

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ЧАСТИ ЗАТРАТ АППАРАТНЫХ РЕСУРСОВ НАВИГАЦИОННОГО ПРИЕМНИКА

Раевский Н.В., к.т.н.

ООО "КБ "НАВИС-Украина"

Проведено порівняльний аналіз класичного фільтру Калмана і однією з його модифікацій (модифікація Ендрюса) з метою отримання інформації про ресурсоемність розглянутих алгоритмів оптимального оцінювання лінійних систем.

Ключові слова: модифікація, фільтр Калмана, місце розташування, коваріація, інновація, екстраполяція.

Введение

В современных навигационных системах и устройства (как спутниковых, так и инерциальных) для решения навигационной задачи широко практикуется использование фильтра Калмана, который предназначен для рекурсивного дооценивания вектора состояния априорно известной динамической системы.

Одним из критериев при применении того или иного алгоритма, помимо его точностных характеристик, является критерий ресурсоемкости. Под ресурсоемкостью предлагаемого к использованию алгоритма следует понимать выделение необходимой аппаратной части приемника для обработки формульной реализации. Ресурсоемкость в данном понимании будет характеризоваться временем, необходимым для расчета.

Известно, что алгоритм работы фильтра Калмана базируется на дискретизированных во времени линейных динамических системах и основан на временном (а не на частотном) представлении сигнала [1, 2].

В настоящее время известно множество модификаций классического алгоритма фильтра Калмана.

Известны модификации фильтра, в основе которых лежит использование квадратных корней из матриц [3, с. 77–90]:

- модификация Поттера;
- модификация Эндрюса;
- модификация Беллантиони и Доджа;
- модификация Карлсона;
- модификация Бирмана;
- модификация Джозефа.

Постановка задачи

В научной литературе указывается, что модификации классического линейного филь-

The comparative analysis of the classical Kalman's filter and one of its modifications (Andrews' modification) is held in the article. The aim of the analysis is to obtain the information about the recourse keeping ability of the examined algorithms of linear systems optimal estimation.

Key words: modification, Kalman's filter, position, covariance, innovation, extrapolation.

ра Калмана данного вида помимо повышения точности оценки вектора состояния системы, позволяют снизить затраты в части выделения аппаратных ресурсов [3, с. 77–90].

Поэтому, *целью данной* работы является сравнительный анализ классического линейного фильтра Калмана и одной из его возможных модификаций в части выделения аппаратных ресурсов. Для проведения сравнительного анализа была выбрана модификация Эндрюса.

Сравнительный анализ позволит выявить, насколько применимы модификации в навигационной аппаратуре для решения практических задач.

Работа фильтра Калмана состоит из двух основных этапов: предсказания (экстраполяции) и коррекции предсказанной величины с учетом поступивших значений. На этапе предсказания фильтр получает предварительную оценку состояния системы на текущий шаг по итоговой оценке состояния с предыдущего шага – априорную оценку состояния системы. Для получения априорной оценки не используются наблюдения на соответствующем шаге. На этапе коррекции априорная оценка дополняется текущими измерениями.

Полученная в результате коррекции величина является апостериорной оценкой вектора состояния системы. Апостериорная оценка является конечным результатом работы фильтра [4, с. 20–32].

Изложение основного материала

Применительно к 2D-решению вектор состояния примет следующий вид [1, 2]:

$$X = (x_k \quad y_k \quad \dot{x}_k \quad \dot{y}_k \quad \ddot{x}_k \quad \ddot{y}_k)^T \quad (1)$$

Вектор измерений аналогичен по структуре вектору состоянию.

Размерность вектора измерения для минимального значения энтропии системы должна быть равна размерности вектора состояния:

$$Y = (x_k \ y_k \ \& \ \& \ \& \ \&)^T. \quad (2)$$

Связь между пространством состояний и подпространством истинных измерений описывается функцией:

$$z = h(x) \quad (3)$$

В случае, когда функция h линейна, то ее можно представить как умножение на матрицу постоянных коэффициентов:

$$z = H \times x \quad (4)$$

где H – частная производная от h по x , которая называется матрицей измерений.

При проведении измерений местоположения, скорости и ускорения объекта матрица измерений является единичной диагональной матрицей [1, 2]:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ \& \\ \& \\ \& \\ \& \end{pmatrix} \quad (5)$$

матрица перехода от измерения к измерению:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Этап предсказания вектора состояния системы описывается следующими зависимостями:

Прогноз вектора состояния системы:

$$X_k = A_{k-1} \times X_{k-1} \quad (7)$$

Прогноз дисперсии прогнозируемого вектора состояния:

$$P_k = A_{k-1} \times P_{k-1} \times A_{k-1}^T + Q_{Xk-1} \quad (8)$$

Интервал времени:

$$\Delta t = T - T_0 \quad (9)$$

Этап уточнения предсказания вектора состояния системы описывается следующими зависимостями:

Разность числимых и измеренных (инновация):

$$V_k = Y_k - H_k \times X_{k-1} \quad (10)$$

Ковариация предсказанного измерения:

$$S_k = H_k \times P_k \times H_k^T + R_k \quad (11)$$

Коэффициент усиления фильтра:

$$K_k = \frac{P_k \times H_k^T}{S_k} \quad (12)$$

Уточнение прогноза вектора состояния системы:

$$X_{k+1} = X_k + K_k \times V_k \quad (13)$$

Уточнение дисперсии прогнозируемой координаты:

$$P_{k+1} = P_k - K_k \times S_k \times K_k^T \quad (14)$$

Общая модель алгоритма изображена на рис. 1.

Использование алгоритма фильтрации на основе классического линейного фильтра Калмана для оценка параметров движения объекта с помощью центрального процессора навигационного приемника не всегда возможно из-за несовместимости программного обеспечения с аппаратной частью в части выделения ресурсов процессора. Процессоры навигационных приемников не являются идеально точными вычислительными устройст-

вами, и имеют индивидуальные для каждого процессора ошибки округления. Эти различия могут быть существенны, что имеет принципиальное значение для принятия решения о целесообразности использования результатов работы алгоритмов оценивания, и степени доверия к этим результатам. В отличие от классической реализации алгоритма, **основная идея метода фильтрации с использованием квадратных корней из корреляционных матриц состоит в следующем:**

1. экстраполированную и апостериорную корреляционные матрицы оцениваемых параметров представляют в виде произведения некоторых невырожденных матриц на транспонированные по отношению к ним матрицы;
2. соотношения для расчета корреляционных матриц и коэффициента усиления фильтра заменяют эквивалентными соотношениями, которые позволяют гарантировать положительную определенность корреляционных матриц.



Рис. 1. Модель алгоритма классического фильтра Калмана

В [3, с. 77-90] описано использование **модификации классического фильтра Калмана, разработанной Эндрюсом**. Теоретически использование данной модификации позволяет избежать трудоемкой процедуры обращения матриц, что, в свою очередь, теоретически должно снизить нагрузку на процессор навигационного устройства.

Модификация Эндрюса предполагает наличие в системе шума системы для векторных измерений параметров оценки. Основной идеей модификации является представление экстраполированной и апостериорной ковариационных матриц в виде произведений двух матриц – нижнетреугольной (S_{k-1}, S_k, S_{k+1}) и верхнетреугольной $(S_{k-1}^T, S_k^T, S_{k+1}^T)$:

$$\begin{cases} P_{k-1} = S_{k-1} \times S_{k-1}^T \\ P_k = S_k \times S_k^T \\ P_{k+1} = S_{k+1} \times S_{k+1}^T \end{cases} \quad (15)$$

Данное разложение ковариационных матриц на произведение нижнетреугольной и верхнетреугольной называется разложением Холецкого и представляет собой извлечение квадратного корня из матрицы.

Модель системы:

$$X_k = A_{k-1} \times X_{k-1} + \Psi_k \quad (16)$$

Модель измерений:

$$z = H \times x + R_k \quad (17)$$

Этап предсказания вектора состояния системы описывается следующими зависимостями:

Прогноз вектора состояния системы:

$$X_k = A_{k-1} \times X_{k-1} \quad (18)$$

Разложение Холецкого:

$$P_{k-1} = S_{k-1} \times S_{k-1}^T \quad (19)$$

Экстраполяция нижнетреугольной матрицы:

$$\begin{cases} j_k = A_{k-1} \times S_{k-1} \\ S_k = (j_k \times j_k^T + Q_k)^{1/2} \end{cases} \quad (20)$$

Прогноз дисперсии прогнозируемого вектора состояния, где S_k – нижнетреугольная матрица:

$$P_k = S_k \times S_k^T \quad (21)$$

Этап уточнения предсказания вектора состояния системы описывается следующими зависимостями:

$$\begin{cases} F_k = S_k^T \times H_k^T \\ G_k = (F_k^T \times F_k + R_k)^{1/2} \\ B_k = R_k^{1/2} \end{cases} \quad (22)$$

Разность счислимых и измеренных (инновация):

$$V_k = Y_k - H_k \times X_{k-1} \quad (23)$$

Коэффициент усиления фильтра:

$$K_k = S_k \times F_k \times (G_k^T)^{-1} \times G_k^{-1} \quad (24)$$

Уточнение матрицы (E_k - единичная матрица):

$$S_{k+1} = S_k \times \left[E_k - F_k \times (G_k^T)^{-1} \times (G_k + B_k)^{-1} \times F_k^T \right] \quad (25)$$

Уточнение прогноза вектора состояния системы:

$$X_{k+1} = X_k + K_k \times V_k \quad (26)$$

Восстановление ковариационной матрицы

$$P_{k+1} = S_{k+1} \times S_{k+1}^T \quad (27)$$

Общая модель алгоритма модифицированного фильтра Калмана (модификация Эндрюса) изображена на рис. 2.

Моделирование включает в себя оценку заданной траектории движения (рис.3), а также расчет среднеквадратических погрешностей каждого фильтра (табл. 1).

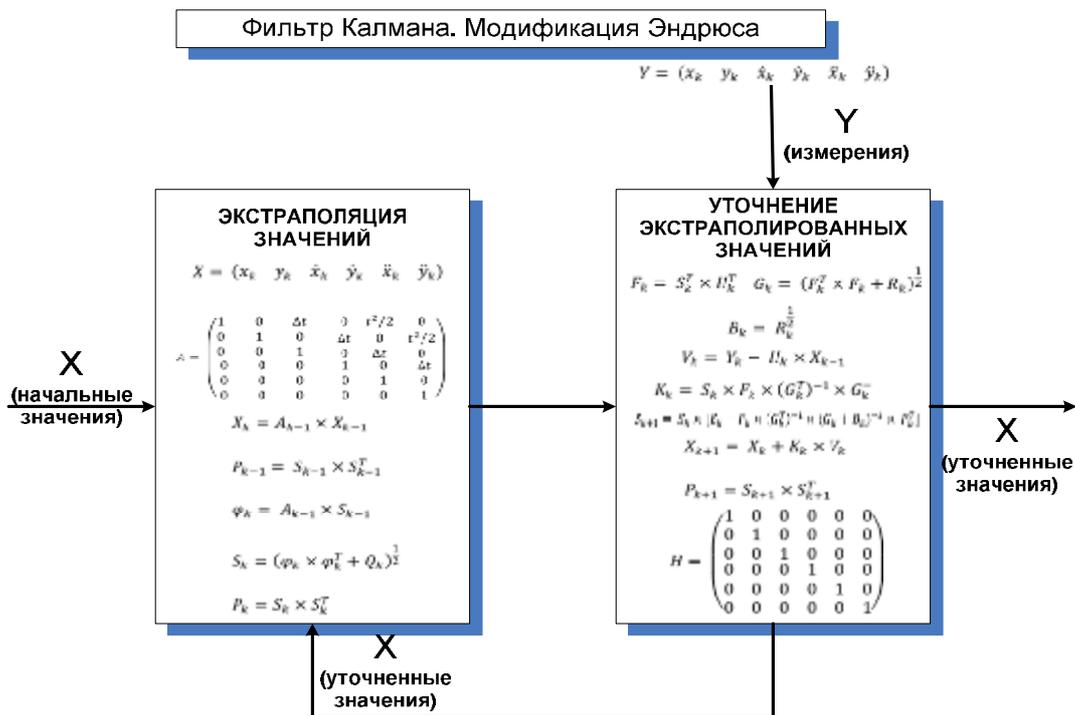


Рис. 2. Модель алгоритма модифицированного фильтра Калмана (модификация Эндрюса)

Результаты моделирования работы классического и модифицированного фильтров приведены на рис. 4.

Для выработки критериев оценки аппаратных затрат для реализации представленных

к рассмотрению алгоритмов фильтрации было предложено оценить затраты времени, необходимые каждому из рассмотренных ранее фильтров для решения поставленной задачи на заданном интервале времени.

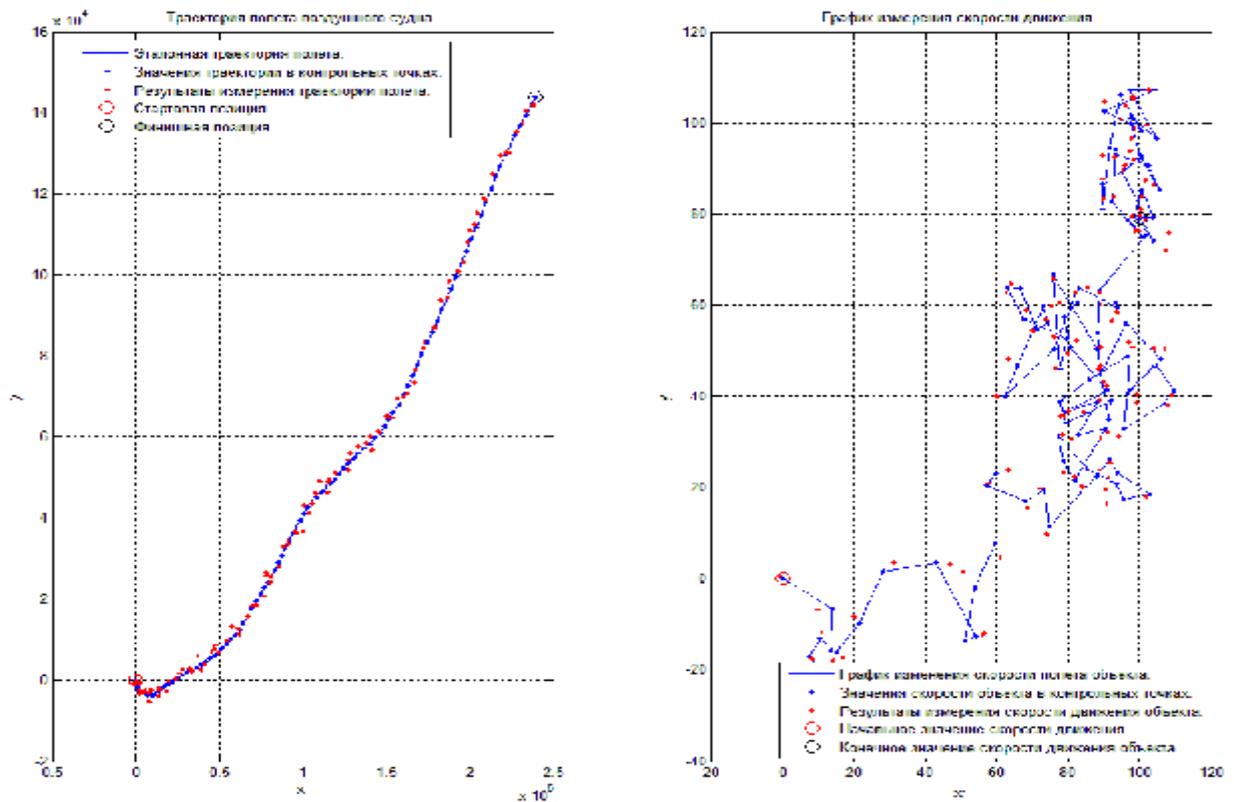


Рис. 3. Траектория движения объекта на плоскости

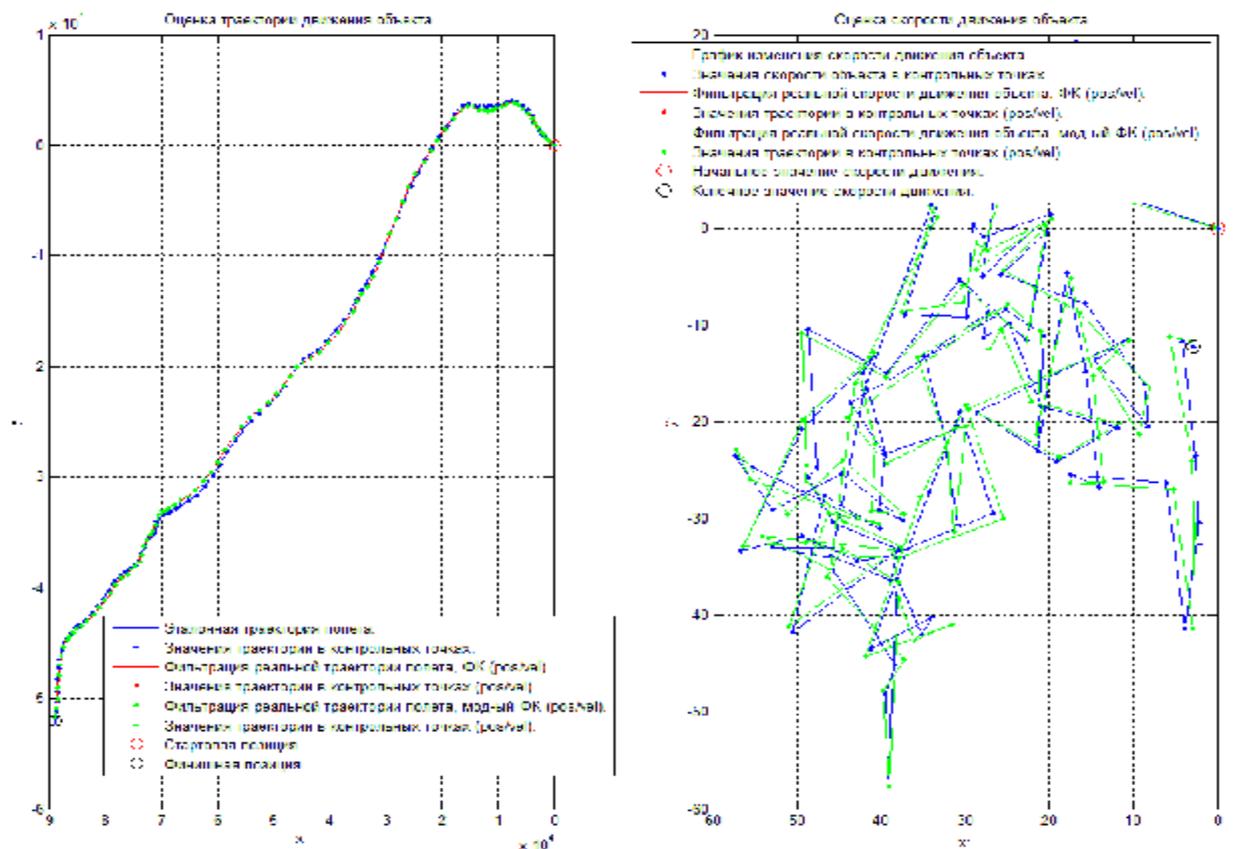


Рис. 4. Оценка траектории движения объекта на плоскости и его скорости с помощью классического фильтра Калмана и модификации Эндрюса

Среднеквадратические погрешности классического и модифицированного фильтров Калмана

ERRORS	POSITION	VELOCITY
KF RMS error (position & velocity sensor)	52413.4802864	0.5760988
KF-RTS RMS error (position & velocity sensor)	19341.6542104	0.5580853
KF (ANDREWS) RMS error (position & velocity sensor)	52413.4802865	0.5760988
KF-RTS (ANDREWS) RMS error (position & velocity sensor)	19341.6542104	0.5580853

Построенные модели фильтрации включают в себя строго ограниченный набор точек для оценки параметров (для данной модели - 100 точек).

Было предложено оценить для каждого из двух представленных фильтров Калмана (классического и модифицированного) время, которое затрачивается на один цикл **predict-update**. Количество циклов ограничено количеством точек и может варьироваться в зависимости от предъявляемых требований. Сумма времен всех циклов даст искомое значение времени, необходимое для оценки заданной траектории движения объекта.

Полученные временные значения позволяют оценить следующие параметры:

- время, затрачиваемое процессором навигационного устройства, для выполнения каждого шага (для обоих фильтров);
- среднее время выполнения операции (среднее арифметическое времен всех циклов);
- максимальное и минимальное значение для каждого из фильтров, необходимое для выполнения одного цикла **predict-update**.

Временные характеристики моделей, позволяющие оценить разработанные алгоритмы в части аппаратных затрат при реализации процедуры фильтрации, приведены на рис. 5 и в табл. 2.

Таблиця 2

Временные характеристики моделей

Type of filter	Время работы фильтра	Время сглаживания	Суммарное время	
KF (classic)	100 точек: <u>0.0166656 сек</u>	100 точек: <u>0.0088418 сек</u>	100 точек: <u>0.0255074 сек</u>	100%
KF (modified)	100 точек: <u>0.0370511 сек</u>	100 точек: <u>0.0071982 сек</u>	100 точек: <u>0.0442494 сек</u>	173%

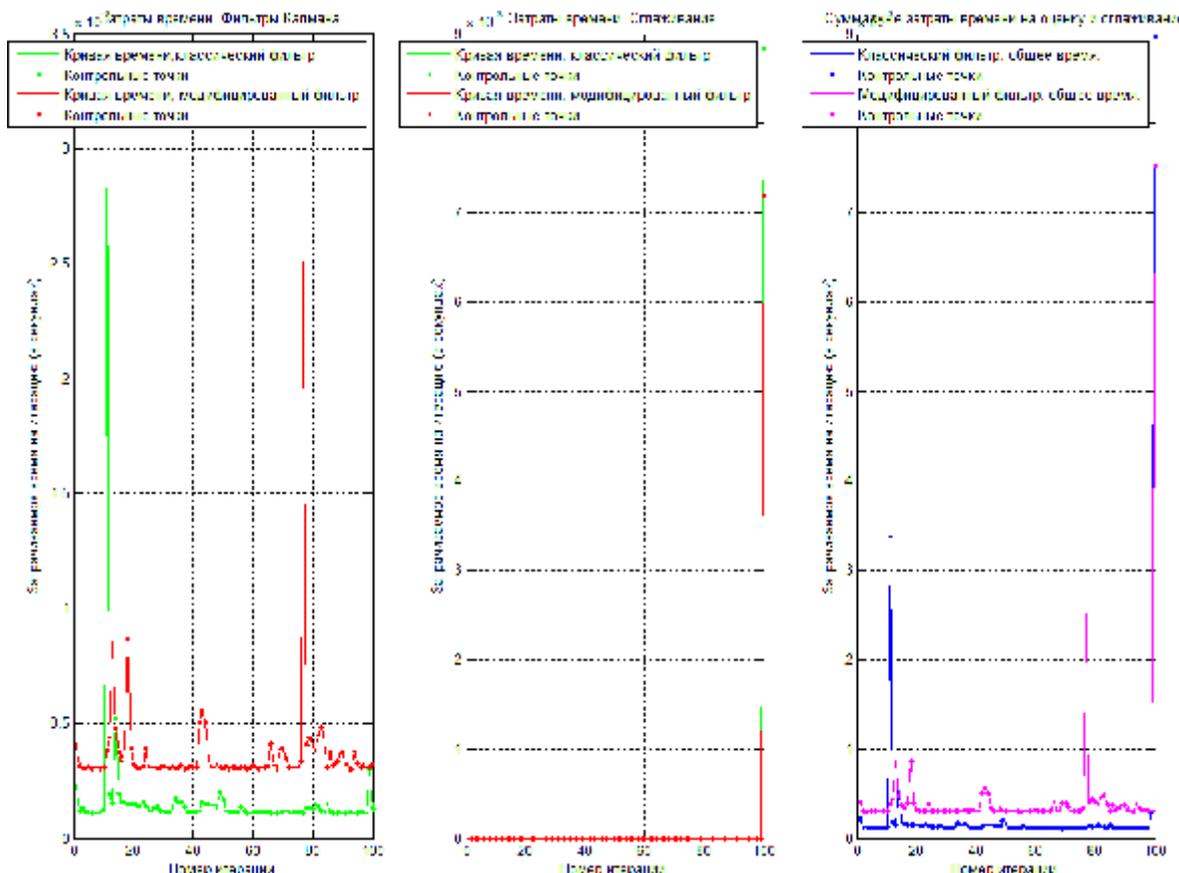


Рис. 5. Временные характеристики классического и модифицированного фильтров Калмана

В ряде случаев, характерных для начального этапа работы и оптимального фильтра, и сглаживающего, в классическом варианте на некоторых итерациях требуется большие временные затраты, чем для модифицированного фильтра в один и тот же момент времени. Пиковые затраты вносят вклад в общие затраты времени на обработку, но существенного влияния на средний результат не оказывают. Поэтому, факт увеличения средних временных затрат на обработку заданного интервала не то что не подтверждает утверждения, приведенные в [3, с. 77–90], а и опровергает их в части снижения аппаратных затрат. На рис. 5 приведены графики, демонстрирующие временные зависимости на каждом шаге работы каждого из фильтров. Также было учтено время, необходимое на построение заданного диапазона измерений, и полученное суммарное затрачиваемое время для реализации каждого из фильтров.

Выводы

1. Проведен сравнительный анализ алгоритмов оптимальной фильтрации в части затрат аппаратных ресурсов при решении навигационной задачи в процессоре устройства.
2. Предполагалось, что модификации классического алгоритма фильтра Калмана, в основе которых лежит использование квадратных корней из матриц, позволят снизить уровень аппаратных затрат при оценке параметров системы в навигационном процессоре.
3. Результаты проведенного анализа показали, что указанные модификации в части аппаратных затрат не только не позволяют сни-

зить их уровень, а, наоборот, увеличивают время на обработку данных, поступающих от датчиков. При этом время, затрачиваемое на обработку данных, в модифицированном фильтре возрастает на 73% по сравнению с классическим фильтром.

4. Использование модификаций фильтра Калмана является сомнительным в силу не доказанности явных преимуществ по сравнению с хорошо изученной и апробированной на практике классической реализацией фильтра.
5. Для оценки параметров системы в процессоре при решении навигационной задачи рекомендуется использование классического алгоритма оптимального фильтра Калмана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mohinder S. Grewal, Angus P. Andrews. Kalman Filtering: Theory and Practice using Matlab, Second Edition. – Wiley & Sons Interscience, 2001. – P. 114–165.
2. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. – М.: Мир, 1988, пер. с англ., – С. 71–156.
3. Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных величин. – М.: Энегатомиздат, 1990. – 207 с.
4. Chui C.K., Chen G. Kalman Filtering with Real-Time Applications, Fourth Edition. – Springer-Verlag Berlin, 2009. – 229 p.

Расвський М.В., к.т.н., інженер-конструктор II-ої категорії, ТОВ "НАВІС-Україна", м. Сміла, Черкаська область.