УДК 681.5.004.3

МЕТОД РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОДИНТЕРВАЛОВ

Кочкарев Ю.А., *д.т.н., профессор,*
Бурмистров С. В., *аспирант кафедры информатики и информационной безопасности,*
Панаско Е. Н., *к.т.н., преподаватель кафедры информатики и информационной безопасности*
Черкасский государственный технологический университет

Аннотация. *В данной статье разработан новый метод реализации булевых функций с помощью ортогональных подинтервалов (q-функций). В его основе лежит замена в классическом Ф-преобразовании универсального базиса, с помощью которого выражают булеву функцию в виде обычного числового ряда, расширенным базисом для представления функции в виде знакопеременного ряда. Применение данного метода позволяет уменьшить показатели сложности реализации булевой функции, что подтверждает эффективность предложенного метода. Использование метода целесообразно на этапе логического проектирования булевых функций.*

Ключевые слова: *булевы функции, метод ортогональных подинтервалов, расширенная система q-функций, показатели сложности реализации булевых функций.*

METHOD OF BOOLE FUNCTIONS REALIZATION ON ORTOGONAL SUBINTERVALS APPLICATION

Kochkarev Y.A., *D.Sc.(Engineering), professor,*
Burmistrov S.V., post-*graduate student of computer science and information security department,*
Panasko E.N., *Ph.D. (Engineering), associate professor of computer science and information security department*
Cherkassy State Technological University

Abstract. *The method of boole functions realization has been offered in the article. A method is based on application of ortogonal subintervals. A method is expedient on the stage of the logical planning of boole functions. A method is based on introduction of the extended system of the so-called q-functions. Research results demonstrate the substantial economy of the most meaningful parameters of structural boole functions complication for integral microcircuits developers.*

Keywords: *boole functions, method of ortogonal subintervals, extended system of q-functions, realization indexes of boole functions complication.*

Введение. Возможность характеризовать булевы функции (БФ) с помощью некоторого набора вещественных чисел впервые была отмечена в работе [3]. Впоследствии в [4] булевы функции представлялись в виде конечных сумм функций Уолша в задачах синтеза логических сетей на пороговых элементах, в [5] – системы функций логики произвольной значности выражались с помощью функций Виленкина-Крестенсона.

В [6] был рассмотрен изоморфизм между логическими функциями и кусочно-постоянными функциями (КПФ), на основе которого введена таблица соответствия логических и алгебраических операций. В указанной работе рассмотрен класс ортофункциональных преобразований БФ, а также их частный случай, так называемое Ф-преобразование. В результате Ф-преобразования каждой булевой функции ставится в соответствие некоторая кусочно-постоянная функция (КПБФ), которая определена на 2^n единичных подинтервалах, принимает значения 0 или 1 на каждом указанном подинтервале [1] и имеет вид (1)

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)\sim\sum_{i=0}^{2^n-1} c_i q_{in} \tag{1}$$

где $f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ – заданная БФ, подлежащая реализации (оригинал);

q_{in} – базисные q-функции [1], принадлежащие ортогональному Ф-базису;

c_i – весовые коэффициенты q-ряда, принимающие значения единицы на всех единичных подинтервалах, где оригинал – БФ принимает единичное значение, и нуль – на всех остальных подинтервалах.

На рис. 1 представлена базисная система $\{q(i,n)\}$ в общем виде для БФ от 3 аргументов (n=3).

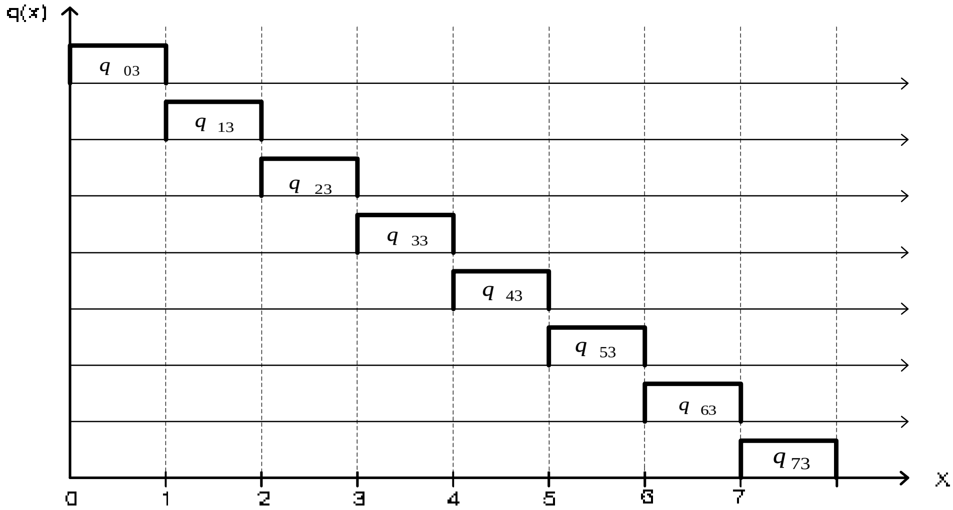

Рис. 1. Система базисных q-функций для *n*=3

Пусть, для примера, задана БФ (оригинал) от 3-х аргументов в виде таблицы истинности (ТИ) (табл. 1):

Таблица 1

Таблица истинности БФ-оригинала

№ строки	Аргумент			Функция
	x_3	x_2	x_1	y
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Для выбранного примера заданная БФ преобразуется в КПБФ в ряд вида:

$$f(x_1,x_2,x_3) \sim \sum_{i=0}^{7} c_i q_{i3} \qquad (2)$$

В результате *Ф*-преобразования график КПБФ (q-ряда) Ф(Х) имеет вид, представленный на рис. 2, а указанная БФ (3):

$$f(x1,x2,x3) \sim \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 + x_3 \bar{x}_2 x_1 + x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \qquad (3)$$

имеет показатели сложности реализации БФ S_L=12, S_{AD}=4.

В [1] показано, что приведенный выше в качестве примера *Q*-базис является полным, т.е. любая БФ от *n* аргументов может быть представлена в виде *q*-ряда (1), имеющего не более 2^n слагаемых, и в этом отношении *Q*-базис имеет определенные преимущества перед другими известными базисными системами, например, системой Уолша или Хаара.

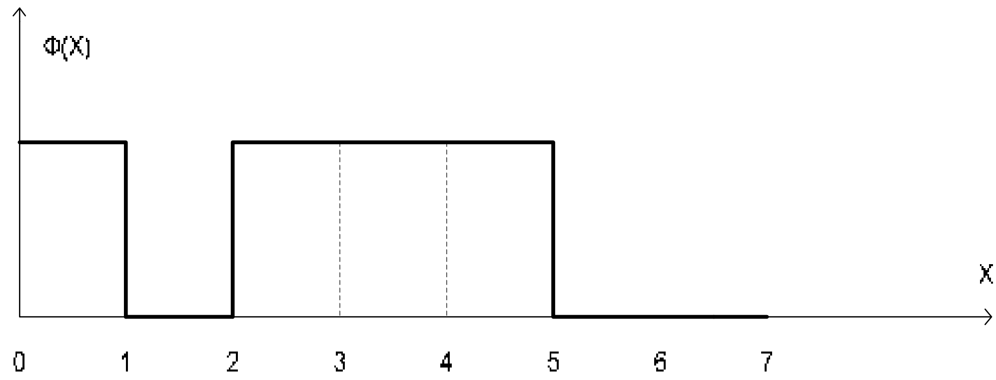

Рис. 2. Результат Ф-преобразования БФ-оригинала

Целью данной работы является разработка метода реализации булевых функций путем определения оптимального размера подинтервалов КПБФ, что позволит уменьшить величины показателей структурной сложности реализации БФ.

Постановка проблемы исследования. В общем случае система q-функций n-ого порядка $\{q(i,n)\}$ дает возможность выразить любую БФ от n аргументов. При этом следует отметить, что имеют место варианты БФ, когда на определенных последовательно идущих подинтервалах БФ сохраняет свое значение. В таких случаях целесообразно объединение нескольких последовательных подинтервалов на множестве q-функций n-ого порядка $\{q(i,n)\}$ в один с меньшим порядком.

Этот факт обуславливает необходимость введения расширенного базиса q-функций, в которой отражается идея укрупнения подинтервалов. В общем виде множество q-функций произвольного $(n-i)$-ого порядка состоит из 2^{n-i} КПБФ, заданных на подинтервалах длиной i+1 каждый.

На рис. 3 представлена введенная расширенная система q-функций для БФ, которые имеют 3 аргумента (n=3). Она состоит из 8-ми q-функций 3-го порядка $\{q(i,3)\}$, 4-функций 2-го порядка $\{q(i,2)\}$, 2-х функций 1-го порядка и одной q-функции нулевого порядка. Данные функции, в зависимости от порядка, характеризируют:

- с помощью q-функций 3-го порядка $\{q(i,3)\}$ можно описать все множество БФ, которые имеют 3 аргумента;
- с помощью q-функций 2-го, 1-го, 0-го порядка $\{q(i,3)\}$ можно описать только отдельные фрагменты БФ.

Метод реализации БФ с помощью ортогональных подинтервалов

В основе метода лежит применение введенной в работе расширенной системы q- функций $(n-i)$-ого порядка при изменении величины i от 0 до n. Это позволяет перейти от представления БФ в виде ряда (1) базисной системы функций $\{q(i,n)\}$ к знакопеременному ряду на основе предложенной расширенной системы следующего вида:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)\sim c_{00}+\sum_{i=0}^{2^2-1}c_{i2}q_{i2}+\sum_{i=0}^{2^3-1}c_{i3}q_{i3}+\dots+\sum_{i=0}^{2^k-1}c_{ik}q_{ik}+\dots+\sum_{i=0}^{2^n-1}c_{in}q_{in} \qquad (4)$$

Отличие реализации БФ предложенным в данной работе методом от реализации с помощью универсального базиса q-функций основано на следующих преимуществах ряда (4) по сравнению с рядом (1), несмотря на кажущееся его усложнение:

- при компактном расположении единиц (нулей) в ТИ есть возможность реализовать их с помощью q-функций меньшего порядка. В частности, q-функциям n-го порядка соответствуют конъюнкции длиной n, n-1-ого порядка – конъюнкции длиной n-1 и т.д.;
- количество слагаемых ряда (1) однозначно равно k, где k – количество единиц в ТИ, а у ряда (4) количество слагаемых может быть меньше, как показано в вышеприведенном примере.

При разработке метода были учтены следующие особенности подинтервалов расширенного ряда:

1. Наличие в ряде подинтервалов меньшего порядка уменьшает количество членов ряда, так как подинтервалы меньшего порядка являются объединением подинтервалов большего порядка.

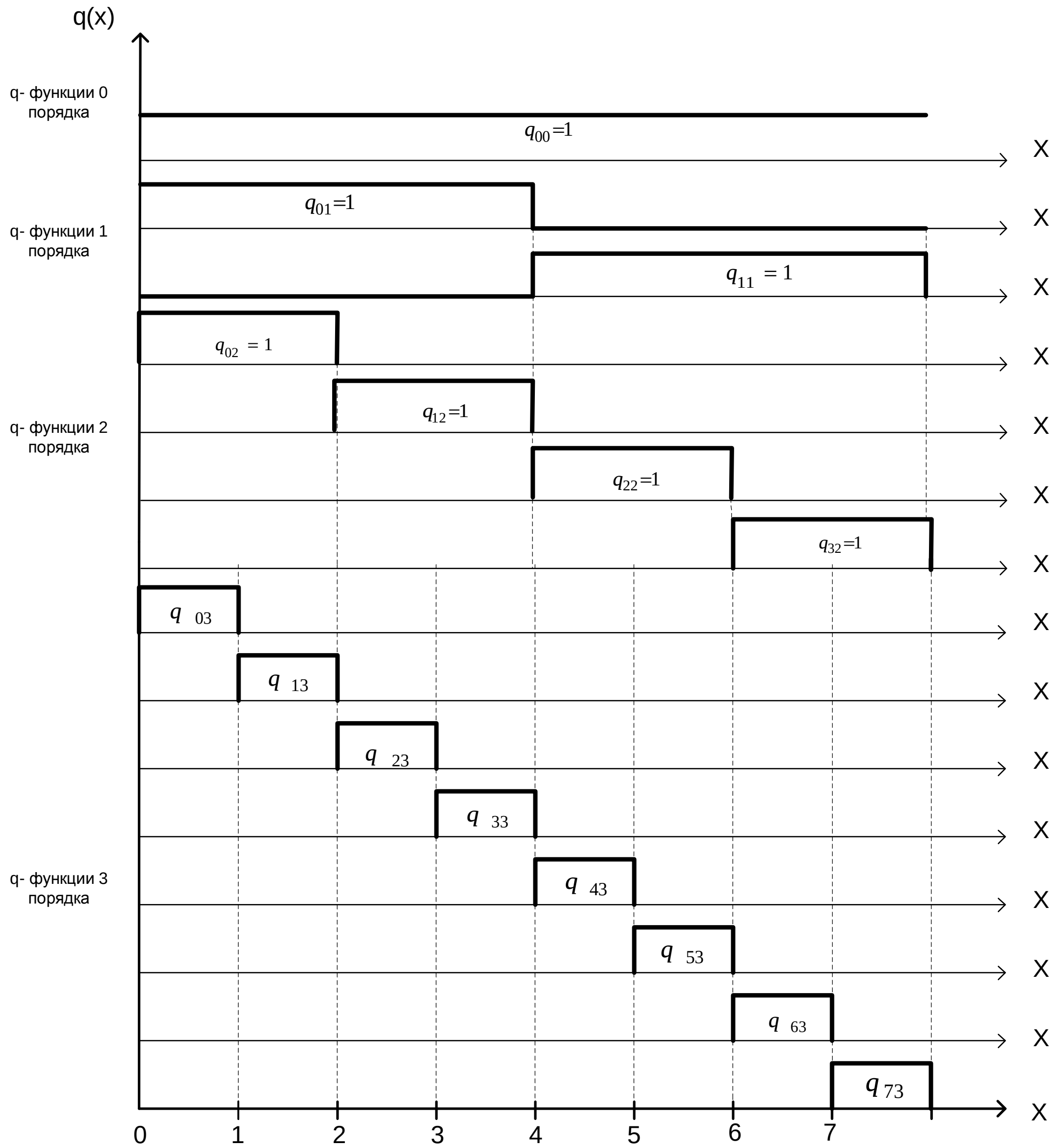

Рис. 3. Расширенная система *q*-функций *n*=3

2. Подинтервалы меньшего порядка имеют меньшее количество литерал, что соответственно оптимизирует показатели сложности реализации.

3. Из первых 2 пунктов следует вывод, что при записи расширенного ряда преимущество предоставляется подинтервалам с меньшим порядком. Введение знакопеременного ряда дает возможность получить уменьшение показателей сложности реализации БФ.

Рассмотренные выше рассуждения позволяют прийти к основному выводу, что для получения лучших показателей сложности реализации расширенный знакопеременный ряд нужно строить из подинтервалов меньшего порядка.

Для изложения сути метода требуется введение некоторых показателей. Прежде всего это количественное значение порядка подинтервала k_{ch}. Равенство подинтервала константе соответствует значению k_{ch}=0, если подинтервал состоит из одного литерала k_{ch}=1. Каждому значению порядка подинтервала k_{ch} соответствует величина размера подинтервала – n_1 . Предельное значение $n_1=2^n$ соответствует значению k_{ch}=0.

Алгоритм метода получения знакопеременного ряда на основе расширенной системы q-функций сводится к выполнению следующей последовательности действий:

1. Записать БФ от *n* аргументов в виде бинарного вектора в обратном порядке. Бинарным вектором называется столбец результата в таблице истинности БФ.

ISSN 2306-4412. Вісник ЧДТУ, 2013, № 2

2. Задать начальные значения k_{ch}=0 и размер текущего подинтервала $n_1=2^n$. При k_{ch}=0 количество интервалов равно 1.

3. Определить количество единиц на текущем интервале – m.

4. В частном случае, если $m=n_1$, текущему подинтервалу соответствует значение 1, при $m=0$ подинтервалу соответствует константа 0.

5. В общем случае при $m \in (0;n_1)$, если $m > \frac{n_1}{2}$, подинтервал определяется как разность единицы и членов ряда (4) более высокого порядка. При этом указанный текущий подинтервал делится на 2, 4, 8, …, n_1 частей до тех пор, пока части не будут состоять из нулей или единиц. В результате будет сформировано выражение, представляющее собой разность единицы и всех подинтервалов, на которых БФ принимает значение равное нулю.

6. При $m \le \frac{n_1}{2}$ необходимо выполнить проверку на наличие подинтервалов, значение которых не равно текущему показателю k_{ch}, и в положительном случае осуществить модификацию показателя $k_{ch}=k_{ch}+1$. При этом соответственно уменьшается величина n_1 текущего подинтервала. Действия п. 3 следует повторить для всех подинтервалов.

7. Процесс формирования знакопеременного ряда на основе расширенных функций продолжается до тех пор, пока существуют подинтервалы, для которых значение k_{ch} превышает текущее.

Для наглядности продемонстрируем реализацию алгоритма метода с помощью расширенного ряда для вышеупомянутой БФ (см. табл.1) (4).

1. Бинарный вектор БФ равен 10111000.
2. k_{ch}=0, n_1=8, количество подинтервалов равно 1.
3. Количество единиц в бинарном векторе m=4.

Поскольку для m=4 выполняется условие $m \le \frac{n_1}{2}$, расширенный ряд не имеет подинтервалов, для которых k_{ch}=0.

Проводится модификация показателей $k_{ch}=k_{ch}+1$ и n_1=8/2=4. В этом случае количество подинтервалов равно 2.

4. Рассмотрим каждый подинтервал отдельно. Первому подинтервалу соответствует последовательность 1000 и условия m=1 и $m \le \frac{n_1}{2}$. Для второго подинтервала 1011 m=3, что соответствует выполнению условия $m > \frac{n_1}{2}$. В результате применения алгоритма к текущему подинтервалу он представлен следующим фрагментом $\overline{x_3} - \overline{x_3 x_2} x_1$..

5. Для подинтервала 1000 проводится модификация $k_{ch}=k_{ch}+1=2$ и n_1=4/2=2. Для этого случая количество подинтервалов равно 2. Каждый подинтервал рассматривается отдельно. Первый подинтервал q_{22} равен 10 (рис. 3). Для него m=1 и $m \le \frac{n_1}{2}$, следовательно, расширенный ряд не имеет подинтервала q_{22}. Второй подинтервал q_{32} равен 00 (рис. 3). Значение подинтервала q_{32} равно 0.

6. Для q_{22} проводится модификация $k_{ch}=k_{ch}+1=3$ и n_1=2/2=1. Количество подинтервалов равно 2.

7. Рассмотрим каждый подинтервал отдельно. Первый подинтервал q_{43} равен 1 (рис. 3). В результате его можно представить как $\overline{x_3} - \overline{x_3 x_2} x_1 + x_3 \overline{x_2 x_1}$. Второй подинтервал q_{44} равен 0 (рис. 3). Значение подинтервала q_{44} равно 0.

8. Поскольку для указанной БФ отсутствуют подинтервалы, для которых k_{ch}>3, знакопеременный ряд на основе расширенных функций можно считать сформированным. Он имеет вид $f(x_1, x_2, x_3) \sim \overline{x_3} - \overline{x_3 x_2} x_1 + x_3 \overline{x_2 x_1}$.

Показатели сложности реализации БФ указанного ряда равны S_l=7, S_{ad}=3, что существенно меньше, чем у ряда (3).

Объективное заключение о перспективности представления БФ методом реализации БФ с помощью ортогональных подинтервалов в виде предложенного ряда (3) можно осуществить с помощью технологии EDM (Extended Data Mining) [2], или, иными словами, с помощью вычислительных экспериментов по определению суммарных показателей сложности реализации S_l для полных множеств булевых функций от 3 и 4 аргументов *L(3)* и *L(4)* соответственно в форме ряда (1) и ряда (4).

На основе алгоритма метода реализации булевых функций с помощью ортогональных подинтервалов создана программа PR_ORPint, с помощью которой был протестирован алгоритм, а также получены суммарные показатели сложности реализации S_L и S_{AD} для полных множеств *L(3)* и *L(4)* в форме соответственно ряда (1) и ряда (4). Результаты вычислительных экспериментов представлены в табл. 2.

Таблица 2

Сравнения суммарных показателей S_L и S_{AD}
для полных множеств L(3) и L(4)

Множества	Количество БФ	Суммарные показатели S_L		Суммарные показатели S_{AD}		Уплотнение S_L ряда 3 в %	Уплотнение S_{AD} ряда 3 в %
		в виде ряда (1)	в виде ряда (3)	В виде ряда (1)	В виде ряда (3)		
L(3)	256	2430	1566	1016	734	64,44	72,24
L(4)	65 536	2097088	1221118	524272	351742	58,23	67,09

Выводы:

1. В данной статье предложен новый метод реализации булевых функций на этапе логического проектирования с помощью ортогональных подинтервалов. Для представления БФ в работе введена расширенная система *q*-функций, что позволяет представлять заданную булеву функцию в виде расширенного знакопеременного ряда с меньшими показателями структурной сложности реализации БФ.

2. Результаты исследования, полученные с помощью технологии EDM, демонстрируют существенную экономию наиболее значимых для разработчиков интегральных микросхем параметров булевых функций. Так для полных множеств БФ *L(3)* и *L(4)* минимизация по коэффициенту сложности реализации – количество слагаемых S_{ad} составляет 27 % и 32 % соответственно, а по коэффициенту сложности реализации – количество литерал в записи булевых функций S_l составляет 35 % и 41 % соответственно.

3. С увеличением в БФ числа аргументов показатели сложности реализации в данной форме представления оптимизируются, что в свою очередь делает перспективным их дальнейшее исследование.

Список литературы

1. Кочкарев Ю. А. Ортогональные сигналы в вычислительной технике / Ю. А. Кочкарев // Изд. Ростовского универ. – Ростов-на-Дону. – 1980. – 191 с.
2. Кочкарев Ю. А. Исследование структуры полного множества логических функций на основе технологии EDM / Ю. А. Кочкарев, В. В. Бузько, Н. С. Кучерова // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – Черкаси : ЧДТУ. – № 1–2. – 2007. – С. 60 – 65.
3. Golomb S. W. On the Classification of Boolean Function/ IRE Trans/ on Circnit Theor., ст. 6, 1958, pp. 176-186.
4. Дертоузес М. Л. Пороговая логика. / М. Л. Дертоузес. Пер. с англ. под ред. Корягина Д. А. – М. : Мир, 1977. – 342 с.
5. Карповский М. Г., Москалев Э. С. Спектральный метод анализа и синтеза дискретных устройств. / М. Г. Карповский, Э. С. Москалев. Библиотека по автоматике, выпуск 507. – Л. : Энергия, 1973. – 144 с

6. Кочкарев Ю. А. Теория, техническая реализация и использование ортогональных уплотнений информации в вычислительных устройствах. /Дис. на соиск… доктора техн. наук, защищена в Таганрогском радиотехническом институте им. В. Д. Калмыкова. – Таганрог, 1983.

References

1. Kochkarev Y. A. Ortogonalnye signali v vychislitelnoj tehnike / Y. A. Kochkarev. // Publishing house Rostov university. Rostov-na-Donu. – 1980. – 191 p.
2. Kochkarev Y. A. Issledovanie strukturi polnogo mnoghestva logicheskih funkcij na osnove tehnologii EDM / Y. A. Kochkarev., V. V. Buzko, N. S. Kucherova // Visnik of Cherkasskij derghavnij technologicheskij universitet. – Cherkassy : ChDTU. – № 1–2. – 2007. – p.60–65.
3. Golomb S. W. Klassificacija boolevih funkcij/ IRE Trans/ on Circuit Theor., ст.6, 1958, pp.176-186.
4. Dertouses M. L. Porogovaya logika. / M. L. Dertouses. Per. s angl. pod red. Koryagina D. A. – M. : Mir, 1977. – 342 p.
5. Karpovskij M. G., Moskalev E. S. Spektralnyj metod analiza i sinteza diskretnyh ustrojstv. / M. G. Karpovskij, E. S. Moskalev. Biblioteka po avtomatike, vypusk 507. – L. : Energiya, 1973. – 144 p
6. Kochkarev Y. A. Teoriya, tehnicheskaya realizaciya i ispolzovaniye ortogonalnyh uplotnenij informacii v vychislitelnyh ustrojstvah. /Dis. na soisk… doktora techn. nauk, zashishena v Taganrogskom radiotehnicheskom institute im. V. D. Kalmykova. – Taganrog, 1983.

Стаття надійшла до редакції 14.05.2013.

Відомості про авторів:

Кочкарев Ю.А., доктор технічних наук, професор кафедри інформатики та інформаційної безпеки, Черкаський державний технологічний університет

Бурмистров С. В. аспірант кафедри інформатики та інформаційної безпеки, Черкаський державний технологічний університет

Панаско Е. Н., кандидат технічних наук, викладач кафедри інформатики та інформаційної безпеки, Черкаський державний технологічний університет