УДК 378.016:519.21

Тур Г.І., Трунова О.В.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ТРЕНДОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

В статті розглядається проблема використання сучасних математичних методів аналізу ринкової динаміки, зокрема, підкреслено що жоден з них не може врахувати таку властивість ринку, як самоорганізація. Обґрунтований вибір теорії фракталів для вирішення даної проблеми, акцентується увага на тому, що метод фрактального аналізу доцільно застосовувати в дослідженнях, прогнозуванні та оцінці ступеня стабільності економічних систем. Безпосередньо розглянута методика використання фрактального аналізу для визначення трендових характеристик економічних показників. Наведені алгоритми розрахунку показника Херста для динамічних рядів з різною розмірністю для невеликих масивів даних, а саме нормованого розмаху (R/S-аналіз). Для випадку, коли обсяг вибірки становить значну величину пропонується використовувати модифікацію алгоритму розрахунку показника Херста. У залежності від діапазону, до якого належать значення показника Херста, виділені три основні ознаки часового ряду. Для характеристики динаміки розглядаються такі властивості, як персистентність, антиперсистентність, циклічність. Запропоновані найперспективніші з точки зору прикладних досліджень в економіці, сучасні математичні моделі фракталів, статична – Мандельброта та динамічна – Джулії.

Ключові слова: *фрактальний аналіз, показник Хаусдорфа, показник Херста, алгоритм R/S-аналізу, кризові ситуації, економічна система.*

Постановка проблеми. Сучасна наука має широкий вибір інструментів для дослідження параметрів динаміки економічних систем. Суть проблеми полягає в тому, що класичні статистичні методи, використовувані для дослідження числових рядів, в більшості випадків є неадекватними. Класична математична статистика базується на центральній граничній теоремі (закон великих чисел), яка стверджує, що в міру проведення все більшого числа випробувань, граничним розподілом випадкових значень буде нормальний розподіл. Останнє означає, що події мають бути незалежними, тобто не мають впливати одна на одну, і при цьому всі вони повинні бути рівноімовірними. Хаотичність поведінки рядів обумовлена зростанням і спадом рівнів. А оскільки кризові ситуації, відбуваються набагато частіше, ніж передбачає ця теорія, то й розподіли, що описують стан системи, хоча і візуально схожі з нормальним або логарифмічно-нормальним розподілами, насправді мають розподіл Парето з "товстими хвостами", що і пояснює частоту криз .

Сучасна економічна теорія давно довела неспроможність і неадекватність традиційних лінійних моделей поведінки ринків. Усі стаціонарні процеси можна розділити на три групи: детерміновані, випадкові та хаотичні, що займають місце між двома першими. Практика показує, що динаміка економічних процесів і явищ носить нелінійний і, найчастіше, хаотичний (непередбачуваний) характер. Це обумовлює необхідність пошуку альтернативних методів моделювання із застосуванням нестандартних математичних апаратів. На сьогоднішній день під час аналізу економічних процесів все частіше застосовуються такі математичні напрями, як нечіткі методи, нейронні мережі, генетичні алгоритми і т.п. Проте для аналізу ринкової динаміки жоден з цих методів не може врахувати таку властивість ринку, як самоорганізація. Дану проблему, певною мірою, дозволяє вирішити теорія фракталів.

Фрактальний аналіз – математичний алгоритм виявлення єдиного чисельного параметра для опису багаторівневих структур, якими є, зокрема, динамічні економічні системи. Метод фрактального аналізу застосовується в дослідженнях, прогнозуванні та оцінці ступеня стабільності економічної системи. Дослідження різних систем з різним ступенем стабільності дозволяє встановити зв'язок стану з показником фрактальної розмірності як для макро- так і мікроекономічних систем.

В умовах нестабільної економічної ситуації доцільно розробляти та вдосконалювати методи прогнозування кризових ситуацій як для ринку акцій і цінних паперів, так і в рамках конкретної галузі та для окремо взятих підприємств.

Формування в студентів економічних спеціальностей університетів професійних компетентностей безпосередньо пов'язане із сучасними поглядами на аналіз соціально-економічних процесів. Тому підготовка висококваліфікованих фахівців в галузі економіки й управління неможлива без вдосконалення змісту освіти. Саме тому проблеми методики навчання студентів економічних та управлінських спеціальностей сучасних методів аналізу кризових ситуацій, за допомогою яких спеціаліст зможе прийняти більш обґрунтоване й виважене рішення, яке буде як математично, так і економічно обґрунтованим, зокрема за допомогою методу фрактального аналізу, є актуальним.

Аналіз актуальних досліджень. Упровадженням теорії фракталів в економіку, ще з 80-х років XX ст., активно займалися багато західних вчених. Вітчизняні дослідники стали розглядати дану теорію порівняно недавно [1]. Застосування фрактального аналізу в економіці описано в працях таких видатних дослідників, як Б. Мандельброт, Е. Петерс, В. Арнольд, П. Берже, І. Помо, К. Відаль, Р. Шустер, Р. Мантень, Х. Стенлі, В. Чоу, Д. Сорнетт, О.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов, М.Г. Чумаченко, О.І. Лисенко та ін. [1, 3, 7, 8]. Але проблемі методики навчання сучасних методів аналізу кризових ситуацій, зокрема методу фрактального аналізу, студентів економічних спеціальностей університетів у науковій та методичній літературі належну увагу не приділено.

Таким чином, **метою статті** є адаптація методу фрактального аналізу до сучасної практики прийняття управлінських рішень, а саме: розробка алгоритму фрактального аналізу й методики визначення фрактальної розмірності D – кількісного показника ступеня фрагментарності та періодичності часових рядів економічних показників; методика введення фрактальних розмірностей у задачі моделювання та прогнозування кризового розвитку в умовах нестабільних і перехідних економічних ситуацій.

Виклад основного матеріалу. Фрактал – геометрична форма, яка може бути розділена на частини, кожна з яких – зменшена версія цілого. Саме поняття фрактал, запропоноване Б. Мандельбротом, у найбільш загальному сенсі означає нерегулярну, самоподібну структуру [7]. Іншими словами – це множина, підмножини елементи якої подібні до самої множини, але в іншому масштабі, що визначає властивість масштабної інваріантності фракталів. Класичним прикладом фрактала є дерево, у якому від кожної попередньої гілки (починаючи зі стовбура) відходять дві аналогічні, але меншого розміру. Отже, якщо розмір кожної нової гілки визначатимуть не детермінованими, а стохастичними законами, то отримане зображення буде максимально схоже на справжнє дерево.

Використання математичного апарата теорії фракталів відкриває нові можливості в моделюванні ринкових процесів. Ключовим моментом, що сприяє цьому, є саморозвиток фрактала. Дана властивість характеризує фрактал як математичний об’єкт, який найбільш відповідає системній природі економічних процесів, що протікають в умовах нелінійної динаміки безлічі факторів зовнішнього й внутрішнього середовищ [3].

Фрактали отримали широке застосування в дослідженні економічних систем. Зокрема, така характеристика часового ряду, як фрактальна розмірність дозволяє визначити момент, коли система стає нестабільною й готова перейти до нового стану. Сучасна наука широко застосовує теорію фракталів для дослідження часових рядів з метою підвищення вірогідності прогнозування економічної динаміки [3]. Для дослідження й прогнозування процесів, пов’язаних з рухом фінансових потоків, пропонується застосувати математичну теорію фракталів.

Прикладом одного з найбільш ефективних застосувань теорії фракталів є моделювання ринкових процесів і безпосередньо фрактальна модель фондового ринку. Зважаючи на особливості функціонування ринку цінних паперів, досить важко спрогнозувати динаміку цін на ньому. Існує велика кількість рекомендацій і стратегій, проте лише застосування фракталів дозволяє побудувати адекватну модель поведінки фондового ринку [5]. На користь ефективності застосування такого підходу говорить те, що багато учасників фондових бірж витрачають чималі кошти на оплату послуг фахівців у даній галузі.

Зупинимося детальніше на можливості застосування для дослідження й прогнозування розвитку економічних систем, математичної теорії фракталів. Під час побудови фракталів реалізуються принципи нелінійності в процесі вибору розвитку системи. Нелінійність у світоглядному сенсі означає багатоваріантність шляхів розвитку, наявність вибору із запропонованих альтернатив і певного темпу еволюції, а також незворотність еволюційних процесів. Нелінійність у математичному сенсі означає відповідний вид математичних рівнянь (нелінійні диференціальні рівняння), що містять шукані величини в степені, більше одиниці або коефіцієнти, які залежать від властивостей середовища. Тобто фрактали застосовуються в тому випадку, коли об’єкт має кілька варіантів розвитку й стан системи визначається положенням, у якому вона перебуває зараз, це спроба змоделювати хаотичний розвиток. Фрактальна структура об’єкта передбачає незмінність ступеня складності його структури зі збільшенням масштабу розгляду.

Динамічні ряди даних, які описують поведінку економічних систем, у різних масштабах мають приблизно однаковий вигляд. Для характеристики фрактальної структури використовують показник фрактальності D, уведений Хаусдорфом [6], який чисельно визначає розмірність компактної множини в довільному метричному просторі:

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)}, \qquad (1)$$

де $N(\delta)$ – кількість шарів радіуса δ, які покривають компактні множини в довільному метричному просторі.

Для характеристики динаміки розглядаються такі властивості, як персистентність (трендостійкість), антиперсистентність ("повернення до середнього"), циклічність. Отже, показник фрактальності важливий у тому сенсі, що він тісно пов'язаний з показником Херста [3], який визначає властивості динаміки економічної системи або динамічного ряду. Для більшості динамічних процесів показник Херста визначається як

$$H = 2 - D. \tag{2}$$

Але на практиці для визначення параметра Херста за формулою (2) використовуються хаотичні ряди даних, що містять до декількох тисяч значень [4]. Зменшення обсягу масиву даних можливе шляхом використання методу нормованого розмаху (*R/S*-аналіз).

Доведено, що показник Херста пов'язаний з коефіцієнтом нормованого розмаху (*R/S*). Для більшості динамічних рядів виконується твердження:

$$R / S = (A \cdot N)^H, \tag{3}$$

де *R/S* – нормований розмах від накопиченого середнього, *S* – стандартне відхилення, *A* – константа для кожного конкретного процесу, *N* – кількість спостережень, *H* – показник Херста, до того ж, $0<H<1$, що характеризує фрактальну розмірність процесу.

Наведемо алгоритм розрахунку показника Херста.

1. Перетворення вихідного часового ряду довжини *M* у часовий ряд довжини $N=M-1$ на основі використання наступного правила:

$$n_i = \log(m_{i+1} / m_i), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, (M-1), \tag{4}$$

де m_i – значення вихідного ряду в точці *i*, n_i – значення нового ряду в тій же точці.

2. Розрахунок середнього арифметичного ряду спостережень:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{5}$$

3. Розрахунок *S* середньоквадратичного відхилення ряду (СКВ – корінь квадратний з дисперсії):

$$S = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{X})^2}. \tag{6}$$

4. Розрахунок накопиченого відхилення членів ряду від середнього:

$$Z_u = \sum_{i=1}^{U}(x_i - \overline{X}). \tag{7}$$

5. Розрахунок розмаху *R* накопиченого відхилення ("розмах" часового ряду – різниця найбільшого й найменшого накопиченого відхилення від поточного середнього на даному інтервалі часу):

$$R = \max_{1 \le u \le N}\{Z_u\} - \min_{1 \le u \le N}\{Z_u\}. \tag{8}$$

6. Нормування розмаху *R* шляхом ділення на стандартне відхилення *S*, яке обчислюється для *N* значень.

7. Логарифмування *R/S* та *AN*.

8. Побудова графіка залежності функції *log(R/S)* від *log(AN)*.

9. Знаходження шляхом лінійної апроксимації графіка тангенса кута його нахилу, що є показником Херста, тобто величина *H* дорівнює коефіцієнту апроксимуючої лінійної залежності, побудованої методом найменших квадратів (МНК):

$$\log(R / S) = H \log A + H \log N. \tag{9}$$

Звідки,

$$H = \frac{\log(R / S)}{\log A + \log N}. \tag{10}$$

Слід зауважити, що методика визначення фрактальних характеристик динамічних рядів на основі *R/S*-аналізу з використанням алгоритму (4) – (10) може бути використана тільки для невеликих масивів даних.

У випадку, коли обсяг вибірки становить значну величину (кілька тисяч позицій), доцільно використовувати модифікацію запропонованого алгоритму, в якому:

1. Динамічний ряд *N (t)* розбивається на *A* суміжних періодів довжини *n*.

2. Визначається середнє значення нормованого розмаху

$$(R / S)_n = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}(R_i / S_i)_n, \tag{11}$$

де R_i – максимальний розмах *i*-го періоду, S_i – вибіркове відхилення, розраховане для кожного періоду.

3. Визначення $\log(R / S)_n$ та $\log(n)$.

4. Побудова лінійної регресії $\log(R / S)_n = f(\log(n))$, у якій оцінка параметра "нахил" буде дорівнювати оцінці показника Херста *H*.

Поряд з використанням показника Херста для аналізу тенденції кореляційного відношення дану характеристику застосовують для оцінки автокореляційного впливу попередніх значень динамічного ряду на його наступні значення й визначення майбутньої тенденції. Для цього використовується кореляційне співвідношення [6]:

$$C = 2^{2H-1} - 1, \tag{12}$$

де C – міра кореляції, H – показник Херста.

Залежно від діапазону, до якого належать значення показника Херста, виділяють три основні ознаки часового ряду:

1) якщо $0{,}5<H<1$ ($1<D<1{,}5$; $0<C<1$), часові послідовності належать до трендостійких рядів, тобто тенденція, продемонстрована часовим рядом, буде продовжена і в майбутньому протягом певного відрізку часу. До того ж показник H має пряму залежність від сили тенденції (чим більша тенденція – тим вищий показник H). Такий ряд називають персистентним, стендостійким рядом (якщо ряд зростає (спадає) в попередній період, то ймовірно, що він буде зберігати цю тенденцію певний час у майбутньому). Цей процес ще називають "чорним шумом", тобто рядом, для якого характерна відповідна спрямованість. Такі ряди якраз і спостерігаються на фінансових ринках.

2) якщо $H=0{,}5$ (відповідно, $D=1{,}5$; $C=0$) значення ряду носять випадковий абсолютно незалежний характер без жодної кореляції (стохастичний): теперішній стан показника жодним чином не пов'язаний із його майбутнім станом. Такий процес називають "білим шумом", процес без пам'яті (усі значення ряду некорельовані).

3) якщо діапазон $0<H<0{,}5$ ($D>1{,}5$; $-0{,}5<C<0$), то він указує на належність послідовності до "антиперсистентних рядів", тобто процес демонструватиме в майбутньому тенденцію протилежну тій, що була характерною для попереднього періоду. Антиперсистентний або ергодичний ряд (система показує зростання в попередній період, то з великою ймовірністю в наступному періоді почнеться спад і навпаки) його називають "рожевим шумом". Ці процеси найбільш характерні для ефектів турбулентності.

Цікаво, що для багатьох природних явищ показник Херста часто приймає значення в діапазоні 0,6 – 0,8, тому $H \approx 0{,}7$ вважається характерним значенням. Мандельброт [7] показав, що ця властивість поширюється не тільки на природні ряди, але й на фінансові хроніки, тобто ряди, що фіксують зміну цін на ринках і біржах і т.п.

Сучасні консалтингові компанії застосовують фрактальну статистику Херста для оцінки дохідності акцій під час аналізу інвестиційно-фінансової привабливості компанії. По суті, основне завдання показника Херста – відрізнити випадковий числовий ряд від невипадкового, навіть якщо цей випадковий ряд не є гауссовим, тобто ймовірнісний розподіл є не нормальним [2].

У реальному світі чистих, упорядкованих фракталів, як правило, не існує, і можна говорити лише про фрактальні явища. Їх треба розглядати тільки як моделі, які наближено є фракталами в статистичному сенсі. Проте грамотно побудована статистична фрактальна модель дозволяє отримати досить точні та адекватні прогнози [4].

Теорія фракталів надає якісно новий підхід у моделюванні економіки. Проте її новизна й суперечливість класичних методів ускладнюють її широке використання. Одним з основних стримуючих чинників є хаотичність фрактальної моделі, яка обумовлена винятковою взаємозалежністю її вхідних і вихідних параметрів. Навіть найменша зміна вхідного параметра або найдрібніша помилка у його заданні може призвести до абсолютно непередбачуваної поведінки моделі. При цьому, зважаючи на недостатньо розвинений математичний апарат самої теорії, абсолютно неможливо перевірити (оцінити) результати, отримані за допомогою фрактального моделювання [3]. Разом з тим це дійсно найперспективніший сучасний напрям математики з точки зору прикладних досліджень в економіці.

На сьогодні існує багато різних математичних моделей фракталів. Відмінною особливістю кожної з них є те, що в їх основі лежить певна рекурсивна функція.

Модель Мандельброта. Бенуа Мандельброт запропонував модель фрактала, котра вже стала класичною та часто використовується для демонстрації типового прикладу фрактала. Математичний опис моделі такий: на комплексній площині в деякому інтервалі для кожної точки z обчислюється рекурсивна функція:

$$f(z) = z^2 + c, \tag{13}$$

де c – комплексна константа.

Після N – повторень цієї процедури обчислень координат точок на комплексній площині з'являється дивовижно красива фігура, яка нагадує грушу.

У моделі Мандельброта фактором, що змінюється, є початкова точка c, а параметр z є залежним. Тому для побудови фрактала Мандельброта існує правило: початкове значення z дорівнює нулю ($z=0$). Це обмеження вводиться для того, щоб перша похідна від функції z у початковій точці була нулем. А це означає, що в початковій точці функція має мінімум, і в подальшому вона буде набувати лише більших значень.

Модель Джулії (Julia set). Модель фрактала Джулії має те ж рівняння, що і модель Мандельброта, лише тут змінним параметром є не c, а z.

Відповідно змінюється вся структура фрактала, оскільки на початкове положення не накладено жодних обмежень.

Між моделями Мандельброта й Джулії існує така розбіжність: якщо модель Мандельброта є статичною (оскільки *z* початкове завжди дорівнює нулю), то модель Джулії є динамічною моделлю фрактала.

Існують й інші моделі, такі як килим Серпінського, крива Коха та ін., але їх використання для моделювання економічних систем потребує подальшого вивчення.

Висновки. Показник Херста дозволяє визначити таку важливу властивість для економічної системи, як трендовість. Показник універсальний і застосовний для будь-яких часових рядів навіть з невідомими розподілами (наприклад, розподілу доходностей у цінових рядах). Усе це робить його незамінним інструментом аналізу, особливо для аналізу й прогнозування кризових економічних ситуацій, для яких характерна сильна нелінійність, високі ексцеси й "важкі хвости". Нездатність описати всі можливі ситуації на ринку за допомогою нормального розподілу потребує від фінансового керуючого використання нових, більш ефективних й універсальних способів управління поточною економічною ситуацією.

Отже, використання фрактального аналізу для дослідження динаміки показників діяльності дозволить моделювати хаотичні економічні процеси. Значною перевагою зазначеного методу також є можливість розпізнання порушень динаміки економічного процесу. Можливість класифікації часових рядів за значеннями показників Херста дозволяє підвищити надійність прогнозування поведінки економічних систем, що відкриває широкі можливості для економіко-математичного моделювання динамічних рядів.

Розглянута методика може бути використана у навчальному процесі в формі лабораторної чи курсової робіт, у дипломних роботах і безпосередньо на виробництві, коли необхідно з'ясувати стан економічної системи та її перспективи розвитку.

Використані джерела

1. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах / Р. Кроновер. – М. : Постмаркет, 2000. – 352 с.
2. Трунова О.В. Использование фрактального анализа для исследования динамики сложных систем / О.В. Трунова, И.С. Скитер// Математическое и имитационное моделирование систем: Восьмая международная науч.-практ. конф., 24-28 июня 2013 г.; тезисы докл. – Чернигов, ЧНТУ, 2013. – С. 296-299.
3. Фрост А. Дж. и Пректер Р. Волновой принцип Эллиота / А. Дж. Фрост, Р. Пректер. – М. 2001. – 268 с
4. Цветков И. В. Фрактальная размерность временного ряда как "флаг" катастроф в социально-экономических процессах / И.В. Цветков // Моделирование сложных систем. – Вып.3. – Тверь: Изд-во ТвГУ, 2001. – С. 121–144.
5. Mandelbrot B. Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis / B. Mandelbrot // Annals of Economic Social Measurement. – 1972. – № 1. – P. 159–175.
6. Peters E.E. Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics / E.E. Peters. – New York: Wiley, 1994. – 286 p.
7. Feder J. Fractals / J. Feder. – New York: Plenum Press, 1988. – 261 p.
8. Hausdorff F. Dimesion und Ausseres Mass / F. Hausdorff // Matematishe Annalen. – No 79. – 1919. – P. 157–179.

Tur A., Trunova O.

APPLICATION OF FRACTAL ANALYSIS METHOD TO DETERMINE THE TREND CHARACTERISTICS OF NUMERICAL SERIES

The problem of the use of advanced mathematical methods for the analysis of market dynamics, in particular, emphasized that none of them cannot account for such a property market, as self-organization. The choice of fractal theory to solve this problem, the focus is on the fact that the method of fractal analysis is advisable to apply in research, prediction and assessment of the degree of stability of economic systems. Just use the technique of fractal analysis to determine the characteristics of the trend of economic indicators. These algorithms for calculating the Hurst exponent for time series with different dimensions for small arrays, namely rescaled range (R/S-analysis) of data. For the case when the sample size is a significant amount is proposed to use a modification of the algorithm for calculating the Hurst exponent. Depending on the range, which includes the value of the Hurst exponent, identified three main features of the time series. To characterize the dynamics of the properties such as persistence, antipersistent, recurrence. Offered promising from the point of view of applied research in economics, modern mathematical models of fractals, static – Mandelbrot and dynamic – Julia.

Key words: *fractal analysis, the rate of Hausdorff, the rate of Hurst, algorithm of R/S-analysis, crisis, the economic system.*

Стаття надійшла до редакції 27.01.2015