УДК 681.3.057:518.12

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Костьян Н.Л., *старший преподаватель*
Киевский национальный университет технологий и дизайна,
01011, г. Киев, ул. Немировича-Данченко, 2
friit_ikt@ukr.net

Аннотация. *В работе исследуется алгоритм параметрической идентификации интегральных динамических моделей, основанный на использовании квадратурных формул. В рамках данной задачи рассматриваются модели с параметрами полиномиального вида и частный случай стационарного объекта. Приводятся результаты апробации алгоритма в процессе решения тестовых задач.*

Ключевые слова: *интегральная динамическая модель, уравнения Вольтерра, квадратурный алгоритм, интегральный метод идентификации, система линейных алгебраических уравнений.*

THE METHOD FOR IDENTIFICATION OF INTEGRAL MODELS OF LINEAR DYNAMICAL OBJECTS

Kostian N.L., *senior lecturer*
Kyiv National University of Technologies and Design,
2 Nemirovich-Danchenko str., Kyiv, 01011
friit_ikt@ukr.net

Abstract. *The article analyzes the algorithm of the parameter identification of the integral dynamical models based on the application of quadratures. Within this task the models with the parameters of polynomial form and a special case of a stationary object are studied. The results of testing of the algorithm in the solution of test problems are given.*

Keywords*: integral dynamical model, Volterra equations, quadrature algorithm, integral method of identification, system of linear algebraic equations.*

Введение. Интегральные операторы и уравнения типа Вольтерра (интегральные динамические модели) представляют собой эффективный математический инструмент для исследования широкого класса динамических объектов различной природы [1–3]. Методы численной реализации данного вида моделей имеют в общем случае существенные отличия от широко распространенных методов реализации динамических моделей, представленных дифференциальными уравнениям. При этом задачи идентификации дифференциальных динамических моделей достаточно полно исследованы [4], в отличие от соответствующих методов для интегральных моделей.

Постановка проблемы. Интегральные динамические модели, описывающие нестационарные динамические объекты с сосредоточенными параметрами, имеют вид [3, 5]

$$a_i(t)y(t)+\int\limits_{G_1(t)}K_1(t,\tau)y(\tau)d\tau+L_1(t)=a_2(t)f(t)+\int\limits_{G_2(t)}K_2(t,\tau)f(\tau)d\tau+L_2(t), \tag{1}$$

где в случае решения задачи идентификации a_i, K_i, L_i $(i=1,2)$ подлежащие определению параметры, y и f – заданные соответственно выходной и входной сигналы, $G_i(t)$ переменные области интегрирования, причем, обычно

$$G_1(t)=G_2(t)=[0,t], t\in[0,T].$$

Эффективный алгоритм для вычисления неизвестных параметров в (1) можно получить, применяя для вычисления интегралов квадратурные формулы вида [5, 6]

$$\int_0^{t_i} x(s)ds = \sum_{j=0}^{N_i} W_{ij} x(t_j) + r_i[x],\ N_i = \overline{1,N}, \tag{2}$$

где W_{ij} – веса, t_j – фиксированные узлы, $r_i[x]$ – остаточный член квадратурной формулы.

Суть квадратурного алгоритма расчета параметров модели (1) состоит в том, что расчетные выражения в нем формируются на основе дискретизации интегралов при помощи квадратурных формул вида (2) с отбрасыванием соответствующих остаточных членов. Дискретизируя таким образом модель (1) в точках t_i, $i = \overline{0,N}$, получаем следующую систему из $N+1$-го линейного алгебраического уравнения относительно неизвестных параметров:

$$a_1(0)y(0) + L_1(0) = a_2(0)f(0) + L_2(0),$$

$$a_1(t_i)y(t_i) + \sum_{j=0}^{N_i} W_{ij} K_1(t_i,t_j)y(t_j) + L_1(t_i) = a_2(t_i)y(t_i) + \sum_{j=0}^{M_i} W_{ij} K_2(t_i,t_j)f(t_j) + L_2(t_i), \tag{3}$$

$$M_i N_i = \overline{1,N}, i = \overline{1,N}.$$

При отсутствии какой-нибудь дополнительной информации о неизвестных параметрах $a_\nu(t_i)$, $K_\nu(t_i,t_j)$, $L_\nu(t_i)$, $\nu = 1{,}2$ в системе (3) будет $2(N+1)(N+3)$ переменных, т.е. в этом случае возникают трудности решения недоопределенной СЛАУ [7].

Целью работы является разработка метода, определяющего линейный динамический объект таким образом, чтобы с учетом погрешности свести его интегральную модель к системе с одним вектором неизвестных.

Анализ последних исследований и публикаций. Несмотря на практическую значимость задачи идентификации динамических объектов, многие научные работы посвящены идентификации дифференциальных моделей [4]. Алгоритмы, рассмотренные в [3,5,6], не адаптированы к общему случаю интегральной идентификации и позволяют решать данную задачу только для отдельных видов моделей.

Модель с параметрами полиномиального вида. Чтобы избежать получения неопределенной СЛАУ, зададим неизвестные параметры (1) в полиномиальном виде, т.е.

$$a_\nu(t) = \sum_{k=1}^{m_\nu} \alpha_{\nu k} \beta_k^\nu(t), \tag{4}$$

$$L_\nu(t) = \sum_{k=1}^{l_\nu} \lambda_{\nu k} \gamma_k^\nu(t), \tag{5}$$

$$K_\nu(t,\tau) = \sum_{r=1}^{P_\nu} \sum_{s=1}^{Q_\nu} C_{\nu rs} \varphi_r^\nu(t) \psi_s^\nu(\tau), \tag{6}$$

где $a_{\nu k}, \lambda_{\nu k}, c_{\nu rs}$ – неизвестные постоянные коэффициенты, а $\{\beta_k^\nu\}_{k=1}^{m_\nu}$, $\{\gamma_k^\nu\}_{k=1}^{l_\nu}$, $\{\varphi_r^\nu\}_{r=1}^{P_\nu}$, $\{\psi_s^\nu\}_{s=1}^{Q_\nu}$ – некоторые системы линейно независимых функций, $\nu = 1{,}2$.

Очевидно, что, если

$$N = m_1 + m_2 + l_1 + l_2 + p_1 Q_1 + p_2 Q_2 - 1, \tag{7}$$

то число уравнений в (3) будет равно числу неизвестных. При этом остаются не решенными следующие задачи: выбора функций β_k^ν, $\gamma_k^\nu, \varphi_r^\nu$, ψ_s^ν; доказательства существования и единственности решения СЛАУ (3); влияния погрешностей на точность расчета неизвестных параметров.

Стационарный объект. Трудности, возникающие при рассмотрении предыдущей модели, могут быть решены в частном, но важном случае стационарного объекта, когда искомые параметры $a_\nu(t), L_\nu(t)$ и $K_\nu(t,s)$ определяются следующими соотношениями:

$$a_1(t) \equiv 1, a_2(t) \equiv 0, L_1(t) \equiv 0, \tag{8}$$

$$K_1(t,s)=K(t-s)=\sum_{j=1}^{m} q_j \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!}, m\in N, \tag{9}$$

$$K_2(t,s)=\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}, \tag{10}$$

$$L_2(t)=\sum_{j=1}^{m-1}\left(c_j\frac{t_j}{j!}+q_j\sum_{k=0}^{m-j-1} c_k\frac{t^{k+j}}{(k+j)!}\right), \tag{11}$$

где q_j – неизвестные, а c_j – известные постоянные величины.

Заметим, что уравнение (1) при выбранных значениях параметров $a_\nu(t), L_\nu(t), K_\nu(t,s)$ будет эквивалентно [1] дифференциальному уравнению вида

$$y^{(m)}(t)+\sum_{j=1}^{m} q_j y^{(m-j)}(t)=f(t),$$

$$y^{(k)}(0)=c_k,\ k=\overline{0,m-1}.$$

Для формирования системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $q_j, j=\overline{1,m}$ преобразуем уравнение (1) с учетом (4)-(11) к виду

$$\sum_{j=1}^{m} q_j\left[\int_0^t \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!}y(s)ds-\sum_{k=0}^{m-j-1} c_k\frac{t^{k+j}}{(k+j)!}\right]=\int_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}f(s)ds+\sum_{j=0}^{m-1} c_j\frac{t_j}{j!}-y(t). \tag{12}$$

Отсюда для точек фиксации (измерения) t_i $(i=\overline{0,N})$, полагая, что $m=n$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $q_j, j=1,m$:

$$A\cdot q=b, \tag{13}$$

где $q=(q_1,...,q_m)^T$, $b=(b_1,...,b_m)^T$, $A=[A_{ij}]_{i,j=1}^{m}$,

$$A_{ij}=\int_0^{t_i}\frac{(t_i-s)^{j-1}}{(j-1)!}y(s)ds-\sum_{k=0}^{m-j-1} c_k\frac{t_i^{k+j}}{(k+j)!}, \tag{14}$$

$$b_j=\int_0^{t_i}\frac{(t_i-s)^{m-1}}{(m-1)!}f(s)ds-y(t_i)+\sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu\frac{t_i^\nu}{\nu!}. \tag{15}$$

Применим теперь для вычисления интегралов в (14) и (15) квадратурные формулы вида (2), которые для произвольной интегрируемой по Риману функции $u(t)$, примут вид:

$$\int_0^{t_i}(t_i-s)^\nu y(s)ds=\sum_{j=0}^{L_i} W_{ij}(t_i-t_j)^\nu y(t_j)+r_{i\nu}[n], \tag{16}$$

где $1\le L_i\le N$, $r_{i\nu}$ – остаточные члены этой формулы, а другие величины определены в (2).

Отбрасывая остаточные члены квадратурных формул, соответственно $r_{ij}[y]$ и $r_{im}[f]$ и, учитывая тот факт, что согласно (5) и (6) значения входного и выходного сигналов заданы экспериментально с некоторыми погрешностями, от системы уравнения (13) приходим к следующей системе уравнений относительно приближенных значений компонент вектора $\tilde{q}=(\tilde{q}_1,...,\tilde{q}_m)^T$:

$$\tilde{A}\cdot\tilde{q}=\tilde{b}, \tag{17}$$

где

$$\tilde{A} = \left[A_{ij}\right]_{i,j=0}^{m}, \tilde{b} = \left[\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m\right]^T, \tag{18}$$

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \sum_{k=0}^{N_i} W_{ik} (t_i - t_k)^{j-1} \tilde{y}(t_k) - \sum_{l=0}^{m-j-1} c_l \frac{t_i^{l+j}}{(l+j)!}, 1 \le N_i \le N, \tag{19}$$

$$\tilde{b}_i = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{M_i} W_{ik} (t_i - t_k)^{m-1} \tilde{f}(t_k) + \sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu \frac{t_i^\nu}{\nu!} - \tilde{y}(t_i), 1 \le M_i \le N. \tag{20}$$

Таким образом, мы получили окончательную систему для расчета параметров $q_i \, (i = \overline{1,n})$.

Результаты. Анализ операций, входящих в алгоритм, реализующий предложенный метод, позволяет предположить, что при расчете параметров динамических моделей вида (1) он обладает высоким быстродействием и устойчивостью. Чтобы убедиться в эффективности метода, рассмотрим примеры решения тестовых задач (исходные данные тестовых задач обеспечивают возможность получения точного решения и проверки точности применяемых численных алгоритмов, а также обладают возможностью воспроизводимости результатов вычислительных экспериментов).

Задача 1: входной сигнал: $u(t) = 1 - e^{-2t}$, $t \in [0;2]$, $h = 0.01$; выходной сигнал: $f(t) = -14e^{-2t} - 0.2$; $C_1 = 0$, $C_2 = 2$, $C_3 = -4$, $C_4 = 8$, $C_5 = -16$ – начальные условия для эквивалентного дифференциального уравнения

$$u^{(5)}(t) + p_1 u^{(4)}(t) + p_2 u^{(3)}(t) + p_3 u^{(2)}(t) + p_4 u^{(1)}(t) + p_5 u(t) = f(t), \tag{21}$$
$$u^{(i-1)}(0) = C_i, \; i = \overline{1,5}.$$

Необходимо определить коэффициенты p_i (точные значения: $p_1 = 1.2$, $p_2 = -2$, $p_3 = 3.1$, $p_4 = 0.7$, $p_5 = -0.2$).

Используя выражения (17)-(20) и квадратурную формулу трапеций для аппроксимации интегралов, входящих в выражения (14), (15), получаем СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов p_i, причем данная система является несовместной. Применяя для ее решения метод наименьших квадратов, получаем следующие значения искомых коэффициентов:

$$p_1 = 1.8930, p_2 = -1.8640, p_3 = 3.0249, p_4 = 5.5493, p_5 = -0.1997,$$

при этом среднеквадратичная ошибка $\Delta = 3.4 \times 10^{-6}$.

Добавим к выходному сигналу f случайную помеху, распределенную по нормальному закону. В табл. 1 представлены значения коэффициентов p_i, полученные при различных значениях помехи.

Таблица 1

Значения коэффициентов p_i, $i = \overline{1,5}$ при помехах выходного сигнала, описываемого экспоненциальным законом

Величина помехи в % от выходного сигнала	Среднеквадратичная ошибка	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	4.0×10^{-5}	2.01	-2.19	5.16	12.09	-0.20
5	8.8×10^{-4}	-4.77	4.04	8.09	-61.30	-0.21
10	3.1×10^{-3}	41.17	-36.85	-15.41	422.95	-0.25

Задача 2: входной сигнал: $u(t) = e^{1-t} + 1$; выходной сигнал: $f(t) = -0.5e^{1-t} - 1$; начальные условия: $C_1 = 3.7183$, $C_2 = -2.7183$, $C_3 = 2.7183$; эквивалентное дифференциальное уравнение

$$u'''(t) + p_1 u''(t) + p_2 u'(t) + p_3 u(t) = f(t), \; u^{(i-1)}(0) = C_i, \; i = \overline{1,3};$$

точное решение: $p_1 = 2,\ p_2 = 0.5,\ p_3 = -1.$ Нужно определить коэффициенты p_i. В табл. 2 представлены значения коэффициентов p_i, полученные при различных значениях помехи.

Таблица 2

Значения коэффициентов p_i, $i = \overline{1,3}$ при помехах выходного сигнала, описываемого экспоненциальным законом

Величина помехи в % от выходного сигнала	Среднеквадратичная ошибка	p_1	p_2	p_3
0	1.7×10^{-6}	1.25	-0.25	-1.00
1	1.2×10^{-5}	0.20	-1.30	-1.00
5	2.8×10^{-5}	6.94	5.45	-0.99
10	1.7×10^{-4}	4.28	2.79	-0.99

Задача 3: входной сигнал: $u(t) = t^3$; выходной сигнал: $f(t) = -t^3 + 1.5t^2 + 12t + 6$; начальные условия: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$. Нужно определить коэффициенты p_i; эквивалентное дифференциальное уравнение

$$u'''(t) + p_1 u''(t) + p_2 u'(t) + p_3 u(t) = f(t),\ u^{(i-1)}(0) = C_i,\ i = \overline{1,3}\,.$$

Точное решение: $p_1 = 2,\ p_2 = 0.5,\ p_3 = -1.$ В табл. 3 представлены значения коэффициентов p_i, полученные при различных значениях помехи.

Таблица 3

Значения коэффициентов p_i, $i = \overline{1,3}$ при помехах выходного сигнала, описываемого полиномом 3-ей степени

Величина помехи в % от выходного сигнала	Среднеквадратичная ошибка	p_1	p_2	p_3
0	5.9×10^{-6}	1.9996	0.5014	-1.0018
1	1.3×10^{-4}	1.9799	0.5880	-1.1251
5	1.0×10^{-3}	2.0496	0.3675	-0.8863
10	8.6×10^{-3}	1.8763	1.1025	-1.8252

Выводы. В работе изложен метод идентификации интегральных моделей линейных динамических объектов. В частности, данный метод идентифицирует стационарные объекты с учетом погрешности входных и выходных сигналов. Результаты решения задач 1–3 свидетельствуют о таких свойствах интегрального метода идентификации, как высокая устойчивость, эффективность по затратам машинного времени и объему вычислений, простота реализации. Таким образом, предлагаемый метод может быть эффективно использован при решении задач параметрической идентификации динамических объектов при наличии погрешностей в исходных данных.

Список литературы

1. Васильев, В. В. Моделирование динамических систем: Аспекты мониторинга и обработки сигналов / В. В. Васильев, Г. И. Грездов, Л. А. Симак и др. – К. : НАН Украины, 2002. – 344 с.
2. Васильєв, В. В. Аналіз та математичне моделювання динамічних систем на базі некласичних операційних числень / В. В. Васильєв, Л. О. Сімак, О. А. Зеленков та ін.; під ред. чл.-кор. НАН України В. В. Васильєва. – К. : НАН України, 2006. – 184 с.

3. Верлань, А. Ф. Методы математического и компьютерного моделирования измерительных преобразователей и систем на основе интегральных уравнений. : [монография] / Верлань А. Ф., Сагатов М. В., Сытник А. А. – Т. : Изд-во Фан, 2011. – 336 с.
4. Абдусатаров, Б. Б. Интегральные динамические модели непрерывных систем и их компьютерная реализация [Текст] : автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.13.16 / Б. Б. Абдусатаров ; [ИПМЭ им. Г. Е. Пухова НАН Украины] – Киев, 1991. – 44 с.
5. Верлань, А. Ф. Математическое моделирование непрерывных динамических систем / А. Ф. Верлань, С. С. Москалюк. – К. : Наукова думка, 1988. – 287 с.
6. Верлань, А. Ф. Квадратурные алгоритмы моделирования измерительных преобразователей с распределенными параметрами / Верлань А. Ф. Сагатов М. В., Сытник А. А. / зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. – 2000. – №6. – С. 131-136.
7. Верлань, А. Ф. Численные методы в моделировании : учеб. пособие / Верлань А. Ф., Лукьяненко С. А., Эшматов Х. – Т. : ИПТД «Узбекистан», 2010. – 280 с.

References

1. Vasiliev V.V., Grezdov G.I., Simak L.A., etc. (2002). Modeling of dynamic systems: Aspects of monitoring and signal processing. Kyiv, Ukraine: NAS Ukraine, 344 p.
2. Vasiliev V.V., Simak L.A., Zelenkov O.A., etc. (2006). Analysis and mathematical modeling of dynamical systems based on non-classical operational calculus. Kyiv, Ukraine: NAS Ukraine, 184 p.
3. Verlan A.F., Sagatov M.V., Sitnic A.A. (2011). Methods of mathematical and computer modeling of transducers and systems based on integral equations. Tashkent, Uzbekistan: Fan, 336 p.
4. Abdusatarov B.B. (1991). Integrated dynamical models of continuous systems and their computer implementation: Author. dis. dr. ... tehn. sciences: 05.13.16. Kyiv, Ukraine: PIMEE NAS Ukraine, 44 p.
5. Verlan A.F., Moskaluk S.S. (1988). Mathematical modeling of continuous dynamical systems. Kyiv, Ukraine: Naukova Dumka, 287 p.
6. Verlan A.F., Sagatov M.V., Sitnic A.A. (2000). Quadrature algorithms of modeling of transducers with distributed parameters. Kyiv, Ukraine: PIMEE NAS Ukraine, (6), pp. 131-136.
7. Verlan A.F., Lukyanenko S.A., Eshmatov H. (2010). Numerical analysis in modeling. Tashkent, Uzbekistan: Uzbekistan, 280 p.

Стаття надійшла до редакції 15.04.2013.

Відомості про авторів:

Костьян Н. Л., старший викладач кафедри інформаційно-комп'ютерних технологій та фундаментальних дисциплін, факультет ринкових, інформаційних та інноваційних технологій, Київський національний університет технологій та дизайну