УДК 372.853

Соколов Є.П.

ПРАВИЛО КРАЙНЬОГО В ГЕОМЕТРИЧНІЙ ОПТИЦІ

Розглядається проблема вибору для задач геометричної оптики. Показано, що в цьому випадку ефективним евристичним принципом є правило крайнього.

Ключові слова: *правило крайнього, логічний комплекс, геометрична оптика, методика, фізика.*

Задача чи процес її розв'язання є предметом дослідження багатьох наукових дисциплін. Це й психологія мислення [1], і "проблемологія" [2], і методика викладання математики [3], і методика викладання фізики [4]. Незважаючи на те, що в кожній із цих дисциплін свої підходи й свої інтереси в дослідженні вказаної проблеми, спільним для них є основне питання проблемології: "Яка дія є головною (кардинальною) дією процесу розв'язання задачі?" У літературі мі знаходимо дві відповіді на це питання: головним елементом розв'язання задачі є знаходження а) невідомої функціональної залежності, яка зв'язує предмети задачі [1], б) алгоритму розв'язання задачі [2].

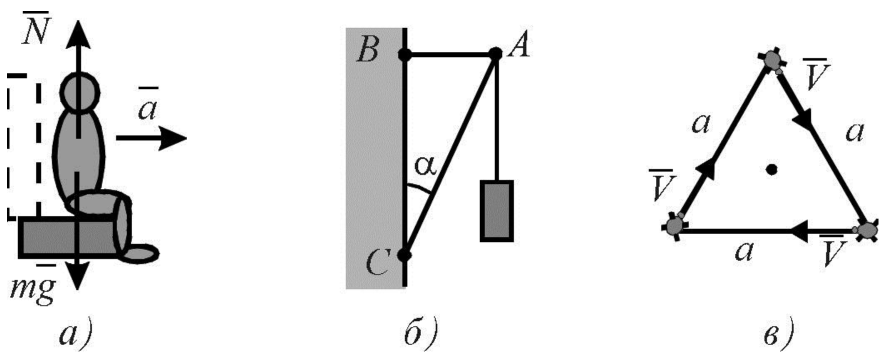
Безумовно, ці обидві думки мають вагому підставу. І, очевидно, у науковій діяльності саме вказані дії виступають як головні елементи процесу розв'язання дослідницьких задач. Зустрічаємо ми їх і в навчальній діяльності: якщо учень не знає потрібної формули, ми кажемо, що в нього пробіли в знаннях, якщо учень не може реалізувати відомий алгоритм, ми кажемо, що в нього немає навичок розв'язання.

Однак, у викладанні фізики існує явище, яке не вкладається в рамки двох указаних альтернатив. Мова йде про навчальну ситуацію, коли учню відомі й потрібні формули (функціональні зв'язки), і алгоритм розв'язання задачі, але самостійно розв'язати задачу він не може. Характерно, що звичайно він навіть не може почати процес розв'язання.

Виникає запитання, а чи правильний тут принцип "Tertium non datum"? Може бути описане явище є вказівкою на те, що існує якась більш прихована й більш фундаментальна дія, що лежить у самому підґрунті діяльності з розв'язання фізичних задач? Дія, без виконання якої розв'язання задачі неможливо?

Практичні спостереження за процесом розв'язання задач учнями старших класів шкіл і студентами університету провели нас до думки, що така прихована дія дійсно існує. На нашу думку, вона полягає в знаходженні предметів логічного комплексу задачі[1].

У динаміці дана проблема проявляється як проблема знаходження всіх сил, що діють на тіло. Дійсно, функціональне рівняння, яке зв'язує сили і прискорення, тут відоме – це другий закон Ньютона. Але цього знання недостатньо, якщо не будуть визначені всі предмети задачі, тобто знайдені всі сили, що діють на тіло. Наприклад, на малюнку 1, *а* приведений неправильний малюнок до задачі про визначення ваги льотчика в літаку, який розганяється з горизонтальним прискорення (на ньому відсутня спинка крісла). У такому випадку відновити всі сили не вдається й тому подальше розв'язання стає безглуздим.



Мал. 1. До проблеми вибору предметів логічного комплексу задачі

[1] Ми використаємо в даній роботі термін «логічний комплекс задачі» замість терміна «модель задачі», щоб підкреслити, що головним предметом нашого інтересу є логічна форма задачі, тобто сукупність предметів задачі й відносин між ними.

У статиці проблема знаходження елементів логічного комплексу може бути сформульована як нульова проблема статики: "Для кого слід записати рівняння рівноваги?" Так, у відомій задачі про знаходження сил реакції тяги AB й підкоса AC (мал. 1, *б*) у якості предмета розгляду можна вибрати понад десяти об’єктів: вантаж, стрижні AB й AC, їхнє об’єднання $AB \bigcup AC$ (конструкцію ABC), їхнє перетинання $AB \bigcap AC$ (точку A) і тощо. Від вибору предмета розгляду буде залежати набір предметів логічного комплексу задачі (набір сил), які нам слід зв’язати відомими умовами рівноваги.

І навіть у кінематиці, де традиційно в якості предметів розгляду вибираються матеріальні точки, можливий альтернативний підхід: предметами розгляду можуть бути відрізки [5] (мал. 1, в).

Отже, проблема знаходження предметів логічного комплексу задачі актуальна для всіх розділів фізики. Але особливу складність вона набуває для задач геометричної оптики. Це пов’язане з тим, що геометрична оптика має справу з нескінченною кількістю об’єктів – з нескінченною кількістю променів. І тут проблема знаходження предметів логічного комплексу задачі перетворюється в проблему вибору.

Нескінченність предметної сфери геометричної оптики випливає з її основних положень (аксіом). Слідуючи Д. Гільберту, який розбив 20 аксіом евклідової геометрії на п’ять значеннєвих груп, ми також об’єднаємо аксіоми геометричної оптики в три групи. Наведемо тут формулювання (у діалоговій формі) двох перших груп.

"Аксіоми існування".

А1. Що є світло? – Світло – це потік променів.

А2. Звідки беруться промені? – Їх випромінюють висвітлювальні тіла.

А3. Скільки променів випромінює висвітлювальне тіло? – Нескінченно багато й у всіх напрямках.

А4. Коли ми бачимо висвітлювальні тіла? – Тоді, коли хоча б один із променів попадає нам в око.

Відзначимо, що цій системі основних положень можна протиставити "зворотну" систему, яка вважає, що промені виходять із ока й обмацують усе навколо. Ця подвійність є наслідком принципу оборотності світлових променів: "Якщо є можливим промінь, який іде із точки A в точку B, то можливий і зворотний йому промінь, який іде із точки B у точку A". У своїй практиці ми використовуємо першу систему аксіом, використовуючи зворотню лише для спрощення побудови кардинального променя (променя, який розв’язує задачу).

"Аксіоми взаємодії" (мал. 2).

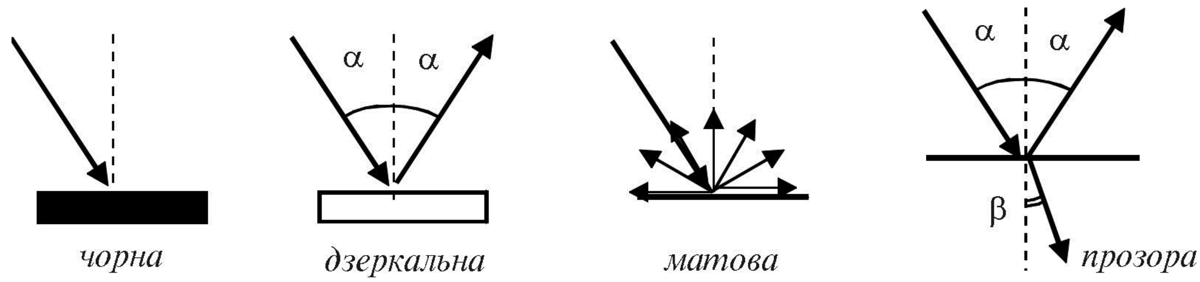
А5. Між собою промені не взаємодіють.

А6. Промінь, який падає на чорну поверхню, зникає (поглинається).

А7. Промінь, який падає на дзеркальну поверхню, відбивається згідно із законом дзеркального відбиття: кут падіння дорівнює куту відбиття.

А8. Промінь, який падає на матову поверхню, розбивається на нескінченну множину променів, які йдуть в усі боки.

А9. Промінь, який падає на прозору поверхню, розбивається на два промені, один з яких відбивається з виконанням закону дзеркального відбиття, а другий заломлюється з виконанням закону Снелліуса.



Мал. 2. "Аксіоми взаємодії"

З приведених аксіом випливає (для двовимірних задач), що сімейство променів, які випускає точкове джерело світла, має потужність[2] ∞^1, неточкове джерело – ∞^2, а при включенні в розгляд матових поверхонь потужність множини можливих предметів задачі (сімейства променів) стає рівною ∞^3. Тому зрозуміло, що в задачах геометричної оптики проблема вибору кардинального променя здобуває особливу гостроту. Допомогти тут може правило крайнього.

[2] Під терміном «потужність дорівнює ∞^n» ми будемо рахувати, що в даної задачної ситуації є n незалежних величин, які можуть приймати нескінченну множину значень.

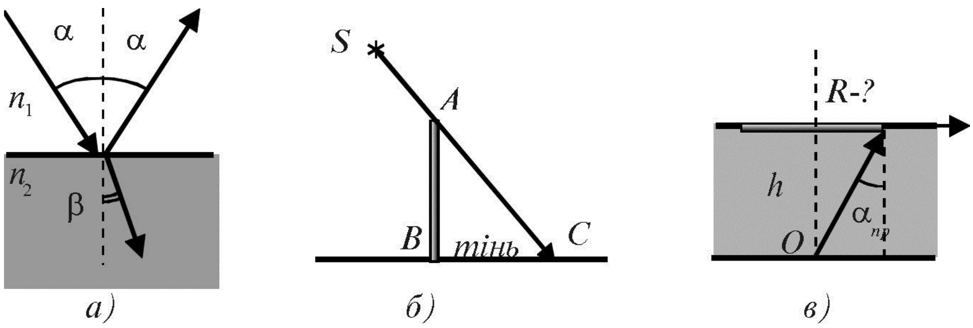
Правило крайнього – відомий, традиційний інструмент (евристичне правило) олімпіадної математики [6]. Звучить воно так: *"Якщо не знаєш із чого почати розв'язання задачі, звернися до розгляду крайнього елемента"* (найбільшого, найменшого, найбільш лівого, найбільш правого et cetera).

У фізиці це правило в явному виду не формулюється, і на практиці вибір предмета розгляду учні роблять інтуїтивно. На наш погляд, тут нам допомагає той факт, що правило крайнього закладене в механізмі сприйняття людини. Про це свідчать такі факти, як вибір зі списку першого або останнього запису, розміщення предметів або в середині, або по краях області розміщення й, нарешті, вбудованій в наше сприйняття механізм упізнання предметів по їхньому силуету, тобто по множині крайніх точок. У такій ситуації кілька прикладів, показаних учителем, дозволяє учням "схопити" основну ідею вибору. Для найпростіших випадків цього достатньо, але в більш складних випадках необхідно усвідомлене виконання вибору. Таку можливість и надає правило крайнього.

Покажемо, як правило крайнього працює в геометричній оптиці. Свій виклад ми будемо будувати, дотримуючись плану практичного заняття "Геометрична оптика" спеціального курсу фізики "Екзаменаційна фізика".

1. *Формальні задачі.* У цьому підрозділі розглядаються задачі, які генеруються задачною ситуацією, зв'язаною зі стандартним малюнком 3, *а*. У цьому випадку, необхідність вибору променя відсутня. Тому що предмет розгляду (падаючий промінь) безпосередньо заданий в умові задачі.

2. *Однопроменеві задачі.* До однопроменевих задач ми відносимо такі задачі, для розв'язання яких необхідно й достатньо побудувати один промінь. Перше знайомство з такими задачами дає наступний приклад.



Мал. 3

Задача 1. Площина висвітлюється точковим джерелом світла S (мал. 3, б). Побудувати область тіні, яку створює стовп AB.

Після перекладу терміна "тінь" на мову аксіом геометричної оптики (тінь – область, у яку не попадає жоден промінь), ми опиняємося перед задачею, для розв'язання якої необхідно перебрати всі точки площини (ця множина має потужність ∞^1).

Правило крайнього дозволяє накласти певну структуру на цю множину. З кожною точкою області тіні можна зв'язати промінь, який не приходить у неї, тому що перекривається стовпом (проходить через одну із точок відрізка AB). Крайнім елементом для цієї множини променів буде промінь, який проходить через крайню точку відрізка AB, тобто промінь AS. Побутова цього променя розв'язує запропоновану задачу. Він розбиває горизонтальну площину на дві освітлені області й область тіні BC.

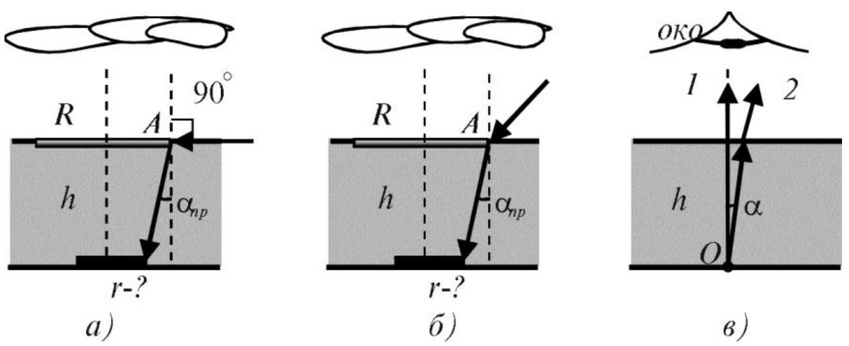
Задача 2. На поверхні ставка плаває круглий пліт. При якому радіусі плоту з повітря не буде видна точка дна O (мал. 3, в)? Глибина водойми дорівнює $h = 2$ м,, показник заломлення води $n = 1{,}33$.

Якщо ввести позначення, x – промінь, який виходить із точки O, $P(x)$ – властивість бути закритим екраном, а $Q(x)$ – властивість випробувати на поверхні води повне внутрішнє відбиття, то "невидимість" точки O означає, що пропозиціональна функція $\forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big)$ є істинною. "Мінімальність" радіуса плоту означає, що множина променів, для яких є істинною пропозиціональна функція $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$, мінімально, тобто складається з одного променя. Тому "крайність" променя для першої властивості означає, що він повинен проходити через край плота, а "крайність" для другої властивості вказує на те, що він повинен бути граничним променем, тобто повинен падати на поверхню розділу під кутом, що дорівнює куту повного внутрішнього відбиття $\alpha_{пр} = \arcsin(1/n)$. Після побудови цього кардинального променя обчислення дають відповідь: $R = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \cdot h = 2{,}27$ *м.*

Задача 3. На поверхні ставка плаває круглий пліт радіусом $R = 3$ м. Знайти радіус повної тіні на дні ставка в похмурний день, якщо глибина водойми дорівнює $h = 2$ м, показник заломлення води $n = 1,33$.

Тут множина можливих об'єктів розгляду (променів) має потужність ∞^2. У якості параметрів, що задають це сімейство променів, можна вибрати точку на поверхні водойми й кут падіння променя.

Крайній промінь (по кожному сімейству параметрів) – це промінь, який попадає в крайню точку плота A й має кут падіння $\alpha = 90°$, тобто йде паралельно поверхні води (мал. 4, *а*). Після побудови цього променя обчислення дають: $r = R - \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \cdot h = 0,73$ м.



Мал. 4. Правильна (а) и неправильна (б) побудова кардинального променя

Відзначимо, що без допомоги викладача учні цю задачу розв'язати не можуть. Їм вдається тільки наполовину здійснювати побудову кардинального променя. Вони здогадуються, що промінь повинен проходити через край плота, але не можуть провести ковзний промінь через цю точку. Тому розв'язання звичайне закінчується тим, що вони малюють промінь із невизначеним $(\alpha \approx 40° - 70°)$ кутом падіння (мал. 4, *б*).

Чому ця задача складна для учнів? Ми бачимо тут дві причини. Перша, психологічна причина, полягає в тому, що промінь, який іде паралельно поверхні води, має своїм джерелом нескінченно віддалену точку. І тому для побудови такого променя необхідно виконати психологічно складну дію: вийти за межі області малюнка (зруйнувати гарну форму). Друга, логічна причина, полягає в тому, що ми приписуємо кардинальному променю дві несумісні властивості: він іде паралельно поверхні води, і в той же час він перетинає цю поверхню в точці A. Розв'язання цього логічного протиріччя методом граничного переходу вимагає спеціального методичного обґрунтування.

3. *Двопроменеві задачі.* Так ми називаємо задачі, для розв'язання яких необхідно вибрати два промені. Це задачі, в яких розвивається задачна ситуація, пов'язана з поняттям "оптичного зображення". Для аналізу таких ситуацій нам слід додати до сформульованої раніше системи аксіом геометричної оптики "аксіому зображення": спостерігач визначає положення джерела світла як центр гомоцентричеського пучка променів, які потрапляють в його око (А10). Представлення про двопроменеві задачі дає відома задача про видиму глибину водойми.

Задача 4. Рибалка розглядає із човна дно водойми. Чому дорівнює дійсна глибина водойми $h_д$, якщо видима глибина водойми дорівнює $h_в = 1,5$ м? Показник заломлення води $n = 1,33$, рибалка дивиться вертикально вниз.

У цьому випадку правило крайнього рекомендує вибрати найпростіший промінь, тобто промінь, що йде вертикально нагору (мал.. 4, *в*). У якості другого променя можна вибрати будь-який промінь, який йде під малим кутом до першого.

4. *Катоптрика.* У цьому розділі ми поєднуємо, слідуючи Евкліду, задачі, пов'язані з явищем відбиття світла від плоских дзеркал. Як правило, для розв'язання цих задач необхідно вибирати два або більше промінів. З роботою правила крайнього в цих задачах можна познайомитися по [7].

Висновки

1) Однією з основних дій процесу розв'язання фізичних задач є процес побудови логічного комплексу задачі. Така побудова, у першу чергу, вимагає знаходження тих предметів, розгляд яких дозволить створити повний, замкнений логічний комплекс задачі.

2) У геометричній оптиці, яка працює з нескінченною кількістю об'єктив (променів), проблема знаходження предметів розгляду зводиться до проблемі вибору. Здійснити такий вибір дозволяє евристичне правило крайнього.

Використані джерела

1. Гурова Л.Л. Психологический анализ решения задач / Лидия Леонтьевна Гурова. – Воронеж, Издательство Воронежского университета, 1976. – 328 с.
2. Балл Г.А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект / Георгий Алексеевич Балл. – М. : Педагогика, 1990. – 184 с.
3. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач / Лев Моисеевич Фридман. – М. : Педагогика, 1977. – 208 с.
4. Павленко А.І. Методика навчання учнів середньої школи розв'язанню і складанню фізичних задач / Анатолій Іванович Павленко. – К. : ТОВ "МФА", 1997. – 177 с.
5. Соколов Є.П. Кінематика відрізка / Євгеній Петрович Соколов // Фізика в школах України. – 2015. – №1 (269). – С. 10-17.
6. Розенталь А.Л. Правило крайнего / А.Л. Розенталь // Квант. – 1988. – №9. – С. 53-57.
7. Соколов Е.П. Как мы придумывали задачи по оптике, или новейшие приключения Буратино / Евгений Петрович Соколов // Школа юного вченого. – 2013. – №5-6 (25-26). – С. 35-45.

Socolov E.

THE RULE OF EXTREME IN GEOMETRICAL OPTICS

The present article deals with the problem of choice in the tasks of geometrical optics. Consideration is carried out in the framework of the theory, which reduces the solution of the physical problem to two actions: to the operation of creation the logical complex of task and to motion on this complex.

Logical complex contains two kinds of elements. This is, firstly, the objects (forces, energies, currents, voltages etc.), and, secondly, the relationships (physical laws and mathematical structures).

The objects of logic complex of task are not given directly to us in the task statement. We need to find them by considering the interaction of objects described in the task statement. The problem of finding the objects of logical complex exists in all sections of physics. But in geometrical optics this problem becomes especially difficult.

Geometrical optics deals with an infinite number of objects (rays of light). This property of geometrical optics (the need to consider an infinite number of rays) is derived from its axioms, which are formulated in the article. Therefore, in the case of geometric optics the problem of finding the objects of the task reduces to the problem of choice. In simple cases, we make the necessary choice intuitively, using our innate ability to take in considerate firstly the extreme elements. In more complex cases, this is not possible.

To make the required choice allows the rule of extreme. This rule is the well known rule of school olympiad mathematics. This rule says that if you don't know how to start the solution, then consider the most extreme thing (the most right, the most left, the nearest etc.).

In the article presents the illustrations of the application of the rules of extreme to the single ray tasks, to the two-ray tasks and to the task of catoptrics.

Key words: rule of extreme, logical complex, geometrical optics, methods of teaching, physics.

Стаття надійшла до редакції 27.05.2015