text{якщо } x\ge -0,5a \text{ і } x\le 0,5a, \\ x=0,25a+0,75, & \text{якщо } x\ge -0,5a \text{ і } x\ge 0,5a. \end{array}\right.$$

Графічним образом сукупності є частини прямих $x=-0,25\cdot a-0,75$, *a=–1*, $x=0,25\cdot a+0,75$, *a=3*, які при перетині утворюють замкнений чотирикутник *ABCD* (див. рис. 1.4).

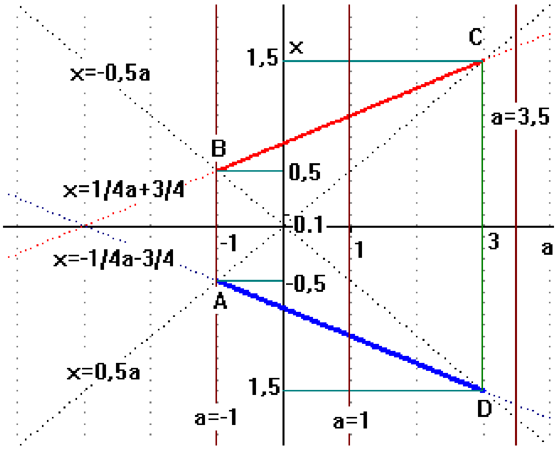


Рис. 1.4

Перш ніж перейти до з'ясування кількості й вигляду розв'язків рівняння (1.3), знайдемо координати вершин чотирикутника. Точка *A* лежить на перетині прямих *x=0,5a* і $x=-0,25\cdot a-0,75$. Тому точка *A*(–1; –0,5). Аналогічно можна обчислити координати інших вершин чотирикутника: *B*(–1; 0,5); *C*(3; 1,5); *D*(3; –1,5). У рівняння (1.3) буде стільки розв'язків, скільки разів графік вертикальної прямої *a=p1* перетне сторони чотирикутника *ABCD*. На рис. 1.5 показані окремі представники сімейства прямих *a=p1*.

Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$, то розв'язків немає; якщо $a=-1$, то розв'язків безліч: $x\in -0,5;0,5$; якщо $a=3$, то розв'язків безліч: $x\in -1,5;1,5$; якщо $a\in(-1;3)$, то розв'язків два: $x=0,25a+0,75$ та $x=-0,25a-0,75$.

У даній статті розглянуті тільки два приклади, які схожі на перший погляд. Разом з тим, другий приклад є набагато складнішим і потребує умінь будувати графіки функцій на частині площини, обмеженій двома прямими.

Використані джерела

1. Апостолова Г. В. Перші зустрічі з параметром / Г. В. Апостолова. – К. : Факт, 2006. – 324 с.
2. Горнштейн П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – К. : Євро індекс Лтд., 1995. – 336 с.
3. Грамбовська Л. В. Розв'язування лінійних рівнянь з параметрами різними способами / Л. В. Грамбовська // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 2. – С. 23-29.

Hrambovska L.

SOLUTION LINEAR EQUATIONS WITH PARAMETERS AND MODULES KIND
$|ax+b|+|ax-b|=f(x)$

The article deals with the so-called "simple" equation with parameters (linear polynomials relatively unknown quantity and parameter). In the specific examples illustrated that even similar in appearance equation containing the parameter and the sign module, are complex and can not be solved by the same methods. However, the ability to solve linear equations are crucial in shaping the skills to solve the general problem with parameters.

Key words*: equation with parameters unknown quantity and the parameter marked by the module.*

Стаття надійшла до редакції 04.11.2014