УДК 378.14

Кугай Н. В., Борисов Є. М.

НЕРІВНОСТІ ЯК МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

У статті обґрунтовано необхідність розгляду прикладних задач, для розв'язування яких використовуються нерівності. Наведені приклади таких задач.

***Ключові слова**: прикладні задачі, математичні моделі, нерівності.*

Постановка проблеми. Принцип навчання через розв'язування задач є очевидним наслідком самої природи математики. Розв'язування задач – найефективніша форма не тільки для розвитку математичної діяльності учнів, а й для засвоєння знань, навичок, методів і застосувань математики. Недаремно багато відомих учених наголошували і наголошують на тому, що в математиці задачі відіграють чи не найважливішу роль. Ідея навчати математики через розв'язування задач не втратила свого значення і тепер. Однак, тенденція зниження зацікавленості учнів і студентів до навчання, яка спостерігається останнім часом, ставить перед учителем та викладачем серйозні проблеми.

Одним із засобів вирішення цих завдань є продумане використання на заняттях з математики задач практичного, прикладного змісту, до розв'язування яких, як показує досвід роботи, учні та студенти мають більший потяг.

Розв'язуючи прикладні задачі, учні та студенти не тільки засвоюють найважливіші математичні поняття, опановують математичну символіку, вчаться наводити обґрунтування тощо, але й складають різні математичні моделі, відчувають взаємозв'язок теорії з практикою, усвідомлюють значущість і необхідність вивчення теми, набувають навичок у розв'язуванні проблемних ситуацій, що виникають у повсякденному житті. Крім того, у процесі розв'язування таких задач в учнів формуються навички створювати математичні моделі, тобто моделювати.

Застосування математичних моделей в різних науках є реалізацією методологічної сутності математичних знань і самої математики, сприяє встановленню міжпредметних зв'язків ([2], ([3]) . "Модельність" математичних структур закладена в самій природі математичних знань. Ще в античні часи відомі математики і філософи говорили про принцип відповідності світу реального світу математичному (Піфагор, Фалес, Аристотель, Демокрит, Евклід та інші).

З іншого боку, прикладні задачі забезпечують посилення мотивації навчання математики, оволодіння новими вміннями, збагачують їх знаннями з інших дисциплін, спонукають учнів до здобуття нових знань та проведення досліджень. Одним із способів такого дослідження є розв'язування прикладних задач, які потребують створення та дослідження математичних моделей. Як відомо, математика дає чи не найбільший вклад у розвиток абстрактного мислення людини, а математична модель виступає містком між теоретичною, абстрактною мовою науки та реальним явищем навколишнього світу. До найпростіших і водночас найпоширеніших математичних моделей можна віднести рівняння, нерівності, функції.

Аналіз останніх досліджень. Основні ідеї, пов'язані з роллю і місцем задач, прикладною спрямованістю курсу математики, математичним моделюванням як методом пізнання, способами розв'язання, викладені в роботах П.Т. Апанасова, М.М. Ашурова, М.П. Балка, Г.П. Бевза, М.І. Бурди, М.І. Жалдака, М.Я. Ігнатенка, Ю.М. Колягіна, Т.В. Крилової, Г.О. Михаліна, А.Д. Мишкіса, Л.Л. Панченко, М.В. Працьовитого, З.І. Слєпкань, М.О. Терешина, В.О. Швеця, М.І. Шкіля.

У навчально-методичній літературі є достатня кількість прикладних задач, які розв'язуються через складання рівнянь, систем рівнянь або запису відповідних функцій ([1], ([4]). Натомість, як показує практика і власний досвід, в літературі з елементарної математики наявна порівняно незначна кількість прикладних задач, які розв'язуються за допомогою нерівностей. Тому в учнів (та й у студентів) природно виникає питання: а для чого вивчаються нерівності? Крім того, у курсі елементарної математики вивчаються нерівності між середнім арифметичним, середнім геометричним, середнім гармонійним, наголошується на важливості цих нерівностей. Але, як правило, використовуються вони для доведення інших нерівностей і майже не застосовуються для розв'язування задач прикладного характеру.

Мета статті – розглянути прикладні задачі, математичною моделлю розв'язування яких є нерівності.

Розглянемо низку прикладних задач, для розв'язування яких треба створити математичну модель – нерівність. Оскільки для учнів (та й студентів) така математична модель не є типовою, звичною, то варто розпочати з найпростіших задач, у яких поняття нерівності закладено в умові, але для розв'язання задачі можна обійтися і рівнянням, або розв'язати задачу добором.

Задача 1. Скільки існує натуральних чисел менших 100, які не діляться ні на 5, ні на 7? (***Відповідь*:** 68).

Задача 2. Яка ймовірність того, що навмання взяте число, що менше 100 ділиться на 5 або на 7? (***Відповідь:*** *31/99).*

Задача 3. Скільки потрібно купити рулонів шпалер, щоб поклеїти стіни загальною площею 87 м^2, якщо ширина шпалер 50 см, а довжина рулону 10 м? (***Відповідь***: не менше 18).

Далі розглянемо складніші задачі.

Задача* 4.** З Києва до Рівного виїхав автобус, швидкість якого складає 70км/год., а через півгодини слідом за ним виїхав автомобіль. З якою швидкістю повинен рухатись автомобіль, щоб прибути в кінцевий пункт швидше за автобус (відстань між містами 320 км, а рух автобуса і автомобіля вважати рівномірним)? (Відповідь:*** $v > 78,6$ км/год.).

Задача* 5.** Щоб виконати норму за зміну, яка складає 120 деталей, робітник повинен виготовляти у середньому 15 деталей за годину. З якою продуктивністю повинен працювати робітник, щоб за зміну виготовити більше норми, якщо відомо, що він почав роботу із запізненням на півгодини? (Відповідь***: більше, ніж 16 деталей за годину).

Задача* 6.** З пункту А в пункт В рівномірно і прямолінійно рухається матеріальна точка зі швидкістю v. Через час t з пункту А в тому ж напрямку рівномірно і прямолінійно почала рухатись інша матеріальна точка. З якою швидкістю повинна рухатись друга точка, щоб прибути в пункт В не пізніше, ніж перша, якщо відстань між пунктами дорівнює S? (Відповідь***: швидкість другої точки більша, ніж $\frac{Sv}{S-vt}$).

***Задача* 7.** Є 6 г радіоактивної речовини з періодом піврозпаду 6 років і 24 г радіоактивної речовини з періодом піврозпаду 3 роки. Через скільки років маса першої речовини буде більшою за масу другої речовини?

Розв'язання. Рівняння радіоактивного розпаду має вигляд $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^x$, де m_0 – початкова маса радіоактивної речовини, m – маса речовини, що лишилась унаслідок розпаду після x періодів піврозпаду, $x = \frac{t}{T}$ – відношення часу протікання реакції до періоду піврозпаду даної речовини. За даними задачі через t років маса першої речовини становить $6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$ г, а другої – $24\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ г. Математичною моделлю задачі буде нерівність $6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} > 24\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$. Заміною $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = y$ зводимо нерівність до квадратичної $6y - 24y^2 > 0$. Її розв'язок $-0 < y < \frac{1}{4}$. Враховуючи заміну, отримуємо показникову нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} < \frac{1}{4}$, звідки $t > 12$. Отже, через 12 років маси обох речовин будуть рівними, а більше, ніж через 12 років маса першої речовини буде більшою за масу другої речовини. (***Відповідь.*** $t > 12$ років).

***Задача* 8.** Через скільки років ділянка лісу, площа якої 50 га, стане більшою 60 га, якщо щороку вона збільшується на 4%? (Закон (математична модель) природного росту $S = S_0e^{kt}$).

Розв'язання. За умовою задачі S_0 = 50 га. Для визначення коефіцієнта e^k скористаємося тим, що за 1 рік площа ділянки збільшиться на 4 %. Маємо: $S = S_0 + 0,04\ S_0 = 1,04 \cdot 50 = 52$. З рівняння 52 = 50 e^k знаходимо, що $e^k = 1,04$. Отримуємо таку залежність $S = 50(1,04)^t$. Математичною моделлю заданої задачі буде показникова нерівність $50(1,04)^t > 60$. Розв'язуючи її, маємо, що $t > \log_{1,04}1,2$ або $t > \frac{\ln 1,2}{\ln 1,04}$. Оскільки $\frac{\ln 1,2}{\ln 1,04} \approx 4,5,$ то приблизно через 4,5 років ділянка матиме площу більшу за 60 га. (***Відповідь.*** $t > 4,5$ років).

***Задача* 9.** Вважають, що при заглибленні на кожні 30,5 м внутрішня температура Землі підвищується на 1°С. На глибині 5 м вона дорівнює 15°С. На якій глибині внутрішня температура більша 25°С?

Розв'язання. Запишемо залежність (математичну модель) температури t від глибини h: $t = t_0 + hk$, де $k = \frac{t}{h} = \frac{1}{30,5} = \frac{2}{61}$. Тоді $t = t_0 + \frac{2}{61}h$. Значення t_0 знайдемо з умови, що на глибині 5 м внутрішня температура Землі дорівнює 15°С: $15 = t_0 + \frac{2}{61} \cdot 5$, звідки $t_0 = 14\frac{51}{61}$. Отже, $t = 14\frac{51}{61} + \frac{2}{61}h$. Щоб відповісти на питання задачі, треба розв’язати нерівність $14\frac{51}{61}+\frac{2}{61}h > 25$. Отже, математичною моделлю задачі є лінійна нерівність. Розв’язуючи нерівність, отримуємо, що $h > 310$. Це означає, що глибше 310 м внутрішня температура Землі більша 25°С. (***Відповідь.*** Глибше 310 м).

***Задача* 10.** У коробці лежать 20 червоних кульок, 10 зелених кульок, а решта – сині кульки. Скільки синіх кульок має бути у коробці, щоб ймовірність вийняти навмання з коробки синю кульку була не менша $\frac{1}{3}$, якщо загальна кількість кульок менша 50?

Розв’язання. Нехай у коробці x синіх кульок, тоді всіх кульок $30 + x$, а ймовірність вийняти навмання з коробки синю кульку буде $\frac{x}{30+x}$. За умовою ця ймовірність не менша $\frac{1}{3}$. Крім того, $30 + x < 50$. У цьому випадку математичною моделлю задачі є система нерівностей: $\begin{cases} \frac{x}{30+x} \geq \frac{1}{3} \\ 30 + x < 50 \end{cases}$.

Знаходимо натуральні розв’язки цієї системи: 16, 17, 18 або 19. Отже, у коробці може бути 16, 17, 18 або 19 синіх кульок. (***Відповідь.*** 16, 17, 18 або 19 синіх кульок).

Задача 11. Функція сукупних витрат фірми дорівнює: $PC = Q^2 + 4Q + 7$, де Q – кількість продукції. Ціна одиниці продукції $p = 12$. При яких обсягах виробництва фірма буде мати економічний прибуток?

Розв’язання. Запишемо функцію – економічний прибуток фірми: $EP = TR - PC$, де EP – економічний прибуток, TR – виторг, $TR = p \cdot Q$. У нашому випадку $EP = 12Q - Q^2 - 4Q - 7$. Фірма матиме прибуток, якщо $EP > 0$. Маємо: $-Q^2 + 8Q - 7 \geq 0$ або $Q^2 - 8Q + 7 \leq 0$. Розв’язавши нерівність, маємо, що $1 \leq Q \leq 7$. Отже, фірма буде мати економічний прибуток, якщо обсяг виробництва буде в межах від 1 до 7. (***Відповідь***. В межах від 1 до 7).

Розглянемо тепер деякі задачі на екстремум, для розв’язування яких можна використати відоме співвідношення між середнім гармонічним, середнім арифметичним і середнім геометричним, а саме:

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n > 0 \ \Rightarrow \ \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}.$$

При цьому, як відомо, нерівності перетворюються на рівності за умови: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Зауважимо, що розв’язування запропонованих задач не тільки мотивує вивчення нерівностей, а й демонструє ще один спосіб розв’язування задач на екстремум, причому цей спосіб у деякій мірі простіший, ніж за допомогою диференціального числення. При цьому слід відмітити, що озброєння учня, а також і майбутнього вчителя математики, арсеналом різних методів розв’язування однієї і тієї ж задачі сприяє розвитку їх методологічної компетентності.

Задача 12. Ділянка прямокутної форми однією стороною прилягає до стіни. Яку найбільшу площу можна обгородити парканом, довжина якого 10 м?

Розв’язання. Позначимо: x, y – ширина і довжина огорожі. За умовою задачі маємо: $2x + y = 10$. Оскільки x, y – додатні числа, скористаємося нерівністю між середнім геометричним та середнім арифметичним: $\sqrt{2x \cdot y} \leq \frac{2x+y}{2} = 5$. Тоді: $\sqrt{2S} \leq 5$. Отже, найбільша за площею ділянка має форму прямокутника $(2x = y)$ і дорівнюватиме $S = 12{,}5$ *м*^{2}. (***Відповідь:*** $S = 12{,}5$ *м*^{2}).

Задача 13. Виробник планує розливати молоко у пакети, які мають форму паралелепіпеда об'ємом 1 літр. Необхідно визначити розміри пакету, за яких на виробництво самих пакетів буде використано найменшу кількість матеріалу, причому відомо, що ширина основи в два рази менша, ніж довжина.

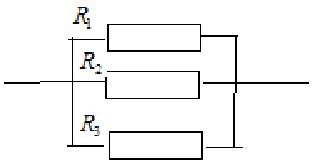
Розв’язання: Запишемо формулу для обчислення об’єму пакета: $V = 2x \cdot x \cdot h = 1$, звідси $x^2 \cdot h = \frac{1}{2}$.

Повна площа поверхні пакета:

$$S = 2(2xh + x \cdot h + 2x^2) = 4x^2 + 3xh + 3xh \geq 3\sqrt[3]{4x^2 \cdot 3xh \cdot 3xh} = 3\sqrt[3]{36 \cdot (x^2h)^2} = 3\sqrt[3]{36 \cdot \frac{1}{4}} = 3\sqrt[3]{9}\ \text{дц}^2.$$

При цьому рівність має місце тільки при $4x^2 = 3xh$. Звідси $h = \frac{4}{3}x$. Підставляючи у рівність $x^2 \cdot h = \frac{1}{2}$, знайдемо шукані розміри пакету: $\frac{\sqrt[3]{3}}{2},\ \sqrt[3]{3},\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$ *дц*. (***Відповідь***. $\frac{\sqrt[3]{3}}{2},\ \sqrt[3]{3},\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$ *дц.*).

Задача 14. Сума опорів трьох резисторів, які з'єднанні паралельно дорівнює 10 *Ом*. Якими мають опори цих резисторів, щоб загальний опір схеми був найбільшим?



$$R_1 + R_2 + R_3 = 10 \ Ом$$

Розв'язання: Як відомо, загальний опір схеми R виражається через опори резисторів R_1, R_2, R_3, які з'єднані паралельно, наступною формулою: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

Тоді, скориставшись нерівністю між середнім гармонічним і середнім арифметичним, запишемо:

$$R = \frac{1}{3} \frac{3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \leq \frac{1}{3} \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} = \frac{10}{9}.$$

Таким чином, загальний опір схеми буде найбільшим у випадку, якщо $R_1 = R_2 = R_3$. (***Відповідь.*** $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{10}{3}$ *Ом*).

Висновок. Отже, масив задач елементарної математики можна розширити прикладними задачами, для розв'язування яких необхідно використати нерівності. Це дозволить обґрунтувати необхідність вивчення нерівностей та сприятиме розширенню арсеналу математичних моделей учнів та студентів.

Використані джерела

1. Борисов Є. М. Задачі прикладного змісту на уроках геометрії / Є. М. Борисов, Н. В. Кугай // Математика в рідній школі. – 2014. – № 7-8. – С. 17-20.
2. Кугай Н. В. Методологічні аспекти математичного моделювання / Н. В. Кугай, Є. М. Борисов // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, III (19), Issue: 38, 2015. – С. 39-42.
3. Кугай Н. В. Методологічні знання та міжпредметні зв'язки // Н. В. Кугай, Л. Ф. Сухойваненко // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, II(16), Issue: 33, 2014. – С. 49-52.
4. Соколенко Л. О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: навч. посібник / Л. О. Соколенко. – Чернігів: Сіверянська думка, 2002. – 128 с.

Kuhai N., Borysov Y.

INEQUALITIES AS MATHEMATICAL MODELS FOR SOLVING APPLIED PROBLEMS

The paper considers a set of applied problems which use a mathematical model – inequality. Applied problems provide motivation of learning mathematics, mastery of new skills, enrich their knowledge with other disciplines, encourage students to new knowledge and research. One of the methods of such research is solving applied problems that require the creation and study mathematical models. Solving problems – not only the most effective form of mathematical activity for students, but also for learning, skills, methods and applications of mathematics.

The idea to teach mathematics through solving problems not lost its importance now. However, the tendency to reduce the interest of pupils and students learning puts before a teacher and lecturer serious problems. One of the means of solving these problems is the use in the classroom the problems of application content, to the solution which pupils and students have a greater attraction. Mathematics provides the greatest contribution to the development of abstract thinking man, and a mathematical model serves as a bridge between theoretical, abstract language of science and the real phenomenon of the world. To both the easiest and the most common mathematical models can be attributed equations, inequalities, functions.

As the practice and experience shows in the literature on elementary mathematics available a small number of applied problems, that are solved using inequality. In addition, in the course of elementary mathematics study of inequality between the arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean, stressed the importance of these inequalities. But usually they are used to prove the other inequalities and almost not used for solving the applied problems.

Key words: *applied problems, mathematical model, inequality.*

Стаття надійшла до редакції 01.05.2015