УДК 534.232.082.73

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АСИММЕТРИЧНЫХ БИМОРФНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Петрищев О. Н.[1], *д.т.н., профессор,*
Шарапов В. М.[2], *д.т.н., профессор,*
Сотула Ж. В.[2], *к.т.н.*
[1]НТУУ «КПИ»
03056, Соломенский район, пр-т Победы, 37, г. Киев, Украина
[2]Черкасский государственный технологический университет
18006, бульв. Шевченко, 460, г. Черкассы, Украина, v_sharapov@rambler.ru

Анотація. *У статті представлений розрахунок динамічного напружено-деформованого стану асиметричних біморфних п'єзокерамічних елементів в режимі випромінювання акустичних хвиль. Виведені співвідношення для розрахунку інтегральних характеристик активної зони біморфного елемента, пропонується методика визначення координати нейтрального шару активної зони.*

Ключові слова: *п'єзокераміка, передавальна характеристика, біморфний елемент, асиметричні п'єзоелементи, акустичні хвилі, генератор, рівняння коливань.*

THE CALCULATION OF DYNAMIC MODE OF DEFORMATION OF ASYMMETRIC BIMORPH PIEZOCERAMIC ELEMENTS

Petrishchev O. N.[1], *Dr.Tech.Sc., professor,*
Sharapov V. M.[2], *Dr.Tech.Sc., professor,*
Sotula Zh. V.[2], *Ph.D.*
[1]NTUU "KPI"
03056, prospect Pobedy, 37, Kyiv, Ukraine
[2]Cherkasy State Technological University
18006, Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, Ukraine, v_sharapov@rambler.ru

Abstract. *In the article the calculation of dynamic mode of deformation of asymmetric bimorph piezoceramic elements in a mode of acoustic waves radiation is stated. Correlations for the calculation of integral characteristics of an active zone of bimorph element are deduced, the technique for determination of the co-ordinate of a neutral layer of an active zone is offered.*

Keywords*: piezoceramic, transfer characteristic, bimorph element, asymmetric piezoelements, acoustic waves, radiation, generator, fluctuations equation.*

Пьезоэлектрические преобразователи широко применяются в разных отраслях техники [1–5]. Особый интерес представляет применение этих преобразователей в электроакустике [4, 5]. Во многих случаях электроакустические преобразователи содержат в качестве активного элемента асимметричные биморфные пьезокерамические элементы [4, 5].

Изучением асимметричных биморфных пьезокерамических элементов (БПЭ) занимались многие исследователи [4, 5, 7–10, 13, 15 и др.], однако определение координаты нейтрального слоя, активного слоя БПЭ, которая определяет его изгибную жесткость и интегральные характеристики ее напряженного состояния, оказалось вне зоны их внимания.

Поэтому **целью** данной работы является изучение динамического напряженно-деформированного состояния асимметричных БПЭ в режиме излучения.

Расчетная схема типового асимметричного биморфного элемента показана на рис. 1.

Асимметричный БПЭ (рис. 1) состоит из металлической пластины 1 (диска) круглой формы, которая по контуру $\rho = R_1$ крепится к неподвижной опоре корпуса. К металлическому диску, соосно с ним, крепится клеем диск 3 из поляризованной по толщине пьезокерамики. Поверхности $z = -h$ и $z = -(h+\alpha)$ пьезокерамического диска покрыты тонким слоем металла (металлизированы). В режиме излу-

чения акустических волн к металлизированным поверхностям пьезокерамического диска прикладывается разность электрических потенциалов, которая формируется генератором с выходным электрическим импедансом $Z_г$. Полагая, что рассматриваемая физическая система является линейной, будем считать, что на выходе генератора электрических сигналов существует гармонически изменяющаяся во времени разность электрических потенциалов $U_г e^{i\omega t}$ ($U_г$ - амплитуда; $i=\sqrt{-1}$; ω - круговая частота смены знака разности потенциалов; t - время).

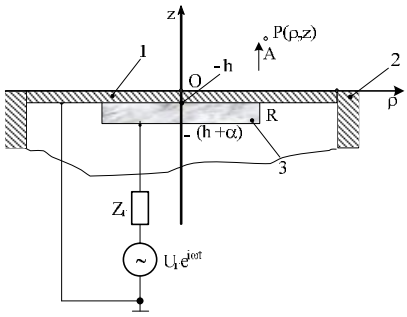

Рис. 1. Расчетная схема асимметричного биморфного пьезокерамического элемента в режиме излучения акустических волн: 1 – металлическая пластина; 2 – корпус; 3 – пьезоэлемент

Так как предполагается выполнение неравенства $(h+\alpha)/R<<1$, отсюда следует, что можно воспользоваться гипотезой Кирхгофа [6] о недеформируемом поперечном сечении диска. Логические построения, которые опираются на эту гипотезу, неизбежно приводят к бигармоническим уравнениям для амплитуд гармонически изменяющихся во времени перемещений нейтральной плоскости пластины.

В цилиндрической системе координат (ρ,ϑ,z) эти уравнения записываются в следующем виде:

$$\nabla^4 w - l_0^4 w - \hat{s}_z^*(r)/D_1 = 0 \;\forall\; r \in [0,R], \quad (1)$$

$$\nabla^4 w_1 - l_1^4 w_1 - \hat{s}_z^*(r)/D_м = 0 \;\forall\; r \in [R,R_1], \quad (2)$$

где $\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2$ - лапласиан лапласиана, при этом, в случае осевой симметрии, т. е. независимости амплитуд гармонически изменяющихся во времени прогибов w и w_1 активной ($0\le\rho\le R$) и пассивной ($R\le\rho\le R_1$) областей биморфного элемента от значений окружной координаты ϑ, дифференциальный оператор $\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$; $\lambda_0^4 = \omega^2(\rho_0\alpha+\rho_M h)/D_1$ - четвертая степень волнового числа поперечных колебаний активной зоны биморфного элемента; ρ_0 и ρ_M - плотности пьезокерамики и металлической пластинки; D_1 - изгибная жесткость активной зоны; $\hat{\sigma}_z^*(\rho)$ - равнодействующая реакции окружающей среды; $\lambda_1^4 = \omega^2\rho_M h/D_M$ - четвертая степень волнового числа поперечных колебаний пассивной зоны биморфного элемента; $D_M = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – изгибная жесткость [6] металлической пластинки, упругие свойства которой характеризуются модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν.

Общее решение уравнения (1) можно записать в следующем виде:

$$w(\rho) = C_1 J_0(\lambda_0\rho) + C_2 I_0(\lambda_0\rho), \quad (3)$$

где C_1 и C_2 - подлежащие определению константы; $J_0(\lambda_0\rho)$ и $I_0(\lambda_0\rho)$ - функция Бесселя и модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\begin{aligned} w_1(\rho) &= C_3 J_0(\lambda_1\rho) + C_4 N_0(\lambda_1\rho) + \\ &+ C_5 I_0(\lambda_1\rho) + C_6 K_0(\lambda_1\rho), \end{aligned} \quad (4)$$

где $C_3,...,C_6$ – неизвестные и подлежащие определению в ходе решения задачи константы; $J_0(\lambda_1\rho)$, $N_0(\lambda_1\rho)$, $I_0(\lambda_1\rho)$ и $K_0(\lambda_1\rho)$ – функция Бесселя, Неймана, модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевого порядка. Общее решение (4) должно удовлетворять граничным условиям на контуре $\rho=R_1$, которые в зависимости от условий закрепления контура записываются тем или иным образом. Так, для случая абсолютно жесткого закрепления контура $\rho=R_1$ функция $w_1(\rho)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} &w_1(\rho) = 0 \forall \rho = R_1, \\ &\frac{\partial w_1(\rho)}{\partial\rho} = 0 \forall \rho = R_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Помимо граничных условий на контуре $\rho=R_1$, функция $w_1(\rho)$ должна удовлетворять условиям кинематического и динамического сопряжения на контуре $\rho=R$, который разде-

ляет активную и пассивную зоны биморфного пьезоэлектрического элемента.

Эти условия записываются следующим образом

$$w(\rho)-w_1(\rho)=0\forall\rho=R,\ \frac{\partial w(\rho)}{\partial\rho}-\frac{\partial w_1(\rho)}{\partial\rho}=0\forall\rho=R,$$
$$M_\rho-M_\rho^{(1)}=0\forall\rho=R,\ Q-Q^{(1)}=0\forall\rho=R, \quad (6)$$

где $w(\rho)$ и $\partial w(\rho)/\partial\rho$ – прогибы и углы поворота цилиндрических поперечных сечений в активной зоне биморфного пьезоэлектрического элемента; M_ρ и $M_\rho^{(1)}$ – линейные плотности изгибающих моментов в активной и пассивной зонах биморфного элемента соответственно, определенные относительно одной и той же криволинейной оси; Q и $Q^{(1)}$ – линейные плотности поперечных сил в активной и пассивной зонах.

Граничные условия (5) и условия сопряжения решений (6) образуют систему алгебраических уравнений, из которой определяются константы $C_1,...,C_6$ в составе общих решений (3) и (4).

И в активной, и в пассивной зонах биморфного пьезоэлектрического элемента напряженно-деформированное состояние определяется гипотезой Кирхгофа [6], которую применительно к данной ситуации можно сформулировать следующим образом: материальные частицы биморфного пьезоэлектрического элемента, образующие в своей совокупности поперечное цилиндрическое сечение $\rho=const$, в процессе поперечного осесимметричного изгиба движутся как единое жесткое целое, при этом цилиндрическое сечение остается перпендикулярным некоторой поверхности, которая называется нейтральным слоем, и поворачивается на угол $\Psi(\rho)$ вокруг криволинейной (кольцевой) оси, которая располагается в этом слое. Материальные частицы нейтрального слоя при поперечном изгибе не перемещаются в радиальном и окружном направлениях.

Повороты цилиндрических поперечных сечений приводят к тому, что одновременно с радиальными перемещениями материальные частицы биморфного элемента перемещаются вдоль аксиальной оси Oz и вот эти перемещения, одинаковые для всех материальных частиц в составе цилиндрического поперечного сечения, называются в теории поперечного изгиба прогибами. Так как числовое значение функции, т. е. прогиба $w(\rho)$ равно отклонению любой, перпендикулярной оси Oz, плоскости от положения равновесия, то при малых прогибах между углом поворота цилиндрического сечения $\Psi(\rho)$ и функцией $w(\rho)$ существует взаимно однозначная связь

$$\Psi(\rho)=-\frac{\partial w(\rho)}{\partial\rho}, \quad (7)$$

где $w(\rho)$ - прогибы активной зоны $0\le\rho\le R$ биморфного элемента.

На основании соотношения (7) можно показать, что деформированное состояние биморфного пьезоэлектрического элемента определяется двумя компонентами тензора деформации, а именно ε_ρ и ε_ϑ, причем

$$\varepsilon_\rho=-z^*\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2},\qquad \varepsilon_\vartheta=-\frac{z^*}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}, \quad (8)$$

где z^* - расстояние от нейтральной плоскости (рис. 2), которое отсчитывается вдоль аксиальной оси z^*, связанной с осью z исходной системы координат (рис. 1) очевидным соотношением $z^*=z+z_0$; z_0 – абсолютное значение координаты нейтральной плоскости активной зоны биморфного пьезоэлектрического элемента. Параметр z_0 является существенным параметром исследуемой задачи и подлежит тщательному определению. Пока же будем считать, что параметр z_0 известен.

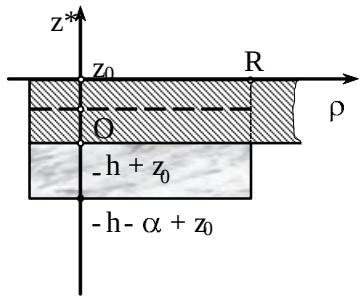

Рис. 2. К определению деформаций и напряжений в активной зоне биморфного элемента

Уточним структуру матриц материальных констант поляризованной по толщине пьезокерамики.

Матрица модулей упругости $c_{\beta\lambda}^E$ ($\beta,\lambda=1,...,6$ - индексы Фойгта), экспериментально определяемых в режиме постоянства (равенства нулю) напряженности электрического поля (символ E), имеет структуру,

практически совпадающую со структурой матрицы трансверсально изотропной среды, и записывается в следующем виде:

$$\left|c^E_{\beta\lambda}\right| = \begin{vmatrix} c^E_{11} & c^E_{12} & c^E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c^E_{22} & c^E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c^E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c^E_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c^E_{55} & 0 \\ & & & & & c^E_{66} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Элементы матрицы (9) соотносятся между собой следующим образом: $c^E_{11} = c^E_{22} \neq c^E_{33}$; $c^E_{12} \approx c^E_{13}$; $c^E_{13} = c^E_{23}$; $c^E_{44} = c^E_{55}$; $c^E_{11} = \left(c^E_{11} - c^E_{12}\right)/2$.

Матрица пьезоэлектрических модулей $e_{k\beta}$ ($k=1,2,3;\ \beta=1,\ldots,6$) имеет следующий вид:

$$\left|e_{k\beta}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (10)$$

где $e_{31} = e_{32} \neq e_{33}$; $e_{15} = e_{24} = \left(e_{33} - e_{31}\right)/2$.

Матрица диэлектрических проницаемостей χ^ε_β, элементы которой определяются в режиме постоянства (равенства нулю) деформаций (символ ε), записывается следующим образом:

$$\left|\chi^\varepsilon_\beta\right| = \begin{vmatrix} \chi^\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ & \chi^\varepsilon_2 & 0 \\ & & \chi^\varepsilon_3 \end{vmatrix}, \quad (11)$$

при этом $\chi^\varepsilon_1 = \chi^\varepsilon_2 = \chi^\varepsilon_3$.

В дальнейшем изложении равновеликие материальные константы будут обозначаться одинаковыми символами.

Из общей записи обобщенного закона Гука для среды с пьезоэлектрическими свойствами [14] следует, что деформациям ε_ρ и ε_ϑ соответствуют нормальные напряжения σ_ρ и σ_ϑ, причем

$$\sigma_\rho = c^E_{11}\varepsilon_\rho + c^E_{12}\varepsilon_\vartheta - e_{31}E_z, \quad (12)$$

$$\sigma_\vartheta = c^E_{12}\varepsilon_\rho + c^E_{11}\varepsilon_\vartheta - e_{31}E_z, \quad (13)$$

где E_z - аксиальный компонент вектора напряженности результирующего электрического поля.

При записи соотношений (12) и (13) было принято, что в тонком, покрытом электродами диске, в любой точке его объема, всегда выполняется неравенство $\left|E_\rho\right| << \left|E_z\right|$ и поэтому радиальный компонент E_ρ был принят равным нулю. Помимо этого, при записи формул (12) и (13) были приняты во внимание числовые соотношения между модулями упругости $c^E_{\alpha\beta}$ и пьезомодулями $e_{k\beta}$ в матрицах (9) и (10).

Напряжения в металлической пластине активной зоны БПЭ определяются по стандартной схеме [6]:

$$\sigma^M_\rho = -\frac{Ez^*}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2} + \frac{\nu}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}\right), \quad (14)$$

$$\sigma^M_\vartheta = -\frac{Ez^*}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}\right), \quad (15)$$

где E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала металлической пластинки.

Для того чтобы построить уравнение движения элемента активной зоны биморфного пьезоэлектрического элемента, рассмотрим интегральные характеристики напряженного состояния в области $0 \le \rho \le R$.

Двумя плоскостями $\vartheta = const$ и $\vartheta + d\vartheta$ и двумя цилиндрическими поверхностями ρ и $\rho + d\rho$ выделим элемент активной зоны биморфного пьезоэлектрического элемента (рис. 3). Рассмотрим силовые факторы, действующие на гранях этого элемента.

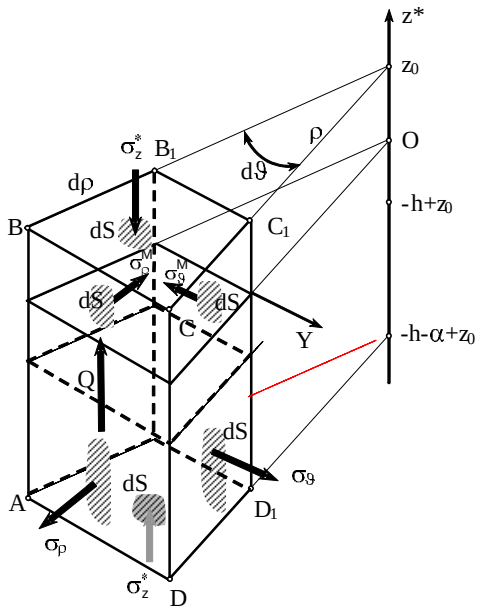

Рис. 3. К расчету интегральных характеристик напряженного состояния активной зоны БПЭ

Так как мембранные деформации в активной зоне БПЭ отсутствуют по определению (считается, что деформации слоев невелики, и поперечный изгиб можно рассматривать как чистый изгиб), то действующие на боковых гранях бесконечно малой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ нормальные напряжения σ_ρ, σ_ϑ, σ_ρ^M и σ_ϑ^M не должны создавать нормальных сил, но создают изгибающие моменты. Определим эти изгибающие моменты следующим образом:

$$M_\rho \cdot \rho d\vartheta = \int_{-h-\alpha+z_0}^{z_0} z^* \sigma_\rho dz^* \rho d\vartheta ,$$

$$M_\vartheta \cdot d\rho = \int_{-h-\alpha+z_0}^{z_0} z^* \sigma_\vartheta dz^* d\rho ,$$

где M_ρ и M_ϑ имеют смысл линейной плотности моментов сил, которые создаются нормальными напряжениями $\sigma_\rho^{(M)}$ и $\sigma_\vartheta^{(M)}$ соответственно. Из последних определений следует, что линейные плотности M_ρ и M_ϑ определяются следующим образом:

$$M_\rho = \int_{-h-\alpha+z_0}^{z_0} z^* \sigma_\rho dz^* , \quad M_\vartheta = \int_{-h-\alpha+z_0}^{z_0} z^* \sigma_\vartheta dz^* . \quad (16)$$

Подставляя в определения (16) выражения для расчета нормальных напряжений в пьезокерамике и металлическом слое активной зоны биморфного пьезоэлектрического элемента, получаем

$$M_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(D_{пэ} + D_м - D_0\right) - \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\left(k^* D_{пэ} + nD_м - D_0\right) - M_0^*, \quad (17)$$

$$M_J = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(k^* D_{пэ} + nD_м - D_0\right) - \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\left(D_{пэ} + D_м - D_0\right) - M_0^* , \quad (18)$$

где $D_{пэ} = \frac{1}{3} c_{11}^D \left[(-h+z_0)^3 - (-h-\alpha+z_0)^3\right]$ – изгибная жесткость пьезокерамического диска;

$D_м = \frac{E}{3(1-\nu^2)}\left[z_0^3 + (h-z_0)^3\right]$ – изгибная жесткость металлического слоя в составе активной зоны биморфного элемента;

$D_0 = \frac{e_{31}^2(-2h+2z_0-\alpha)}{4\chi_3^\varepsilon}\left[(-h+z_0)^2 - (-h-\alpha+z_0)^2\right]$ – дополнительная изгибная жесткость, которая учитывает связность электрических и упругих полей в объеме деформируемого пьезоэлектрического диска;

$M_0^* = \frac{e_{31}U_0}{2\alpha}\left[(-h+z_0)^2 - (-h-\alpha+z_0)^2\right]$ – момент внешних сил, т. е. изгибающий момент, который создают радиальные смещения материальных частиц пьезокерамического диска, деформирующегося под действием приложенной извне разности электрических потенциалов.

Далее после достаточно простых и очевидных преобразований можно получить уравнение для амплитуд гармонически изменяющихся во времени прогибов и реакций

$$\nabla^4 w(\rho) - \lambda_0^4 w(\rho) = \frac{\hat{\sigma}_z^*(\rho)}{D_1} , \quad (19)$$

где $\lambda_0^4 = \omega^2(\rho_0\alpha + \rho_м h)/D_1$. Уравнение (19) имеет смысл уравнения установившихся гармонических колебаний материальных частиц активной зоны биморфного БПЭ.

Далее определим координаты нейтрального слоя активной зоны асимметричного биморфного пьезоэлектрического элемента.

При определении интегральных характеристик напряженного состояния активной зоны биморфного пьезоэлектрического элемента было сказано, что нормальные напряжения σ_β $(\beta = \rho, \vartheta)$ не создают на боковых поверхностях элементарной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ нормальных сил. Если линейную плотность нормальных сил обозначить символом N_β, то последнее утверждение эквивалентно условию следующего вида:

$$N_\beta = \int_{-h-\alpha+z_0}^{z_0} \sigma_\beta dz^* = 0 . \quad (20)$$

Из соотношения (20) следует, что отрицательные и положительные площади под эпюрами нормальных напряжений σ_β равны по абсолютной величине. Так как величины

σ_β линейно зависят от координаты z^*, то эпюры нормальных напряжений σ_β в любом поперечном сечении $\rho = const$ будут подобны эпюре $\sigma_\beta(z^*)$, которая показана на рис. 4.

Из приведенных на рис. 4 построений следует, что равенство (36) эквивалентно равенству площадей

$$S^\beta_{O_1ABCD} = S^\beta_{O_1HG}. \qquad (21)$$

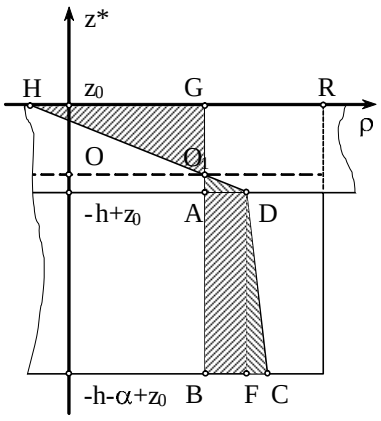

Рис. 4. К определению координаты нейтрального слоя активной зоны биморфного элемента

Очевидно, что $S^b_{O_1ABCD} = S^b_{O_1AD} + S^b_{FBFD} + S^b_{DFC}$, причем

$S^\beta_{O_1AD} = (-h+z_0)\sigma^M_\beta(-h+z_0)/2$;

$S^\beta_{ABFD} = \alpha\sigma_\beta(-h+z_0)$;

$S^b_{DFC} = a\left[s_b(-h-a+z_0) - s_b(-h+z_0)\right]/2$,

где $\sigma_\beta(z^*)$ – нормальные напряжения в пьезокерамическом диске ($\beta = \rho, z$), а $\sigma^M_\beta(z^*)$ – нормальные напряжения в металлическом слое активной зоны биморфного элемента. Правая часть равенства (21), т. е. площадь $S_{O_1HG} = z_0\sigma^M_\beta(z_0)/2$.

После простых преобразований получаем

$$a(h-z_0)\left[\frac{E}{1-n} - c^D_{11}(1+k^*)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{E(h^2-2hz_0)}{1-n} + c^D_{11}a^2(1+k^*)\right]. \qquad (22)$$

Условие (22) выполняется тогда и только тогда, когда

$$z_0 = \frac{E(h^2-2h\alpha) + c^D_{11}(1+k^*)(\alpha^2+2h\varepsilon)}{2\left[\alpha c^D_{11}(1+k^*)(1-\nu) - E(\alpha-h)\right]}. \qquad (23)$$

При $h >> \alpha$ из (23) следует, что $z_0 = h/2$.

Как следует из модельного представления деформированного состояния активной зоны асимметричного биморфного элемента, колебания поперечного изгиба будут наблюдаться только в том случае, когда координата нейтрального слоя удовлетворяет двойному неравенству $0 < z_0 < h$, т. е. когда нейтральный слой активной зоны находится в объеме металлической пластинки. Подставляя в это неравенство выражение (23), приходим к выводу, что колебания поперечного изгиба могут быть реализованы в том случае, когда выполняется неравенство следующего вида:

$$\frac{h^2E}{1-\nu} > \alpha^2 c^D_{11}(1+k^*). \qquad (24)$$

Условие (24) имеет смысл условия существования колебаний поперечного изгиба в асимметричном БПЭ в режиме излучения акустических волн.

После того как определен параметр z_0, вычисляются в явном виде составляющие изгибной жесткости D_1, т. е. величины $D_{ПЭ}$, D_M и D_0, и определяется линейная плотность внешнего изгибающего момента M^*_0.

Выводы:

1. Изучены деформации, напряжения и интегральные характеристики напряженного состояния активной зоны асимметричного биморфного пьезокерамического элемента, которые корректно учитывают силы Кулона, возникающие в деформируемом пьезоэлектрическом диске.

2. Построено уравнение установившихся гармонических колебаний поперечного изгиба, в котором учитывается взаимодействие биморфного элемента с окружающей средой.

3. Предложена новая методика определения координаты нейтрального слоя активной зоны асимметричного биморфного элемента и сформулированы условия существования колебаний поперечного изгиба.

Список литературы

1. Джагупов Р. Г. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления : справочник /

Р. Г. Джагупов, А. А. Ерофеев. – СПб., Политехника, 1994. – 608 с.
2. Sharapov, V. (2011) Piezoceramic sensors, Springer Verlag, Heidelberg, Dordrecht, London, New York, 498 p.
3. Шарапов В. М. Пьезоэлектрические датчики / Шарапов В. М., Мусиенко М. П., Шарапова Е. В. – М. : Техносфера, 2006. – 632 с.
4. Sharapov, V., Sotula, Zh., Kunitskaya, L. (2013) Piezoelectric electroacoustic transducers, Springer Verlag, Heidelberg, Dordrecht, London, New York, 240 p.
5. Электроакустические преобразователи / Шарапов В. М., Минаев И. Г., Сотула Ж. В., Куницкая Л. Г. – М. : Техносфера, 2013. – 280 с.
6. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки / Л. Г. Доннел. – М. : Наука, 1982. – 317 с.
7. Колягин Н. И. Колебания и излучение в воздухе круглого биморфного элемента со свободным краем / Н. И. Колягин, Л. Ф. Лепендин, В. П. Усов // Прикладная акустика. – Вып. 5. – Таганрог : ТРТИ, 1977. – С. 45–51.
8. Вассергисер М. Е. Расчет и исследование дисковых изгибных пьезопреобразователей на пассивной подложке в режимах излучения и приема / М. Е. Вассергисер, А. Н. Винниченко, А. Г. Дорош // Акустический журнал. – 1992. – Т. 38, вып. 6. – С. 1019–1024.
9. Аронов Б. С. О расчете колебаний изгиба пьезокерамических пластин / Б. С. Аронов, Л. Б. Никитин // Акустический журнал. – 1981. – Т. 27, вып.5. – С. 687–696.
10. Аллавердиев А. М. Связанные изгибно-сдвиговые колебания слойно-ступенчатых дисковых пьезокерамических преобразователей / А. М. Аллавердиев, Н. В. Ахмедов, Т. Д. Шермергор // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 5. – С. 59–66.
11. Adelman, N. T., Stavsky, Y. (1980) Flexural-extensional behavior of composite piezoelectric circular plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, V. 67, № 3, pp. 819–822.
12. Lee, C. K. (1990) Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. Part I: Governing equations and reciprocal relationships, *J. Acoust. Soc. Am.*, V. 87, № 3, pp. 1144–1158.
13. Пьезоэлектрические преобразователи: справочник / [В. В. Ганопольский, Б. А. Касаткин, Ф. Ф. Легуша и др.]. – Л. : Судостроение, 1986. – 256 с.
14. Новацкий В. И Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. И. Новацкий. – М. : Мир, 1986.–160 с.
15. Гринченко В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций / Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. – Т. 5. Электроупругость. – К. : Наукова думка, 1989. – 280 с.
16. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука / Е. Л. Шендеров. – Л. : Судостроение, 1989. – 304 с.

References

1. Dzhagupov, R. G. and Yerofeyev, A. A. (1994) P'yezoelektronnyye ustroystva vychislitel'noy tekhniki, sistem kontrolya i upravleniya. Spravochnik. St. Peterburg, Poolitekhnika, 608 s. [in Russian]
2. Sharapov, V. (2011) Piezoceramic sensors, Springer Verlag, Heidelberg, Dordrecht, London, New York, 498 p.
3. Sharapov, V. M., Musienko, M. P. and Sharapova, E. V. (2006) P'yezoelektricheskiye datchiki. Moskva: Tekhnosfera, 632 s. [in Russian]
4. Sharapov, V., Sotula, Zh., Kunitskaya, L. (2013) Piezoelectric electroacoustic transducers, Springer Verlag, Heidelberg, Dordrecht, London, New York, 240 p.
5. Sharapov, V. M., Minayev, I. G., Sotula, Zh. V., Kunitskaya, L. G. (2013) Elektroakusticheskiye preobrazovateli. Moskva: Tekhnosfera, 280 s. [in Russian]
6. Donnel, L. G. (1982) Balki, plastiny i obolochki. Moskva: Nauka, 317 s. [in Russian]
7. Kolyagin, N. I., Lependin, L. F. and Usov, V. P. (1977) Kolebaniya i izlucheniye v vozdukhe kruglogo bimorfnogo elementa so svobodnym krayem. *Prikladnaya akustika*, Vyp. 5. Taganrog, TRTI, s. 45–51. [in Russian]
8. Vassergiser, M. Ye., Vinnichenko, A. N. and Dorosh, A. G. (1992) Raschet i issledovaniye dis-kovykh izgibnykh p'yezopreobrazovateley na passivnoy podlozhke v rezhimakh izlucheniya i priyema. *Akusticheskiy zhurnal.* T. 38. Vyp. 6, s. 1019–1024. [in Russian]
9. Aronov, B. S. and Nikitin, L. B. (1981) O raschete kolebaniy izgiba p'yezokeramicheskikh

plastin. *Akusticheskiy zhurnal*. T. 27. Vyp. 5, s. 687–696. [in Russian]

10. Allaverdiyev, A. M., Akhmedov, N. V. and Shermergor, T. D. (1987) Svyazannyye izgibno-sdvigovyye kolebaniya sloyno-stupenchatykh diskovykh p'ye-zokeramicheskikh preobrazovateley. *Prikladnaya mekhanika*, T. 23. № 5, s. 59 – 66. [in Russian]
11. Adelman, N. T., Stavsky, Y. (1980) Flexural-extensional behavior of composite piezoelectric circular plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, V. 67, № 3, pp. 819–822.
12. Lee, C. K. (1990) Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. Part I: Governing equations and reciprocal relationships, *J. Acoust. Soc. Am.*, V. 87, № 3, pp. 1144–1158.
13. Ganopol'skiy, V. V., Kasatkin, B. A., Legusha, F. F., Prud'ko, N. I. and Pugachev, S. I. (1986) P'yezoelektricheskiye preobrazovateli: Spravochnik. Leningrad: Sudostroyeniye, 256 s. [in Russian]
14. Novatskiy, V. I. (1986) Elektromagnitnyye effekty v tverdykh telakh. Moskva: Mir, 160 s. [in Russian]
15. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. and Shul'ga, N. A. (1989) Mekhanika svyazannykh poley v elementakh konstruktsiy. T. 5. Elektrouprugost'. Kiev, Naukova dumka, 280 s. [in Russian]
16. Shenderov, Ye. L. (1989) Izlucheniye i rasseyaniye zvuka. Leningrad: Sudostroyeniye, 304 s. [in Russian]