УДК 621.3.011.7

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Ключка К. М., *к.т.н., доцент кафедри електротехнічних систем*
Черкаський державний технологічний університет,
бул. Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006,
ux0cx@ukr.net

Анотація. *В статті розглянуто особливості застосування математичного опису у вигляді систем інтегро-диференціальних рівнянь з безпосереднім їх розв'язанням квадратурно-різницевим методом. Запропоновано методику щодо дослідження та проведення порівняльного аналізу завадостійкості моделей електричних кіл при їх чисельній реалізації у випадку дії завади різної частоти. Для оцінювання умов застосовності та визначення області переважного використання видів математичних моделей електричних кіл було досліджено помилки чисельних розв'язків у зіставних умовах, що відповідають умовам реального функціонування електричного кола.*

Ключові слова: *електричне коло, динамічні характеристики, інтегро-диференціальні рівняння, чисельні розв'язки.*

THE FEATURES OF THE USE OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR SIMULATION OF ELECTRIC CIRCUITS DYNAMICS

Klyuchka K. M., *Ph.D., associate professor of the Department of Electrical Systems*
Cherkasy State Technological University,
Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006,
ux0cx@ukr.net

Abstract. *In the article the features of the use of mathematical description in the form of systems of integro-differential equations with their direct solution by quadrature-difference method are considered. The method concerning the research and comparative analysis of noise immunity of electrical circuits models at their numerical implementation in the case of the interference of different frequencies is offered. To evaluate usability conditions and determine the field of predominant use of the types of mathematical models of electric circuits the errors of numerical solutions in comparable terms, corresponding to the conditions of real operation of electric circuit, are investigated.*

Keywords*: electric circuit, dynamic properties, integro-differential equations, numerical solutions.*

Вступ. Зростання складності задач аналізу динамічних процесів в електричних колах та розширення класу досліджуваних кіл зумовлює необхідність подальшого розвитку і вдосконалення методів математичного моделювання, розробки нових ефективних методів і засобів комп'ютерної реалізації математичних моделей електричних кіл. При цьому вимагають вирішення такі проблеми, як підвищення адекватності математичних моделей, зниження розмірності обчислювальних задач, покращення точності їх чисельної реалізації, створення нових чи модифікація існуючих алгоритмів моделювання.

Позитивний внесок у вирішення цих проблем для широкого кола прикладних задач електротехніки може бути зроблений шляхом використання інтегро-диференціальних рівнянь, що як моделі еквівалентні іншим можливим видам моделей. Багато задач моделювання електричних кіл, в яких разом з поточною динамікою необхідно враховувати передісторію енергетичного стану схеми, природним чином приводять до інтегро-диференціальних моделей.

Тому, проблема створення і реалізації достатньо повних і адекватних математичних моделей електричних кіл, зокрема у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь, є важливою, а розробка методів їх чисельної реалізації – необхідною для широкого кола прикладних задач моделювання динамічних процесів в електричних колах.

Постановка задачі. При дослідженні перехідних процесів в електричних колах в переважній більшості випадків розв'язок зводиться до вирішення задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь [1]. В роботах [2–4] показується можливість успішного використання для аналізу динаміки електрич-

них кіл інтегральних рівнянь Вольтерри. Якщо електричні кола містять елементи, різні за характером реактивності, то їх вихідні математичні моделі являють собою систему інтегро-диференціальних рівнянь високого порядку. При наявності в схемах керованих елементів, що працюють у ключових режимах, математична модель таких систем є дискретно-неперервною, в якій комутація ключових елементів приводить до зміни порядку та структури рівнянь системи відповідно до комутаційних періодів [5]. В подібних системах важливою є проблема вибору динамічної моделі, що найкращим чином відповідає поставленим вимогам у конкретних умовах функціонування. В таких випадках видається ефективним застосовувати математичний опис у вигляді системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з безпосереднім її розв'язанням. Це пов'язано з тим, що традиційний спосіб розв'язання систем інтегро-диференціальних рівнянь шляхом їх зведення до диференціальних пов'язаний зі збільшенням порядку вирішуваної системи, що є небажаним, особливо у разі нелінійної моделі. В той же час отримання розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь шляхом приведення її до системи інтегральних рівнянь, використовуючи еквівалентні перетворення, хоча й дозволяє використовувати ефективні швидкозбіжні методи розв'язання інтегральних рівнянь, що володіють високою стійкістю, проте вони є важко здійсненними через складність подібних еквівалентних перетворень.

Таким чином, **метою** цієї роботи є показати особливості моделювання динаміки електричних кіл на основі інтегро-диференціальних моделей з безпосереднім їх розв'язанням квадратурно-різницевими методами [5], а також дослідити вплив завад на точність чисельної реалізації цих моделей.

Отримання інтегро-диференціальних рівнянь електричних кіл. При застосуванні класичного методу розрахунку лінійних електричних кіл результуючими є інтегро-диференціальні рівняння, наприклад, рівняння для rLC-двополюсника:

$$ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)ds = u(t) - u(0). \quad (1)$$

Для отримання диференціальних рівнянь таких кіл необхідно або спеціальним чином підбирати шукані змінні, або диференціювати початкові залежності. Прямим узагальненням рівняння (1) є інтегро-диференціальні рівняння складного кола, отримані методом вузлових потенціалів [2]:

$$g_{\tilde{N}}\frac{dj(t)}{dt} + g_r j(t) + g_L\int_0^t j(s)ds = i(t) - i_L(0), \quad (2)$$

де g_C, g_r, g_L – відповідно матриці параметрів C, r і L; $I(t)$, $i_L(0)$, $j(0)$ – вектори, побудовані за заданими джерелами і початковими умовами.

У багатьох випадках ефективним для аналізу перехідних процесів виявляється використання саме апарату інтегро-диференціальних рівнянь, зокрема це дає змогу зменшити розмірність моделей, розширює клас чисельних методів, що використовуються, дозволяє отримати стійкі обчислювальні процедури. Крім того, інтегро-диференціальні моделі часто є природним способом опису нелінійних електричних ланцюгів. Наприклад, послідовний нелінійний коливальний контур з лінійних опору й ємності і нелінійної індуктивності з характеристикою $i(y)$, підключених до джерела напруги (рис. 1), описується інтегро-диференціальним рівнянням [6].

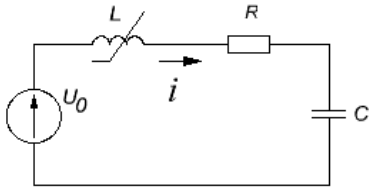

Рис. 1. Нелінійний коливальний контур

Дійсно, рівняння стану щодо потокозчеплення в індуктивності записується у вигляді

$$\frac{dy}{dt} = -Ri(y) + u_0 - \frac{1}{C}\int_0^t i(y)ds.$$

Апроксимуючи нелінійну функцію $i(y)$ поліномом третього степеня $i(y) = a_1 y + a_2 y^3$, отримуємо інтегро-диференціальне рівняння Вольтерри

$$\frac{dy}{dt} = -R(a_1 y + a_2 y^3) + u_0 - \frac{1}{C}\int_0^t (a_1 y + a_2 y^3)ds.$$

Використовуючи подібний підхід, що ґрунтується на безпосередньому використанні інтегро-диференціальних моделей, можна отримати значне спрощення математичної моделі при описі складних електричних ланцюгів, які містять велику кількість нелінійних елементів ємнісних та індуктивних, а також

ключових елементів зі складною логікою роботи, оскільки немає необхідності робити складні еквівалентні перетворення моделі кола до чисто диференціального чи інтегрального виду.

Дослідження впливу завад на точність реалізації моделей. Для ряду прикладних задач моделювання динаміки електричних кіл є можливість подання математичних моделей в еквівалентних формах (диференціальних, інтегральних і інтегро-диференціальних), тобто таких, що допускають отримання тієї або іншої математичної моделі методом еквівалентних перетворень. Відповідно аналітичні розв'язки, якщо їх можливо отримати, є однаковими для різних форм математичних моделей. Проте помилки чисельних розв'язків, навіть тих, що ґрунтуються на аналогічних методах, очевидно, різним чином залежать від рівня точності задання початкових даних і рівня та виду завад для різних форм математичних моделей. Тому для оцінки умов застосовності і визначення області *переважного використання* математичних моделей динамічних систем, що допускають їх подання в різних формах, необхідно дослідити помилки чисельних розв'язків у зіставних умовах, що відповідають умовам реального функціонування. Методика такого дослідження передбачає наступні кроки:

1. Отримання математичної моделі електротехнічного об'єкта, виходячи з фізичних законів функціонування або на основі експериментальних даних.
2. Подання отриманої математичної моделі в різних формах (диференціальній, інтегральній та інтегро-диференціальній) методами еквівалентних перетворень.
3. Задання параметрів умов реального функціонування електротехнічного об'єкта в однаковому вигляді для кожної з моделей.
4. Чисельна реалізація отриманих математичних моделей в однакових умовах функціонування і на основі одних і тих же чисельних методів.
5. Оцінка залежності точності розв'язання різних моделей при їх чисельній реалізації від параметрів умов функціонування.

За запропонованою методикою виконано дослідження і проведено порівняльний аналіз завадостійкості математичних моделей електротехнічних систем при їх чисельній реалізації у випадку дії завади різної частоти на прикладі типової лінійної моделі електротехнічної системи зі зворотним зв'язком.

Нехай електричне коло описується інтегро-диференціальним рівнянням

$$u_2''(t) + 2u_2'(t) + 175u_2(t) + \\ + 72\int_0^t e^{-10(t-s)} u_2'(s)ds = u_1(t), \qquad (3)$$

де $u_1(t)$, $u_2(t)$ – відповідно вхідна та вихідна напруга схеми.

Еквівалентне диференціальне рівняння має вигляд:

$$0,05u_2''(t) + 0,6u_2''(t) + 13,35u_2'(t) + \\ +87,5u_2(t) = 87,5g(t) + 8,75g'(t). \qquad (4)$$

Застосовуючи до останнього метод послідовного інтегрування, отримуємо еквівалентне інтегральне рівняння

$$u_2(t) + \int_0^t K(t-s)u_2(s)ds = f(t), \qquad (5)$$

де $K(t-s) = \dfrac{1}{0,05}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}a_i$,

$a = (0,6; 13,35;\ 87,5)$,

$$f(t) = \frac{1}{0,05}\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\left(87,5g(s) + 8,75g'(s)\right)ds.$$

Тут $u_1(t) = 175g(t)$ – вхідна напруга ($g(t)$ – одинична ступінчата функція), на яку накладена адитивна завада у вигляді гармонічного сигналу $u_{\sin}(t) = 0,05\sin(wt)$. При чисельних розрахунках ступінчата функція апроксимується функцією $e^{-0,02/t}$.

Розв'язання рівнянь здійснювалося за допомогою методів одного порядку точності.

На рис. 2 наведено отриману залежність помилки розв'язку від частоти завади. Середня помилка на всій смузі частот для інтегро-диференціальної моделі становить 0,0051, для диференціальної моделі – 0,0064 і для інтегральної – 0,0057.

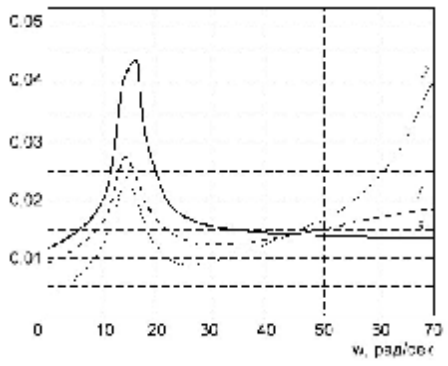

Рис. 2. Залежність помилки розв'язку від частоти завади для інтегро-диференціальної (1), диференціальної (2) та інтегральної (3) моделей

Якщо змінити частотні характеристики досліджуваної системи шляхом зменшення її коефіцієнта підсилення, то отримаємо залежність помилки розв'язку від частоти завади, що наведена на рис. 3.

Середня помилка на всій смузі частот для інтегро-диференціальної моделі становить 0,0125, для диференціальної моделі – 0,0121 і для інтегральної – 0,0132.

Подібний характер досліджувана залежність має і при зміні інших параметрів системи.

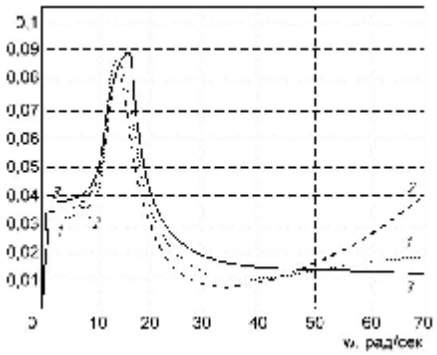

Рис. 3. Залежність помилки розв'язку від частоти завади для інтегро-диференціальної (1), диференціальної (2) та інтегральної (3) моделей

Висновок. Таким чином, проведені дослідження показали, що в ряді випадків використання інтегро-диференціальних рівнянь дозволяє отримувати більш точні результати чисельної реалізації динамічних моделей електричних кіл. Вибір тієї чи іншої математичної моделі значною мірою залежить від частоти збурювальної дії, що діє на систему. Очевидно, що в області низьких частот для цієї системи слід віддати перевагу диференціальній моделі. Проте зі зростанням частоти завади точність розв'язку за диференціальною моделлю зменшується, і більш доцільними є інтегральна й інтегро-диференціальна моделі. При цьому, якщо в області високих частот гладкість розв'язку за інтегральною моделлю виявляється значно вищою, то в області середніх частот очевидна перевага інтегро-диференціальної моделі.

Список літератури

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники / Л. А. Бессонов. – М. : Высш. шк., 1984. – 559 с.
2. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К. : Наукова думка, 1986. – 543 с.
3. Верлань А. Ф. Метод интегральных уравнений в задаче идентификации параметров электрических цепей / А. Ф. Верлань, К. Н. Ключка // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2011. – № 1. – С. 55–58.
4. Ключка К. М. Методи отримання інтегральних динамічних моделей електричних кіл / К. М. Ключка // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2009. – № 1. – С. 28–30.
5. Коротецкий Ю. Л. Применение квадратурно-разностных методов для численной реализации интегро-дифференциальной модели устройства регулирования питания / Ю. Л. Коротецкий, Д. Э. Контрерас, А. А. Сытник // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. – К., 2007. – В. 9. – С. 53–59.
6. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи / П. Н. Матханов. – М. : Высш. школа, 1977. – 272 с.

References

1. Bessonov, L. A. (1984) Theoretical fundamentals of electricity. Moscow: Vysshaya shkola, 559 p. [in Russian].
2. Verlan, A. F. & Sizikov, V. S. (1986) Integral equations: methods, algorithms, programs: Reference Handbook. Kyiv: Naukova Dumka, 543 p. [in Russian].
3. Verlan, A. F. & Klyuchka, K. N. (2011) The method of integral equations in the problem of parameter identification of circuits. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitety*, (1), pp. 55-58 [in Russian].
4. Klyuchka K. M. (2009) Methods for obtaining integral dynamic models of electric circuits. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitety*, (1), pp. 28-30 [in Ukrainian].
5. Korotetskiy Yu. L., Kontreras D. E., Sytnik A. A. (2007) The use of quadrature-difference methods for numerical implementation of integral-differential model of power control device // *Modelyuvannya ta informatsiyni tekhnolohiyi*: Proceedings of G. E. Pukhov IPME of NAS of Ukraine, Kyiv, (9), pp. 53-59 [in Russian].
6. Matkhanov P. N. (1977) Fundamentals of electric circuits analysis. Nonlinear circuits. Moscow: Vysshaya shkola, 272 p. [in Russian].