УДК 621.3.011.7

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ НА ОСНОВІ НЕПАРАМЕТРИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

Ключка К. М., *к.т.н., доцент кафедри електротехнічних систем*
Черкаський державний технологічний університет
18006, м. Черкаси, бул. Шевченка, 460, ux0cx@ukr.net

Анотація. *В статті розглянуто питання застосування непараметричних інтегральних моделей при моделюванні динамічних процесів в електричних колах широкого класу.*

Ключові слова: *електричні кола, динамічні характеристики, непараметричні моделі, інтегральне рівняння Вольтерри.*

DYNAMIC SIMULATION OF ELECTRICAL CIRCUITS ON THE BASIS OF NON-PARAMETRIC INTEGRAL MODEL

Klyuchka K. M., *Ph.D. (Engineering), associate professor of the electrical systems department*
Cherkassy State Technological University
18006, Cherkassy city, Shevchenko Boul., 460, ux0cx@ukr.net

Abstract. *The article deals with the methods of mathematical modelling of electrical circuits based on efficiently using of non-parametric models and creating computer simulations of numerical algorithms*

Keywords: *electrical circuits, dynamic properties, non-parametric models, Volterra integral equation.*

Вступ. З розвитком електроніки і електроенергетики безперервно зростає складність задач аналізу і проектування електротехнічних пристроїв, що обумовлює необхідність вдосконалення відповідних методів математичного опису, чисельного і комп’ютерного розрахунку електричних кіл. При цьому задачі дослідження і розрахунку динаміки електричних кіл є найбільш трудомісткими.

Коло таких задач стає все ширшим, а їх складність постійно зростає. Характерним, розповсюдженим на практиці прикладом є складні електричні кола, які містять різнорідні елементи – як із зосередженими, так і з розподіленими параметрами, що стали невід’ємною частиною багатьох електротехнічних та електронних пристроїв. Ця обставина висуває особливі вимоги до їх моделей аж до необхідності застосування нетрадиційних моделей, структура яких повинна враховувати неоднорідність кіл, що розраховуються. Крім того, для розрахунку та проектування значної кількості електричних кіл вихідною інформацією є експериментально отримані дані у вигляді неперервних динамічних характеристик цих кіл (перехідних чи імпульсних перехідних функцій). В цьому випадку достатньо складно застосувати традиційні моделі у вигляді диференціальних рівнянь, які відносяться до класу параметричних моделей. Принципово найбільш ефективними при цьому повинні бути непараметричні моделі, які формуються безпосередньо на основі динамічних характеристик. Цією особливістю володіють моделі у вигляді інтегральних операторів чи рівнянь [1–3].

Постановка задачі. Відомі закономірності, що зв'язують фізичні величини основних елементів електричних ланцюгів, використовуються зазвичай для складання диференціальних рівнянь ланцюга в цілому, хоча можуть застосовуватися і для складання еквівалентних інтегральних рівнянь. Дійсно, для опису лінійних елементів C і L разом з відомими диференціальними співвідношеннями використовуються інтегральні:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(s)ds, \quad i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(s)ds, \qquad (1)$$

де i_C, i_L, u_C, u_L – відповідно струми і напруги конденсатора і котушки.

Аналогічні залежності справедливі для нелінійного C – елемента із заданою характеристикою $q = f(u)$ або $u = F(q)$ $(f^{-1} = F)$ і динамічною ємністю $C(u)$:

$$q(t) = \int_0^t i(s)ds, \; u(t) = F\left(\int_0^t i(s)ds\right), \tag{2}$$

а також для нелінійного L – елемента з характеристикою $y = f(i)$ або $i = F(y)$ і динамічною індуктивністю $L(i)$:

$$y(t) = \int_0^t u(s)ds, \; i(t) = F\left(\int_0^t u(s)ds\right). \tag{3}$$

Подібні залежності використовуються і за наявності взаємних індуктивностей.

Вказані залежності природньо доповнюються первинними непараметричними інтегральними моделями, що отримуються на основі використання поняття закону Ома-Дюамеля (Г.Є. Пухов) [4]:

$$\int_0^t i(s)ds = \int_0^t y(t-s)\left[u(s) - \bar{u}(s)\right]ds = \int_0^t y(s)\left[u(t-s) - \bar{u}(t-s)\right]ds,$$
$$\int_0^t u(s)ds = \int_0^t z(t-s)\left[i(s) - \bar{i}(s)\right]ds = \int_0^t z(s)\left[i(t-s) - \bar{i}(t-s)\right]ds, \tag{4}$$

де $y(t)$, $z(t)$ – перехідна провідність та перехідний опір відповідно по відношенню до одиничної напруги та одиничного струму; $\bar{u}(t)$, $\bar{i}(t)$ – напруга холостого ходу та струм короткого замикання двополюсника; s – змінна інтегрування.

В загальному випадку, довільне електричне коло описується системою інтегральних рівнянь Вольтерри – Уринсона [1]

$$y_i(t) + \sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t} H_{if}\left[t, s, y_j(s)\right]ds = \sum_{q=1}^{m}\int_{t_0}^{t} G_{iq}\left[t, s, f_q(s)\right]ds, \tag{5}$$

де $y_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ – невідомі величини (струми, напруги чи потоки); $f_q(t)$ $(q = \overline{1,m})$ – функції, залежні від зовнішніх джерел і початкових умов; H_{ij} і G_{iq} – перетворюючі характеристики елементів. У разі лінійного ланцюга замість (5) використовується система лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри

$$y_i(t) + \sum_{f=1}^{n}\int_{t_0}^{t} H_{ij}(t,s)y_j(s)ds = \sum_{q=1}^{m}\int_{t_0}^{t} G_{iq}(t,s)f_q(s)ds, \tag{6}$$

де, в такому випадку, ядра $H_{ij}(t,s)$ і $G_{iq}(t,s)$ мають смисл вагових функцій.

Відповідно до такого підходу будь-який пасивний ланцюг, що містить як елементи із зосередженими параметрами так і з розподіленими, розглядається як багатополюсник, що характеризується власною та взаємною перехідною провідністю і може бути описаним єдиним видом інтегральної динамічної моделі.

Таким чином, непараметричні моделі динаміки різнорідних електричних кіл формуються у вигляді лінійних або нелінійних інтегральних рівнянь, а також їх систем. Властивості отримуваних рівнянь повністю визначаються ядрами цих рівнянь, які і є заданими динамічними характеристиками електричних кіл. Ядра мають вигляд функцій двох змінних, різницевих – у разі стаціонарних об'єктів або довільних – у разі нестаціонарних об'єктів. Динамічні характеристики можуть бути отримані як розрахунковим шляхом так і експериментально.

Отримання непараметричних моделей електричних кіл. Розглянемо розрахунок перехідного процесу в ланцюзі з одним нелінійним або змінним параметром. В цьому випадку ланцюг завжди можна представити у вигляді двополюсника 1, що має постійні параметри, і двополюсника 2, що є змінною або нелінійною провідністю, індуктивністю, ємністю (рис. 1).

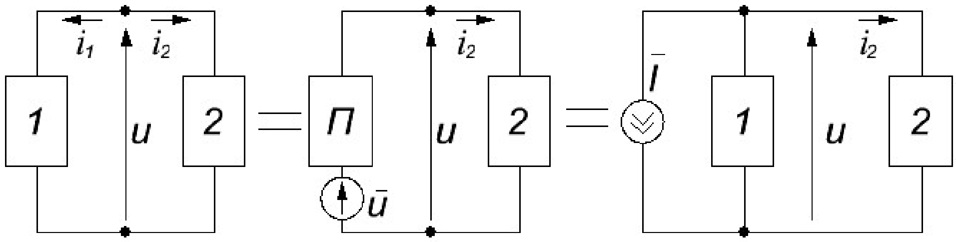

Рис. 1. Отримання еквівалентного двополюсника

Нехай двополюсник 2 є змінною резистивною провідністю $g = g(t)$. Тоді можна записати рівняння:

$$\int_0^t i_1(s)ds = \int_0^t y(t-s)[u(s) - \bar{u}(s)]ds, \tag{7}$$

$$i_1(t) + i_2(t) = 0, \; i_2(t) = g(t)u(t).$$

Виключаючи звідси струми i_1 і i_2, отримуємо інтегральне рівняння

$$\int_0^t [y(t-s) + g(s)]u(s)ds = \int_0^t y(t-s)\bar{u}(s)]ds, \tag{8}$$

розв’язання якого дає напругу $u = u(t)$ на змінній провідності $g = g(t)$.

Розглянемо випадок коли двополюсник 2 є нелінійною резистивною провідністю. В цьому випадку для ланцюга рис. 1 можна скласти рівняння

$$\int_0^t i_1(s)ds = \int_0^t y(t-s)[u(s) - \bar{u}(s)]ds, \tag{9}$$

$$i_1(t) + i_2(t) = 0, \; i_2(t) = i(u),$$

де $i(u)$ – відома функція напруги u.

Виключаючи з цих рівнянь струми, отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^t \{y(t-s)u(s) + i[u(s)]\}ds = \int_0^t y(t-s)\bar{u}(s)]ds, \tag{10}$$

яке дозволяє визначати напругу на нелінійній провідності.

Особливості чисельної реалізації непараметричних інтегральних моделей електричних кіл. При чисельному розв'язанні інтегральних рівнянь електричних кіл неминуче доводиться замінювати інтеграли, що входять в них скінченними сумами. При цьому отримані скінченні співвідношення можуть бути допоміжними або носять самостійний характер як остаточні розрахункові вирази [5]. Достатньо ефективними при розв’язуванні задач з “інженерною” точністю виявляються алгоритми на основі формул прямокутників і трапецій. При розв’язанні рівнянь Вольтерри потрібно також враховувати можливість обчислень з великим числом кроків. Така ситуація має місце при моделюванні динамічних об'єктів в природному часі, коли проміжок інтегрування може бути дуже великим або навіть наперед невідомим. Важливою особливістю обчислень при цьому є накопичення похибок із зростанням числа кроків, яке визначається не стільки величиною кроку і точністю обчислень на ньому, скільки вдалим або невдалим вибором способу заміни інтеграла кінцевою сумою.

Для забезпечення високої швидкості обчислень достатньо ефективним є використання властивості роздільності ядер [5]

$$\int_a^t K(t,s)y(s)ds = \int_a^x \sum_{i=1}^m a_i(t)b_i(s)y(s)ds = \sum_{i=1}^m a_i(t)\int_a^x b_i(s)y(s)ds\,. \qquad (11)$$

При цьому, на відміну від традиційного квадратурного алгоритму, забезпечується незмінна кількість обчислень на кроці, тобто отримано швидкодіючий алгоритм, який може бути основою побудови швидкодіючих програмних засобів та спеціалізованих обчислювачів при розв'язанні задач аналізу динаміки електричних кіл у реальному часі.

При розв'язанні систем інтегральних рівнянь Вольтерри, що описують складні електричні кола, добре зарекомендував себе метод коллокацій [1], заснований на заміні функцій кусково-гладкими поліномами. Значною перевагою алгоритмів на основі методу коллокацій є велика гнучкість при виборі параметрів заміни функцій кусково-гладкими поліномами.

При моделюванні сучасних складних електротехнічних систем часто виникає необхідність у відтворенні властивостей окремих елементів схеми з високим степенем адекватності. Оскільки електротехнічні системи в багатьох випадках є нелінійними об'єктами, доводиться мати справу із нелінійними моделями, в тому числі у вигляді нелінійних інтегральних рівнянь та їх систем. Для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри можуть бути використані високоточні алгоритми [5]. Алгоритми базуються на застосуванні до інтегрального члена рівняння п'яти- і семиточкових квадратурних формул Ньютона-Котеса замкнутого типу.

Висновок. Непараметричні інтегральні моделі є самостійним та своєрідним видом математичного опису задач динаміки електричних кіл. На відміну від параметричних моделей, при отриманні яких в якості вихідних даних використовуються задані параметри електричного кола (постійні чи змінні), непараметричні динамічні моделі формуються на основі заданих динамічних характеристик електричного кола, його частин або окремих елементів, які можуть бути одержані у вигляді експериментальних даних або в аналітичному вигляді. Отримані на основі динамічних характеристик інтегральні оператори є найбільш простими і разом з тим універсальними динамічними моделями електричного кола, оскільки забезпечують адекватність відтворення властивостей електричного кола в межах точності апріорно заданих динамічних характеристик і не вимагають при своєму формуванні яких-небудь методів апроксимації.

Список літератури

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения : методы, алгоритмы, программы : Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К.: Наукова думка, 1986. – 543 с.
2. Верлань А. Ф. Метод интегральных уравнений в задаче идентификации параметров электрических цепей / Верлань А. Ф., Ключка К. Н. // Вісник Черкаського державного технологічного університету, 2011. − №1. − С. 55–58.
3. Ключка К. М. Методи отримання інтегральних динамічних моделей електричних кіл / К. М. Ключка // Вісник Черкаського державного технологічного університету, 2009. – №1. – С. 28–30.
4. Пухов Г. Е. Интегральные методы расчета электрических цепей / Г. Е. Пухов // Теоретическая электротехника, 1966. – Вып. 2. – С. 5–14.
5. Ключка К. М. Методи та алгоритми розрахунку перехідних процесів в електричних колах на основі інтегральних динамічних моделей : автореф. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.09.05 "Теоретична електротехніка" / К. М. Ключка – Київ, 2012. – 20 с.

References

1. Verlan' A. F. Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy : Spravochnoe posobie / A. F. Verlan', V. S. Sizikov. – K. : Naukova dumka, 1986. – 543 s.
2. Verlan' A. F. Metod integral'nykh uravneniy v zadache identifikatsii parametrov elektricheskikh tsepey / Verlan' A. F., Klyuchka K. N. // Visnik Cherkas'kogo derzhavnogo tekhnologichnogo universitetu, 2011. − №1. − S. 55–58.
3. Klyuchka K. M. Metodi otrimannya integral'nikh dinamichnikh modeley elektrichnikh kil / K. M. Klyuchka // Visnik Cherkas'kogo derzhavnogo tekhnologichnogo universitetu, 2009. – №1. – S. 28–30.
4. Pukhov G. E. Integral'nye metody rascheta elektricheskikh tsepey / G. E. Pukhov // Teoreticheskaya elektrotekhnika, 1966. – vyp. 2. – S. 5–14.
5. Klyuchka K.M. Metodi ta algoritmi rozrakhunku perekhidnikh protsesiv v elektrichnikh kolakh na osnovi integral'nikh dinamichnikh modeley : avtoref. na zdobuttya nauk. stupenya kand. tekhn. nauk : spets. 05.09.05 “Teoretichna elektrotekhnika” / K. M. Klyuchka – Kiïv, 2012. – 20 s.

Стаття надійшла до редакції 11.04.2013.

Відомості про авторів:

Ключка К. М., кандидат технічних наук, доцент кафедри електротехнічних систем, Черкаський державний технологічний університет.