

МИНИМИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОРТОГОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Кочкарев Ю. А., д.т.н., профессор,

Греско С. А., старший преподаватель кафедры компьютерных систем,

Ланских Е. В., к.т.н., доцент кафедры компьютерных систем

Черкасский государственный технологический университет,

бул. Шевченко, 460, г. Черкассы, Украина, 18006

e-mail: gresko31@gmail.com, Evlans@mail.ru

Анотація. В статті запропоновано метод мінімізації логічних функцій в ортогональній формі представлення, який дозволяє оптимізувати показники складності реалізації. Проведено обчислювальний експеримент з аналізу кількості кращих варіантів показників складності реалізації. Наведено приклади мінімізації логічних функцій в ортогональній формі представлення.

Ключові слова: ортогональна форма представлення логічних функцій, мінімізація логічних функцій, показник складності реалізації логічної функції.

THE MINIMIZATION OF LOGIC FUNCTIONS IN ORTHOGONAL FORM OF REPRESENTATION

Kochkarev Yu. A., Ph.D., Professor,

Gresko S. A., senior lecturer in computer systems,

Lansky E. V., Ph.D., Associate Professor, Department of Computer Systems

Cherkassy State Technological University,

Shevchenko blvd, 460, Cherkassy, Ukraine, 18006

Abstract. In the paper a method of the minimization of logic functions in orthogonal form of representation, which allows to optimize implementation complexity indices, is offered. A computational experiment concerning the analysis of the quantity of the best variants of implementation complexity indices is carried out. Examples of the minimization of logic functions in orthogonal form of representation are made.

Keywords: orthogonal form of logic functions representation, minimization of logic functions, index of implementation complexity of logical functions.

Ортогональная форма представления (ОРФП) логических функций (ЛФ) введена в рассмотрение в [1] в процессе разработки новых форм представления (ФП) ЛФ с целью расширения множества доступных вариантов при логическом синтезе ЛФ в комбинационных схемах (КС).

КС (т.е. конечные автоматы без внутренней памяти (только с внешней)), как известно, являются информационными ядрами любых конечных автоматов.

Важно отметить, что ОРФП по своей природе является мультивариантной, т.е. позволяет за счет выбора параметров реализации получать различные по своей структуре аппаратные и/или программные решения.

Принципиальным отличием ОРФП от известных моновариантных форм представления – классической (КФП), алгебраической

(АФП) и Рида-Мюллеровской (РМФП), анализированных в [2], – является мультивариантное разбиение множества, состоящего из n аргументов ЛФ x_i на два подмножества – информационное подмножество Q_i , состоящее из k аргументов, и базисное подмножество Φ_i , состоящее из $n-k$ аргументов.

Функции $Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в ОРФП реализуются в виде рядов:

$$Y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^{n-k}-1} Q_i \Phi_i, \quad (1)$$

где Q_i – множество информационных ЛФ в виде функций от k аргументов (k всегда меньше n);

Φ_i – множество базисных ЛФ в виде функций от $n-k$ аргументов, которые являются взаимно ортогональными, т.е. в данном случае отличными от нуля на непересекающихся

подінтервалах полного интервала изменения аргументов длиной 2^n ;

Σ – обобщенный знак суммирования, которое в зависимости от выбранной ФП может быть логическим (с помощью функций *OR*), алгебраическим (с весовыми коэффициентами разных знаков) или по *mod2* (с помощью функций *XOR*).

Мультивариантность ОРФП проявляется уже в (1), так как именно ОРФП позволяет различным образом выбирать параметр k , а в рамках выбранного параметра k выбирать способ суммирования членов ряда (1) и, как будет показано ниже, кроме этого, варьировать номера аргументов x_i в подмножестве информативных функций Q_i .

Для того чтобы аргументировать интерес к исследованию ОРФП, важно отметить, во-первых, ее полноту, а также то, что ОРФП, по своей сути, является достаточно перспективным обобщением известной булевой алгебры и связанной с ней известной классической ФП ЛФ (чаще всего в виде ДНФ или КНФ).

В самом деле, КФП представляет собой частный случай ОРФП при $k=0$ в ряде (1). При этом Q_i представляют собой константы (единицы или нули по выбору проектировщика), а Φ_i – полные конъюнкции от n аргументов, т.е. ряд (1) в этом случае представляет собой совершенную ДНФ (при логическом суммировании членов ряда (1)). При увеличении параметра k , например, до $k=1$ ЛФ в ОРФП состоит из двух слагаемых, каждое из которых представляет собой половину строк таблицы истинности (ТИ). При $k=2$ ряд (1) состоит из четырех слагаемых, каждое из которых представляет собой четвертую часть строк ТИ, при $k=3$ – из восьми слагаемых и т.д. Таким образом, реализацию ЛФ в ОРФП можно трактовать как реализацию ЛФ по 2^k частям ТИ.

Целью работы является разработка оптимального представления ЛФ в ОРФП.

Мультивариантность ОРФП требует разработки:

- во-первых, технологии генерации возможных вариантов представления;
- во-вторых, определения механизма сравнения вариантов;

- в-третьих, определения критериев оптимальности выбора вариантов.

Наиболее трудоемкой частью выбора оптимального варианта является система генерации вариантов.

В целом, построение оптимального варианта представления ЛФ в ОРФП в виде ряда (1) будем называть по аналогии с известными процедурами в КФП минимизацией ЛФ в ОРФП.

Предлагаемый порядок минимизации ЛФ в ОРФП состоит из следующих этапов:

- определение показателей сложности реализации (ПСР) заданной ЛФ для классического случая $k=0$ (например, с помощью каталога минимальных форм MINFORM) и принятие этих показателей в качестве базовых показателей, подлежащих улучшению;

- принятие в качестве параметра реализации $k=1$ и определение ПСР для случаев выбора в качестве Q_i значений $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$;

- сравнение ПСР на каждом варианте выбора Q_i с базовыми ПСР, замена базовых ПСР новыми значениями в случае, если новые ПСР лучше старых базовых ПСР;

- останов процесса минимизации, если при очередном значении параметра k и всевозможных комбинациях номеров аргументов x_i , количество которых равно C_n^k , не выявлено ни одного случая улучшения ПСР.

В качестве ПСР были выбраны два независимых широкоупотребительных показателя сложности реализации ЛФ:

- S_{ad} – количество слагаемых в минимизированной форме ЛФ, т.е. количество конъюнкций, необходимых для формирования Q_i в (1);

- S_L – классический показатель сложности реализации ЛФ, представляющий собой сумму символов, входящих в формулу (1).

На множестве ЛФ с $n=3$ $L(3)$ проведен вычислительный эксперимент по анализу количества лучших вариантов ПСР как функции от выбранных параметров k , результаты которого представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Анализ множества ЛФ с $n=3$ (множество $L(3)$) на наличие улучшенных вариантов ПСР (показатель S_{ad})

Количество улучшенных ПСР для различных параметров k
--

$k=1 (x_3)$	$k=1 (x_2)$	$k=1 (x_1)$	$k=2 (x_3x_2)$	$k=2 (x_3x_1)$	$k=2 (x_2x_1)$
14	14	14	86	42	26

Таблиця 2

Анализ множества ЛФ с $n=3$ (множество $L(3)$) на наличие улучшенных вариантов ПСР (показатель S_L)

Количество улучшенных ПСР для различных параметров k					
$k=1 (x_3)$	$k=1 (x_2)$	$k=1 (x_1)$	$k=2 (x_3x_2)$	$k=2 (x_3x_1)$	$k=2 (x_2x_1)$
82	28	19	0	0	0

Анализ полученных в результате вычислительных экспериментов данных, которые представлены в табл. 1 и 2, показал, что:

- количество улучшенных вариантов ПСР (показатель S_{ad}) по сравнению с $k=0$ при $k=1$ составляет 16,5% (всего 42 из 256), при $k=2$ – 60,1% (154 из 256);
- количество улучшенных вариантов ПСР (показатель S_L) по сравнению с $k=0$ при

$k=1$ составляет 50,4% (129 из 256), при $k=2$ – 0% (0 из 256).

Дальнейшее исследование оптимальных параметров k для ОРФП – анализ множества ЛФ с $n=4$ $L(4)$.

На множестве ЛФ с $n=4$ $L(4)$ проведен вычислительный эксперимент по анализу наилучших вариантов ПСР как функции от выбранных параметров k , результаты которого представлены в табл. 3 и 4.

Таблиця 3

Анализ множества ЛФ с $n=4$ (множество $L(4)$) на наличие улучшенных вариантов ПСР (показатель S_{ad})

Количество улучшенных ПСР для различных параметров k													
$k=1 (x_4)$	$k=1 (x_3)$	$k=1 (x_2)$	$k=1 (x_1)$	$k=2 (x_4x_3)$	$k=2 (x_4x_2)$	$k=2 (x_4x_1)$	$k=2 (x_3x_2)$	$k=2 (x_3x_1)$	$k=2 (x_2x_1)$	$k=3 (x_4x_3x_2)$	$k=3 (x_4x_3x_1)$	$k=3 (x_4x_2x_1)$	$k=3 (x_3x_2x_1)$
26513	26521	26533	26543	2460	2460	1792	1828	43128	43128	28483	28483	28483	28483

Таблиця 4

Анализ множества ЛФ с $n=4$ (множество $L(4)$) на наличие улучшенных вариантов ПСР (показатель S_L)

Количество улучшенных ПСР для различных параметров k													
$k=1 (x_4)$	$k=1 (x_3)$	$k=1 (x_2)$	$k=1 (x_1)$	$k=2 (x_4x_3)$	$k=2 (x_4x_2)$	$k=2 (x_4x_1)$	$k=2 (x_3x_2)$	$k=2 (x_3x_1)$	$k=2 (x_2x_1)$	$k=3 (x_4x_3x_2)$	$k=3 (x_4x_3x_1)$	$k=3 (x_4x_2x_1)$	$k=3 (x_3x_2x_1)$
19072	19072	19072	19072	2368	2368	1456	1716	38712	38712	32822	32822	32822	32822

Анализ полученных в результате вычислительных экспериментов данных, которые представлены в табл. 3 и 4, показал, что:

- количество улучшенных вариантов ПСР (показатель S_{ad}) по сравнению с $k=0$ при $k=1$ составляет 0,3% (224 из 65536), при $k=2$ – 12,7% (8350 из 65536), при $k=3$ – 86% (56450 из 65536);
- количество улучшенных вариантов ПСР (показатель S_L) по сравнению с $k=0$ при $k=1$ составляет 0% (8 из 65536), при $k=2$ –

33% (21798 из 65536), при $k=3$ – 67% (43726 из 65536).

Процесс минимизации ЛФ в ОРФП иллюстрируется нижеприведенными примерами.

Пример 1. Задана ЛФ из множества $L(3)$ ($n=3$) с номером 195.

Определим ПСР заданной ЛФ для классического случая $k=0$ с помощью каталога минимальных форм MINFORM: $S_{ad}=2$. Примем этот показатель в качестве базового показателя, подлежащего улучшению.

Сравнение ПСР на каждом варианте выбора Q_i с базовыми ПСР показало, что оптимальным вариантом ПСР (показатель S_{ad}) является $S_{ad}=0$ при $k=2$ (x_3x_2).

Таким образом, получена минимальная форма ЛФ с номером 195 в ОРФП:

$$y_{195} = \bar{x}_3\bar{x}_2 + x_3x_2.$$

Минимизация заданной ЛФ с помощью карт Карно дала такой же результат (рис. 1).

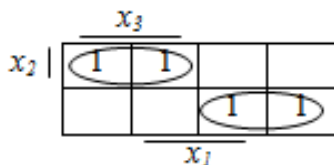


Рис. 1. Минимизация логической функции из множества $L(3)$ ($n=3$) с номером 195 с помощью карт Карно

Пример 2. Задана ЛФ из множества $L(4)$ ($n=4$) с номером 782.

Определим ПСР заданной ЛФ для классического случая $k=0$ с помощью каталога минимальных форм MINFORM: $S_{ad}=5$. Примем этот показатель в качестве базового показателя, подлежащего улучшению.

Сравнение ПСР на каждом варианте выбора Q_i с базовыми ПСР показало, что оптимальным вариантом ПСР (показатель S_{ad}) является $S_{ad}=1$ при $k=3$ ($x_4x_3x_2$).

Таким образом, получена минимальная форма ЛФ с номером 782 в ОРФП:

$$y_{782} = \bar{x}_4\bar{x}_3x_2 + \bar{x}_4\bar{x}_3x_1 + x_4\bar{x}_3\bar{x}_2.$$

Минимизация заданной ЛФ с помощью карт Карно дала такой же результат (рис. 2).

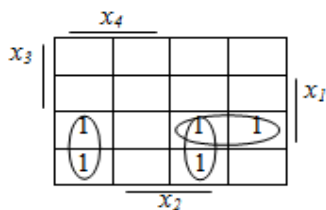


Рис. 2. Минимизация логической функции из множества $L(4)$ ($n=4$) с номером 782 с помощью карт Карно

Заключение. Проведенные исследования показали, что предложенный метод нахождения минимальной формы логических функций в ортогональной форме представления является эффективным при получении оптимальных показателей сложности реализации.

Список литературы

1. Кочкарев Ю. А. Возможности реализации логических функций в ортогональной форме представления / Ю. А. Кочкарев, Е. Н. Панаско, И. В. Синько // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2011. – № 1. – С. 45–49.
2. Классические и альтернативные минимальные формы логических функций : каталог-справочник / Кочкарев Ю. А., Казаринова Н. Л., Пантелеева Н. Н., Шакун С. А. – Черкассы : Изд-во ЧИУ, 1999 – 195 с.

References

1. Kochkarev, Ju. A., Panasko, E. N. and Sinko, I. V. (2011). Possibilities of implementing logic functions in orthogonal form of representation. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu*, (1), pp. 45–49. [in Russian]
2. Kochkarev, Ju. A., Kazarinova, N. L., Panteleeva, N. N. and Shakun, S. A. (1999) Classical and alternative minimum forms of logical functions: business directory. Cherkasy: CHIU, 195 p. [in Russian]