

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ЗМІНИ ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНИХ ЗВ'ЯЗКІВ СТАЦІОНАРНИХ КОМПОНЕНТІВ ВІБРАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ ТОНКОЇ ДЕТАЛІ ПРИ РОЗВИТКУ ТРІЩИНИ

Яворський І.М., *д.ф.-м.н., професор,*

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету,

Кравець І.Б., *к.т.н.,*

Юзефович Р.М., *к.т.н.,*

Мацько І.Й.

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

Разработана статистическая модель вибрационного отклика от тонкой детали с трещиной. Исследовано динамику изменений взаимокорреляционных связей между стационарными компонентами вибрационного сигнала. Показано, что размер трещины не влияет на форму и ширину центрального максимума корреляционных функций.

Ключевые слова: *вибрационный сигнал, периодически коррелированный случайный процесс, взаимокорреляционная функция, оценки вероятностных характеристик.*

Вібраційні сигнали є потужним діагностичним засобом, що несе інформацію про реальний стан вузлів цих комплексів. Тому статистичний аналіз цих процесів є надійним діагностичним інструментом для моніторингу стану системи методами неруйнівного контролю. Поява дефектів у механічних вузлах призводить до зміни характеристик вібраційного сигналу. Для виявлення дефектів на ранній стадії зародження слід аналізувати всі можливі імовірнісні характеристики вібраційного сигналу.

У роботі [1, с. 16] показано, що тріщина у механічному вузлі призводить до появи нестационарності у вібраційному сигналі, а сам вібраційний сигнал від дефектного вузла є періодично корельованим випадковим процесом (ПКВП). Структура кореляційної функції вібраційного сигналу залежить від довжини тріщини. При розвитку тріщини в кореляційній структурі, окрім нульового кореляційного компонента, появляються перший та другий, потужність яких зростає з ростом тріщини [2, с. 23].

Метою даної роботи є дослідження змін взаємокореляційних функцій стаціонарних компонентів $x_k(t)$ вібраційного процесу від тонкої деталі з тріщиною. Оскільки вібро сигнал $x(t)$ описується в рамках теорії ПКВП, то

The statistical model of vibration response from thin cracked detail has been created. The dynamic of mutual cross-correlation connection changes between stationary components of vibration signal is carried out. It has been shown, that the size of the crack does not affect the form and width of the central maximum of correlation function.

Key words: *vibration signal, periodically correlated random process, mutual cross-correlation function, the assessments of probability characteristics.*

його можна виразити через стаціонарні компоненти:

$$x(t) = \sum_{k=-M}^M x_k(t) e^{ik\omega t} \quad (1)$$

У цьому поданні, по суті, коефіцієнти Фур'є замінені на стаціонарно зв'язані випадкові процеси $x_k(t)$. Усереднивши за ансамблем (1), отримуємо вираз для детермінованої складової вібраційного сигналу:

$$m(t) = \sum_{k=-M}^M E x_k(t) e^{ik\omega t} = \sum_{k=-M}^M m_k(t) e^{ik\omega t} \quad (2)$$

Отже, коефіцієнти Фур'є, математичного сподівання є математичними сподіваннями модулюючих процесів $x_k(t)$. Для знаходження компонентів кореляційної функції процесу $x(t)$ слід помножити центроване рівняння (1), яке визначає випадкову складову вібраційного процесу $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m(t)$, на аналогічне, однак зміщене у часі на інтервал u , та усереднити за ансамблем:

$$B_n(u) = \begin{cases} \sum_{k=n-M}^M E R_{k-n,k} \omega e^{ik\omega u}, & n \geq 0, \\ \sum_{k=M}^0 E R_{k-n,k} \omega e^{ik\omega u}, & n < 0, \end{cases}$$

тут $R_{ik}(u) = E x_i^*(t) x_i(t+u)$ – взаємокореляційна функція компонент $x_k(t)$. Також знаходимо формули для спектральних компонентів $f_k(\omega)$:

$$f_k(\omega) = \begin{cases} \int_{k-n-M}^M e^{j(k-n-k)(\omega - k\omega_0)} dn, & n \geq 0, \\ \int_{k-M}^{n+M} e^{j(k-n-k)(\omega - k\omega_0)} dn, & n < 0, \end{cases}$$

де $f_{l,k}(\omega)$ – взаємна спектральна густина стаціонарних компонент $x_k(t)$ і $x_l(t)$:

$$f_{lk}(\omega) = \frac{1}{2p} \int_{-T}^T R_{lk}(\alpha) e^{j\omega\alpha} d\alpha. \quad (4)$$

Нульовий кореляційний компонент, як видно, визначається автокореляційними функціями модулюючих процесів $x_k(t)$, а кореляційні компоненти $B_k(\alpha)$ взаємокореляційними функціями процесів, номери яких відрізняються на число k . Тобто, для випадку, коли стаціонарні компоненти є некорельованими, вібраційний процес є стаціонарним. Формули (2) – (4) є основою для інтерпретації експериментальних результатів обробки методами статистичного аналізу ПКВП реальних даних.

Для прикладу дослідимо вплив розміру тріщини тонкої деталі з тріщиною на імовірнісні характеристики стаціонарних компонент його вібраційного процесу. Нагадаємо, що коливання тонкої деталі з тріщиною описуються системою нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [1, с. 12; 2, с. 18]:

$$\begin{cases} m\ddot{X} + 2b_c\dot{X} + w_c^2X = f(t), X \leq 0, \\ m\ddot{X} + 2b_s\dot{X} + w_s^2X = f(t), X > 0, \end{cases} \quad (5)$$

де $b_c = k_c / 2m$, $b_s = k_s / 2m$, де k_c, k_s – жорсткості деталі, коли тріщина закрита та відкрита відповідно; w_c, w_s – власні частоти коливань деталі в моменти часу, коли тріщина закрита та відкрита відповідно; m – зведена маса деталі. В якості вимушуючої сили вибрано:

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{100}\right) + u(t),$$

де $u(t)$ – білий шум з дисперсією $D_u = 1$. Для моделювання вібраційних відгуків цієї системи (5) вибрано параметри: $k_c = 0.9$, $m = 10$, крок інтегрування рівнянь 0.5, кількість кроків інтегрування – 10^5 . Відносна довжина тріщини змінювалася в межах від 0.05 до 0.95 з кроком 0.05.

Насамперед розкладемо вібросигнал на стаціонарні компоненти. Цю процедуру проведемо з допомогою методу переносу частот і низькочастотної фільтрації [4, с. 20]. Далі, використовуючи методи теорії стаціонарних процесів оцінимо взаємокореляційні функції та спектральні густини потужності.

Метод переносу частот і низькочастотної фільтрації полягає в застосуванні перетворення:

$$h_k(t) = \int_{-T}^T h(t - \tau) x(\tau) e^{-jk\omega_0 t} d\tau,$$

де $h(t)$ – імпульсний відгук смугового фільтра, передавальна функція якого має вигляд:

$$H(\omega) = 1, \omega \in \left[\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2} + \frac{\Delta\omega}{2} \right], \omega \notin \left[\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2} + \frac{\Delta\omega}{2} \right]$$

Очевидно, що

$$h_k(t) = \frac{1}{2p} \int_{-T}^T H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \frac{\omega t}{2}}{pt}$$

Спектральні густини $f_{kl}^{(h)}(\omega)$ процесів $h(t)$ і спектральні густини $f_{kl}^{(x)}(\omega)$ $x(t)$ пов'язані формулою [5, с. 344]:

$$f_{kl}^{(h)}(\omega) = \begin{cases} \int_{qOy}^M e^{j(k-l-q)\omega_0} f_{kl}^{(x)}(\omega + (l-q)\omega_0) d\omega, & \omega \in \left[\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2} + \frac{\Delta\omega}{2} \right] \\ 0, & \omega \notin \left[\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2} + \frac{\Delta\omega}{2} \right] \end{cases}$$

Звідси випливає, що у випадку, коли спектральні густини процесів $x_k(t)$ відрізняються від

нуля тільки в смузі $\omega \in \left[\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2} + \frac{\Delta\omega}{2} \right]$ то

$f_{kl}^{(h)}(\omega) = f_{kl}^{(x)}(\omega)$. Такі ПКВП називають вузькосмуговими. Для широкосмугових ПКВП спектральні густини $f_{kl}^{(h)}(\omega)$ визначатимуться сумою значень багатьох спектральних густин $f_{kl}^{(x)}(\omega)$, зсунутих за частотою на величини, що кратні основній частоті ω_0 . Однак подання

$$x(t) = \int_{kOy} e^{jk\omega_0 t} h_k(t) dt \quad (6)$$

і (1) є еквівалентними в тому сенсі, що імовірнісні характеристики ПКВП (математичне сподівання, кореляційна функція, спектральна густина, коефіцієнти Фур'є цих величин) визначені як на основі процесів $h_k(t)$, так і процесів $x_k(t)$, є однаковими [5 с. 344]. Ця еквівалентність є підставою для проведення на основі вищеописаного методу статистичного аналізу реальних даних без попереднього дослідження їх спектральних властивостей.

Оцінка математичного сподівання процесів $h_k(t)$, які одночасно є коефіцієнтами Фур'є математичного сподівання ПКВП, мають вигляд:

$$m_k^u = \frac{1}{q} \int_0^q h_k(t) dt. \quad (7)$$

Оскільки $E m_k^u = m_k$, то ця оцінка є незміщеною, а її дисперсія має вигляд:

$$D[m_k] = E[m_k - m_k]^2 =$$

$$= \frac{1}{q} \int_0^q \frac{1}{\Gamma} \left[R_{kk}(u) + R_{kk}(u) \right] du. \quad (8)$$

де $R_{kk}(u) = E h_k^o(t) h_k^o(t+u)$, $h_k^o(t) = h_k(t) - m_k$
 Подамо виділені компоненти $h_k(t)$ у вигляді:

$$h_k(t) = \frac{1}{2} [h_k^c(t) - i h_k^s(t)], \quad (9)$$

$$R_{kl}(u) = E h_k^o(t) h_l^o(t+u) = \frac{1}{4} [R_{kl}^c(u) + R_{kl}^s(u) - i (R_{kl}^{cs}(u) - R_{kl}^{sc}(u))] \quad (10)$$

де $R_{kl}^c(u) = E h_k^c(t) h_l^c(t+u)$,

$$R_{kl}^s(u) = E h_k^s(t) h_l^s(t+u),$$

$R_{kl}^{cs}(u) = E h_k^c(t) h_l^s(t+u)$. Після підстановки виразу (10) до (8) отримуємо:

$$D_{kl} = \frac{1}{q} \int_0^q \frac{1}{\Gamma} \left[R_{kl}^c(u) + R_{kl}^s(u) \right] du.$$

Спектральні густини процесів $h_k^c(t)$ і $h_k^s(t)$ зосереджені в смузі $\frac{w_0}{2}, \frac{w_0}{2}$ тому кореляційні функції $R_{kk}^c(u)$ і $R_{kk}^s(u)$ зникають з ростом зсуву u . А це призводить до того що $D_{kl} \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \Gamma$. Отже, оцінка (7) є слушною.

Для оцінки авто- та взаємкореляційних функцій формуємо статистику

$$R_{kl}^o(u) = \frac{1}{q} \int_0^q \frac{1}{\Gamma} \left[h_k^o(t) h_l^o(t+u) \right] dt.$$

Її математичне сподівання

$$E R_{kl}^o(u) = R_{kl}(u) - \frac{1}{q} \int_0^q (1 - |u_1|/q) R_{kl}(u_1 + u) du_1$$

При $q \rightarrow \Gamma$ збігається до $R_{kl}(u)$. Отже, оцінка є асимптотично незміщеною. Вона також є слушною, оскільки її дисперсія, яка в першому наближенні визначається формулою

$$D_{kl} = \frac{1}{q} \int_0^q \int_0^q E h_k^o(t) h_l^o(t+u) h_k^o(s) h_l^o(s+u) dt ds \quad (11)$$

при обмеженому четвертому моменті прямує до нуля при $q \rightarrow \Gamma$. Для гаусових випадкових процесів величина (11) може бути виражена через кореляційні функції процесів $h_k(t)$ і $h_l(t)$. Статистики (7) і (11) були використані для статистичної обробки даних комп'ютерної симуляції.

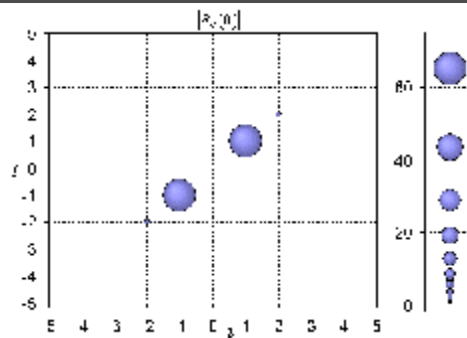


Рис.1. Оцінка взаємкореляційних функцій стаціонарних компонент випадкової складової вібраційного сигналу при зсуві $u = 0$ для відносної довжині тріщини $Dl/l = 0.1$

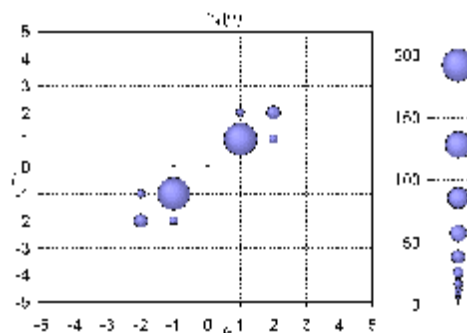


Рис.2. Взаємкореляційні функції стаціонарних компонент випадкової складової вібраційного сигналу при зсуві $u = 0$ для відносної довжині тріщини $Dl/l = 0.7$

Проаналізуємо коротко результати цього експерименту. У випадку, коли відносна довжина тріщини деталі рівна $Dl/l = 0.1$ взаємкореляційні функції стаціонарних компонент для $u = 0$ показано на рис.1. При такому розмірі тріщини переважаючими є автокореляційні зв'язки, тобто, можна стверджувати, що сигнал є стаціонарним. При чому автокореляційні зв'язки перших компонентів є значно сильнішими за автокореляційні зв'язки других.

У випадку, коли довжина тріщини $Dl/l = 0.7$, маємо абсолютно іншу картину взаємкореляційних зв'язків (рис.2). Як видно з цього рисунку при великих відносних довжинах тріщини, крім потужних автокореляційних зв'язків першого та другого стаціонарних компонентів, значущими є також взаємні кореляції між ними.

Отже, з ростом тріщини зростає міра не-стаціонарності вібраційного сигналу, яка пов'язана з виникненням взаємкореляційних зв'язків між стаціонарними компонентами вібраційного процесу. Кількість виявлених стаціонарних компонент дорівнює трьом. Таким чином ми отримали підтвердження того, що такий вібраційний процес можна описати моделлю у вигляді гармонічного представлення

ня з трьома стаціонарними компонентами, як і було припущено в [2 с. 18], а саме,

$$x(t) = \sum_{k=-2}^2 h_k(t) e^{-ikw_0 t}, \quad (12)$$

Враховавши (9), приходимо до тригонометричної форми подання (б):

$$\begin{aligned} B_0(u) &= R_{0,0}(u) + 2 \{R_1^c(u) + R_1^s(u)\} \cos w_0 u + 2 \{R_1^{sc}(u) - R_1^{cs}(u)\} \sin w_0 u + \\ &+ 2 \{R_2^c(u) + R_2^s(u)\} \cos 2w_0 u + 2 \{R_2^{sc}(u) - R_2^{cs}(u)\} \sin 2w_0 u, \\ B_1^c(u) &= R_{1,0}^c(u) + R_{0,1}^c(u) \cos w_0 u - \frac{1}{2} \{R_{2,1}^{cs}(u) - R_{2,1}^{sc}(u)\} \sin w_0 u - \frac{1}{2} \{R_{1,2}^{cs}(u) - R_{1,2}^{sc}(u)\} \sin 2w_0 u, \\ B_1^s(u) &= -\frac{1}{2} \{R_{2,1}^{cs}(u) - R_{2,1}^{sc}(u)\} \cos w_0 u - R_{0,1}^c(u) \sin w_0 u - \frac{1}{2} \{R_{1,2}^{cs}(u) - R_{1,2}^{sc}(u)\} \cos 2w_0 u. \end{aligned}$$

Вібраційний відгук від дефектної деталі, на яку діє змінна сила, можна описати моделлю у вигляді періодично корельованого випадкового процесу. Як впливає з проведеного аналізу, тріщина призводить до нелінійності в системі, яка збільшується з її ростом. В результаті цього виникають взаємкореляційні зв'язки між стаціонарними компонентами вібраційного сигналу. Зі збільшенням відносної довжини тріщини амплітуда зв'язків зростає. Це може бути використано в якості критерію дефектності елементів механічного вузла.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мацько І.Й., Кравець І.Б., Яворський І.М., Заяць В.М. Модель вібраційного відгуку від тіла з тріщиною // Відбір і обробка сигналів – Львів. – 2009. – № 30 (106), С. 12 – 22.
2. Мацько І.Й., Кравець І.Б., Юзефович Р.М., Яворський І.М. Вплив розміру тріщини на кореляційну структуру вібраційного сигналу // Відбір і обробка сигналів. – Львів. – 2009. – № 31 (107), С. 18 – 25.
3. Яворський І.Н., Кравець І.Б., Исаев И.Ю. Параметрическое моделирование периодически коррелированных случайных процессов на основе их представления через стационар-

$x(t) = h_0(t) + h_1^c(t) \cos w_0 t + h_1^s \sin w_0 t + h_2^c(t) \cos 2w_0 t + h_2^s \sin 2w_0 t$,
 при цьому $h_0(t), h_k^c(t), h_k^s(t)$ є дійсними процесами, а також $h_k^c(t) = h_k(t) + h_k^*(t), h_k^s(t) = i \frac{h_k(t) - h_k^*(t)}{2}$. На основі (3) знаходимо:

ные случайные процессы // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2006. – Т. 49, №11. – С. 33 – 42.

4. Яворський І.М., Исаев И.Ю., Кравець І.Б. Лінійна смугова фільтрація при дослідженні структури періодично нестаціонарних випадкових сигналів // Відбір і обробка інформації, 2006, № 26 (101), С. 19 – 25.
5. L. Gelman, S. Gorpnich Non-linear Vibroacoustical Free Oscillation Method For Crack Detection And Evaluation. // Mechanical Systems and Signal Processing. – 14(3) – 2000 – P. 343-351.

Яворський І.М., д.ф.-м.н., професор, Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів, Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща.

Кравець І.Б., к.т.н., Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів.

Юзефович Р.М., к.т.н, Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів.

Мацько І.Й., Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів.