

УДК 37.016:517:37.091.322

Михайленко О. М.

## "ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ" ДЛЯ ПІДГОТОВКИ УЧНІВ 11 КЛАСУ ПІД ЧАС ГУРТКОВОЇ РОБОТИ ПРИ МАЛІЙ АКАДЕМІЇ НАУК

*У статті розглядається проблема прикладної спрямованості знань математики з теми "Диференціальні рівняння" для підготовки учнів 11 класу під час гурткової роботи при Малій Академії Наук. Доводиться актуальність цієї проблеми та пропонуються вимоги до прикладних задач, які використовуються у навчанні математики. Наводяться приклади розв'язання задач прикладної спрямованості з теми "Диференціальні рівняння" на основі аналітичного методу для учнів математичного гуртка Малої Академії Наук, а також комп'ютерно-орієнтоване спрямування підтримки викладання даної теми.*

**Ключові слова:** аналітичний метод, диференціальні рівняння, економіко-математичне моделювання, математичний гурток, математична модель, прикладні задачі, прикладна спрямованість.

**Постановка проблеми.** Поняття прикладної спрямованості знань математики відіграє значну роль в курсі підготовки учнів 11 класів математичних гуртків МАН. Знання, які учні отримують на таких гуртках розширюють шкільну програму з математики, економіки, інформатики, фізики, дозволяють застосовувати математичний апарат та ЕОМ до дослідження та вдосконалення деяких соціально-економічних, екологічних та фізичних явищ та процесів.

Прикладна спрямованість шкільного курсу математики відіграє значну роль в класах фахового спрямування, при розв'язуванні задач та математичних моделей соціально-економічного, технічного, фізичного та екологічного спрямування. Прикладній спрямованості шкільного курсу математики, на жаль, приділяється недостатньо уваги у стандартних програмах, навіть, для спеціалізованих математичних класах. Розділи математичного аналізу – диференціальне та інтегральне числення, елементи математичної статистики, теорії ймовірностей та комбінаторики, тощо – це теми з широким прикладним спрямуванням. Проте в останні роки, на жаль, їм приділяється все менше уваги. Саме тому вдосконалення методики вивчення даної теми, добір прикладних, цікавих задач було і залишається актуальним питанням математичної дидактики.

**Аналіз актуальних досліджень.** Прикладна спрямованість шкільного курсу математики складає одну з основних педагогічних проблем щодо якісної мотивації навчання. Тому проблема реалізації прикладної спрямованості завжди була і є в полі зору методистів, науковців, авторів підручників. Теоретичне обґрунтування та шляхів її дослідження проведено в роботах О.Д. Александрова, О.М. Астряба, Г.П. Бевза, Б.В. Гнеденка, О.С. Дубинчук, Ю.М. Колягіна, В.В. Пікана, З.І. Слєпкань, І.Ф. Тєслєнка, В.В. Фірсова та ін. [1, с. 15] Зокрема, були сформульовані загальні принципи, які забезпечують шкільному курсу математики прикладну спрямованість, розроблені шляхи розв'язування завдань та навчання учнів застосовувати математичні знання на практиці (О.М. Астряб, Г.П. Бєвз, О.С. Дубинчук, З.І. Слєпкань, І.Ф. Тєслєнко), визначені умови реалізації прикладної спрямованості математики в школі (Ю.М. Колягін, В.В. Пікан).

У педагогічних дослідженнях прикладну спрямованість математики розуміють як змістовний та методологічний зв'язок шкільного курсу з практикою, що обумовлює формування в учнів навичок, необхідних для розв'язування засобами математики практичних задач.

Основні математичні положення здобуті з дійсного світу за допомогою абстракції. У науці вони дістають самостійний логічний розвиток, а потім знову знаходять застосування в трудовій діяльності людей. Цей процес знаходить певне відображення і в методиці викладання математики. Учням треба показувати застосування математики в житті, в трудовій діяльності людини; тренувати в застосуванні математичних знань для виконання обчислювальних, розрахункових, графічних і вимірювальних робіт. Цим підвищується інтерес школярів до вивчення математики, закладаються основи правильного розуміння значення математики в житті людей.

На сьогоднішній день питання про використання прикладних задач не дуже вивчене. Але воно поставало ще за часів Радянського Союзу. Психологічний аспект проблеми (закономірності пізнавальної діяльності, механізми пошуку і прийняття рішення, переформулювання задач, моделювання як засіб пізнання та ін.) розглянуто в роботах Г.О. Балла, А.В. Брушлінського, Л.С. Виготського, П.Я. Гальперіна, А.Ф. Есаулова, Г.С. Костюка, О.М. Леонтьєва, О.М. Матюшкіна, Є.І. Машбиця, Н.О. Менчинської, В.А. Моляко, С.Л. Рубінштейна, Л.М. Фрідмана та ін.

Використання комп'ютера в навчальному процесі дозволяє максимально сприяти активізації пізнавальної діяльності учнів. Раціонально організована комп'ютерна підтримка дає значний

педагогічний ефект, оскільки дозволяє розширити можливості індивідуалізації навчання, скоротити час та підвищити якість підготовки вчителя до уроку.

Комп'ютер – корисний інструмент в математичних дослідженнях. З його допомогою можна експериментально виявити нові цікаві аналітичні та геометричні залежності, розв'язати економіко-математичні, фізичні, технічні та екологічні задачі – людині залишається тільки проаналізувати ці розв'язки та дати якісні, науково-обґрунтовані висновки.

Але викладачі новатори, такі як Г.О. Балла, А.В. Брушлінський та деякі інші, які розробляли методику викладання теми "Диференціальні рівняння" для учнів 11 класу, не використовували задачі прикладної спрямованості та комп'ютерну підтримку у цій темі. Новизна статті полягає в тому, щоб показати вихованцям, де саме, або в яких галузях можуть бути застосовані диференціальні рівняння, методика їх складання на основі математичного моделювання з комп'ютерною підтримкою.

**Мета статті** – розглянути диференціальні задачі з математики прикладного спрямування, їх характеристичні властивості. За основу при розв'язуванні наведених задач взято аналітичний метод, проте відповідне моделювання може бути здійснено з використанням математичних спеціалізованих програм, таких як Maple, Mathcad, Matlab, Derive, Mathematica, Advanced Grapher тощо [3 – 6].

**Виклад основного матеріалу.** Прикладна спрямованість навчання математики найбільше реалізується при розв'язуванні прикладних задач. Основні вимоги до прикладних задач, які використовуються у навчанні математики.

– Задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань.

– Задачі повинні відповідати шкільним програмам і підручникам за формулюванням і змістом методів і фактів, які будуть використовувати в процесі їх розв'язування.

– Задачі повинні бути сформульовані доступною і зрозумілою мовою, не містити термінів, з якими учні не зустрічалися і які вимагатимуть додаткових пояснень.

– Числові дані в прикладних задачах повинні бути реальними, відповідати існуючим в практиці.

– У змісті задачі по можливості повинен бути відображений особистий досвід учнів, місцевий матеріал, який дозволяє ефективно показати використання математичних знань і викликати в учнів пізнавальний інтерес.

– Прикладні задачі повинні відображати ситуації промислового і сільськогосподарського виробництва, економіки, торгівлі, ілюструвати застосування математичних знань у конкретних професіях людей.

– У прикладних задачах числові дані, як правило, мають бути наближеними, а при їх розв'язуванні необхідно використовувати обчислювальні засоби, зокрема ЕОМ.

– При розв'язанні прикладних задач у математичних гуртках МАН їх формулювання може бути розширене і являти собою деяке теоретичне зведення до проблеми, що вивчається. Сама проблема може мати багатоступеневе розв'язання, при якому кожний наступний етап розвиває і доповнює попередній.

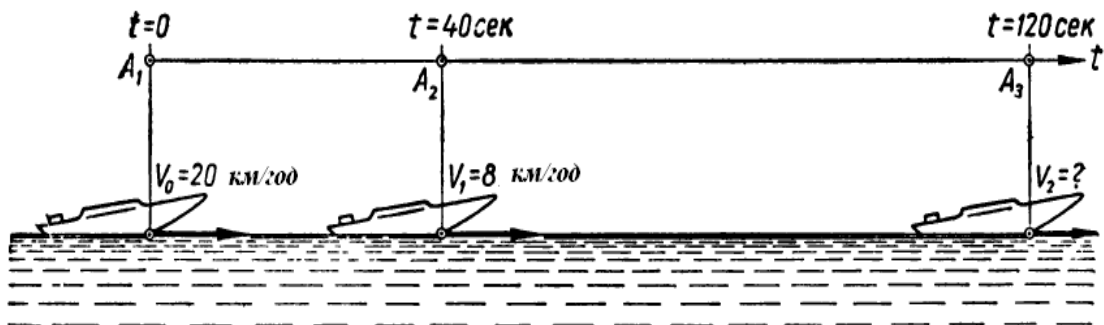
Оскільки в основі розв'язку прикладних задач лежить математичне моделювання, то для реалізації прикладної спрямованості необхідно організувати навчання учнів елементам моделювання, що з дидактичної точки зору є навчальними діями, які виконуються в процесі виконання задач [6, с.25]. Іншими словами, необхідно навчити учнів створювати математичні моделі.

Математична модель – це абстракція реальної дійсності, в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками, які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

Наведемо приклади реалізації прикладного спрямування математичних знань у процесі розв'язання задач учнями 11 класу з теми "Диференціальні рівняння"

**Задача 1. (теоретична механіка)** *Моторний човен рухається в озері зі швидкістю 20 км/год. На повному ході її двигун був вимкнений і через 40 сек після цього швидкість човна зменшилася до 8 км/год. Сила протидії води пропорційна швидкості руху човна. Визначити швидкість човна через 2 хвилини після виключення двигуна [6, с.25].*

**Розв'язання.** Зробимо схематичний малюнок до даної задачі



Мал. 1

Дана задача взаємопов'язана з фізичним законом.

На човен, який пливе діє сила  $F = -k \cdot v$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

За другим законом Ньютона маємо:  $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$ , де  $\frac{dv}{dt}$  – це прискорення руху матеріальної точки маси  $m$ .

Звідки диференціальне рівняння руху:  $m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v$  (1)

Це диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремленими змінними, звідси:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{k}{m} dt$$

$$\ln v = -\frac{k}{m} t + C_1$$

Застосовуючи потенціювання, отримаємо загальний розв'язок рівняння (1):  
 $v = e^{-\frac{k}{m}t + C_1} = e^{C_1} e^{-\frac{k}{m}t} = C e^{-\frac{k}{m}t}$ .

Початкова умова наступна: при  $t = 0$ ,  $v = 20$  км / год. Звідки:  $20 = C e^{-\frac{k}{m} \cdot 0}$ ,  $C = 20$

Тоді загальний закон руху для даних умов задачі:

$$v = 20 e^{-\frac{k}{m}t} \quad (2)$$

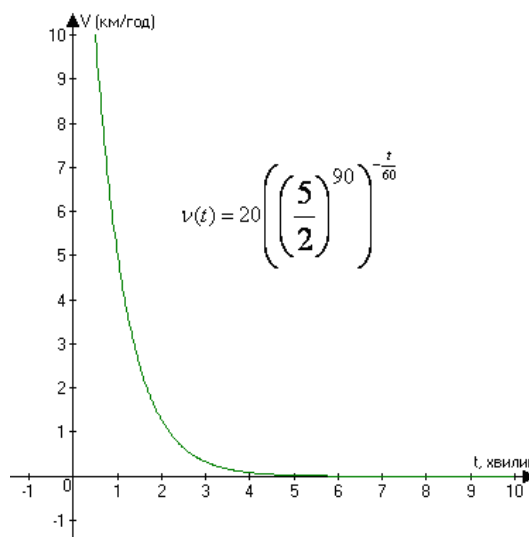
Додаткова умова вказує, що при  $t = 40$  сек =  $1/90$  год швидкість човна складає 8 км/год.

Звідси  $8 = 20 e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{90}}$ , або  $e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{90}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-90}$

Підставляючи числові дані в знайдений закон руху (2), і враховуючи при цьому, що

$t = 2 \text{ хв} = \frac{1}{30} \text{ год}$ , отримаємо:  $v = 20 \left( \left( \frac{5}{2} \right)^{90} \right)^{-\frac{1}{30}} \approx 1,28$  км/ год

Загальний розв'язок диференціального рівняння проілюструємо в декартовій системі координат за допомогою математичної програми Advanced Grapher:

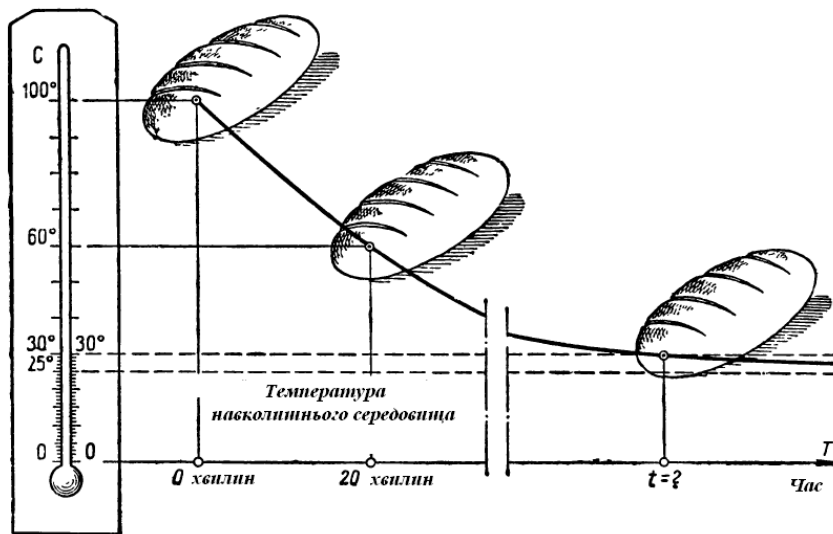


Мал. 2

**Задача 2. (охолодження тіла)** У кімнаті, де температура  $20^{\circ}\text{C}$ , батон низив температуру за 20 хвилин з  $100^{\circ}\text{C}$  до  $60^{\circ}\text{C}$ . Знайти закон охолодження батона.

Через скільки хвилин він низить температуру до  $30^{\circ}\text{C}$ . Підвищенням температури у кімнаті знехтувати. [6, с.15].

**Розв'язання.** Зробимо схематичний малюнок до даної задачі



Мал. 3

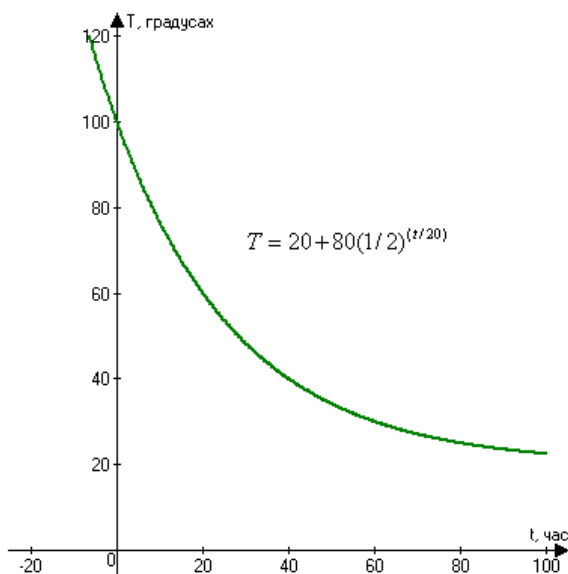
З законів фізики, нам відомо, що швидкість охолодження пропорційна різниці температур, отже можна записати:  $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$ , або  $\frac{dT}{T - 20} = kdt$  – це диференціальне рівняння 1-го порядку з

відокремлюючи ми змінними. Інтегруючи маємо:  $\int \frac{dT}{T - 20} = \int kdt$ .  $\ln(T - 20) = kt + \ln C$ .

Якщо  $t = 0$ , то  $T = 100^{\circ}$ , звідси  $C = 80$ . Якщо  $t = 20^{\circ}$ , то  $T = 60^{\circ}$ ,  $\ln 40 = 20k + \ln 80$ , звідки  $k = -(1/20)\ln 2$ , отже закон охолодження даного тіла матиме вигляд:  $T - 20 = 80e^{-(1/20)t \ln 2} = 80(1/2)^{(t/20)}$ , або  $T = 20 + 80(1/2)^{(t/20)}$ .

При  $T = 30^{\circ}$  маємо  $30 = 20 + 80(1/2)^{(t/20)}$ , звідки  $t = 60$  хвилин.

Загальний розв'язок диференціального рівняння проілюструємо в декартовій ситемі координат за допомогою математичної програми Advanced Grapher [9, с. 280]:



Мал. 4

**Задачі для самостійного розв'язування**

1. Моторний човен рухається в озері зі швидкістю 50 км/год. На повному ході її двигун був вимкнений і через 50 сек після цього швидкість човна зменшилася до 10 км/год. Сила протидії води пропорційна швидкості руху човна. Визначити швидкість човна через 2 хвилини після виключення двигуна.

2. У кімнаті, де температура  $20^{\circ}\text{C}$ , батон знизив температуру за 20 хвилин з  $100^{\circ}\text{C}$  до  $60^{\circ}\text{C}$ . Знайти закон охолодження батона.

Через скільки хвилин він знизить температуру до  $30^{\circ}\text{C}$ . Підвищенням температури у кімнаті знехтувати.

**Висновки.** Задачі прикладного змісту, які можуть бути розв'язані за допомогою диференціальних рівнянь, найкращим чином сприяють накопиченню конкретних математичних уявлень, розвивають здатність чітко уявляти собі ту чи іншу реальну задачу, застосовувати математичне моделювання з знаннями суміжних природничих наук, таких як фізика, хімія, біологія, екологія та інших. Вони розвивають логічне мислення, повагу до точних наук а також сприяють розумінню дитьми різних навколишніх явищ та процесів, можливості їх моделювання та подальшого дослідження аналітично та з використанням ЕОМ, що є важливою передумовою розвитку дитини з достатньо сильною математичною підготовкою, які зможуть брати активну участь у конкурсах МАН та олімпіадах.

**Використані джерела**

1. Лавренюк С.П. Курс диференціальних рівнянь. Вид. НТЛ / С.П. Лавренюк. – Львів, 1997. – 215 с.
2. Понтрягин Я.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Я.С. Понтрягин. – М. : Наука, 1974. – 425 с.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М. : Наука, 1984. – 320 с.
4. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, О.В. Вітюк. – К. : НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2000. – 154 с.
5. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером: Посібник для вчителів / Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. – К. : РННЦ "ДІНІТ", 2004. – 255 с.
6. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач / К.К. Пономарев. – М. : Наука, 1962. – 184 с.
7. Горбаченко В.И. Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB / В.И. Горбаченко. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 320 с.
8. Шампайн Л.Ф. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB: Учебное пособие. 1-е изд. / Шампайн Л.Ф., Гладвел И., Томпсон С. – СПб.: Лань, 2009. – 304с.
9. Цисарь И.Ф. Компьютерное моделирование экономики / И.Ф. Цисарь, В.Г. Нейман. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2008. – 384 с.
10. Цисарь И.Ф. MATLAB Simulink. Компьютерное моделирование экономики / Цисарь И.Ф. – М. : Солон-Пресс, 2008. – 256 с.
11. Чарльз Генри Эдвардс. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е издание. / Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни. – К. : Диалектика-Вильямс, 2007. – 1166 с.

*Myhaylenko A.*

**APPLIED ORIENTATION OF MATHEMATICAL PROBLEMS  
ON THE SUBJECT OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR 11 FORM PUPILS  
OF THE SMALL ACADEMY OF SCIENCES MATHEMATICAL CIRCLE**

*The article deals with the problem of applied orientation of mathematical knowledge on the subject of differential equations for 11 form pupils of the Small Academy of Sciences mathematical circle. The definition of applied orientation of mathematics that is realized in applied mathematical problems is given. The role of applied orientation of mathematical problems in raising the pupils' interest in studying mathematics and understanding its role in everyday's life is considered and the retrospective review of the problem study is performed. The requirements for applied mathematical problems solved by the mathematical circle members are suggested. The definitions of economic-mathematical modeling and a mathematical model are specified. The examples of solving mathematical problems of applied orientation on the subject of differential equations on the basis of the analytic method by the 11 form pupils of the mathematical circle are considered.*

**Key words:** *analytic method, differential equations, economic-mathematical modeling, mathematical knowledge, mathematical circle, mathematical problem, mathematical model, applied mathematical problems, applied orientation.*

*Стаття надійшла до редакції 23.01.2015*