

Ж. В. Сотула, к.т.н.

Черкасский государственный технологический университет
б-р Шевченко, 460, г. Черкассы, 18006, Украина
janna-sotula@yandex.ru

РАСЧЕТ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ БИМОРФНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Сделан анализ известных расчетов характеристик и параметров акустического поля, созданного биморфными пьезоэлектрическими излучателями. Представлены общая постановка задач и анализ результатов решений некоторых частных случаев. Предложен новый подход к оценке параметров акустических полей осциллирующих дисков, которые широко применяются в качестве приемников и излучателей звука в электроакустике, гидроакустике, неразрушающем контроле, медицинской технике и в других областях. Новый подход заключается в том, что расчет акустического поля биморфного пьезоэлектрического излучателя рассматривается как самостоятельная задача прикладной акустики. Разработана общая схема решения этой задачи и обсуждаются результаты расчета параметров акустического поля биморфного пьезоэлектрического излучателя со свободным закреплением внешнего контура металлического диска. Предложена новая методика вычисления фазовых характеристик гармонических волн, которые формируются осциллирующим диском в окружающей среде. Дана оценка размера ближнего поля излучателя.

Ключевые слова: акустическое поле, биморфный дисковый пьезоэлектрический излучатель, ближнее поле.

Биморфные пьезоэлектрические преобразователи широко применяются в качестве приемников и излучателей звука в электроакустике, гидроакустике, неразрушающем контроле, медицинской технике и в других областях [1-5].

Расчет характеристик и параметров акустического поля, созданного биморфным пьезоэлектрическим излучателем, по своему содержанию соответствует определению акустического поля осциллирующего диска. Общая постановка этих задач и анализ результатов решения некоторых частных случаев достаточно подробно рассмотрены в статье [4]. Некоторые аспекты этих задач были рассмотрены также в фундаментальной работе [5].

К сожалению, воспользоваться представленными в работах [4, 5] результатами не представляется возможным, поскольку они моделируют ситуацию, когда аксиальные смещения материальных частиц поверхности осциллирующего диска имеют одинаковые значения. Между тем, аксиальные смещения элементов поверхности биморфного пьезоэлектрического излучателя изменяются весьма существенным образом при перемещении от центра к контуру закрепления диска [6]. При этом формы колеблющейся поверхности на различных частотах существенно отличаются друг от друга. Помимо

этого, необходимо добавить, что весьма остроумные общие постановки задачи о поле осциллирующего диска [4] принципиально не в состоянии обеспечить замкнутого решения задачи об акустическом поле биморфного излучателя со свободным (абсолютно податливым) закреплением внешнего контура металлического диска.

Эти обстоятельства заставляют рассматривать расчет акустического поля биморфного пьезоэлектрического излучателя как самостоятельную задачу прикладной акустики.

Целью настоящей работы является разработка общей схемы решения задачи и обсуждение результатов расчета параметров акустического поля биморфного пьезоэлектрического излучателя со свободным закреплением внешнего контура металлического диска.

Предположим, что аксиальные смещения $w(r)e^{i\omega t}$ ($w(r)$ – амплитудное значение аксиального смещения; $i = \sqrt{-1}$; ω – круговая частота; t – время) рабочей поверхности биморфного пьезоэлектрического преобразователя (позиция 1 на рис. 1) не зависят от значений окружной координаты

φ . Будем полагать, что излучение акустического поля осуществляется в полупространство $x_3 > 0$. Нулевая точка декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) и сопряженной с ней сферической системы координат (ϑ, φ, r) находится в центре, на поверхности колеблющегося диска.

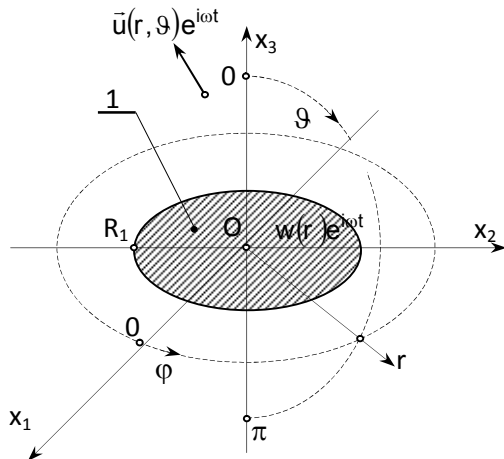


Рис. 1. К постановке задачи о расчете акустического поля биморфного излучателя

Введем потенциал $\Phi(\vartheta, r)e^{i\omega t}$ поля смещений материальных частиц полупространства, в которое осуществляется излучение акустических волн, амплитудное значение которого $\Phi(\vartheta, r)$ определяет амплитудное значение $\vec{u}(\vartheta, r)$ вектора смещения следующим образом:

$$\vec{u}(\vartheta, r) = \text{grad } \Phi(\vartheta, r). \quad (1)$$

В объеме полупространства потенциал $\Phi(\vartheta, r)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \Phi(\vartheta, r) + k^2 \Phi(\vartheta, r) = 0, \quad (2)$$

где $k = \omega/v$ – волновое число;

v – скорость распространения звука в среде.

Решение уравнения (2) должно обеспечивать выполнение следующего условия:

$$\text{Re } u_{\vartheta}(\pi/2, r) = \text{Re } w(r), \quad (3)$$

где $\text{Re } u_{\vartheta}(\pi/2, r)$ – действительная часть комплексной амплитуды полярного компонента вектора смещения материальных частиц среды на поверхности $\vartheta = \pi/2$ колеблющегося диска;

$\text{Re } w(r)$ – действительная часть амплитудного значения аксиального смещения поверхности биморфного излучателя.

В случае осевой симметрии акустического поля уравнение Гельмгольца (2) в сферической системе координат записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Phi(\vartheta, r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi(\vartheta, r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi(\vartheta, r)}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg } \vartheta \frac{\partial \Phi(\vartheta, r)}{\partial \vartheta} \right] + k^2 \Phi(\vartheta, r) = 0 \quad (4)$$

Уравнение (4) решается с помощью метода разделения переменных, в соответствии с которым искомое решение $\Phi(\vartheta, r)$ представляется в виде произведений двух функций, т.е.

$$\Phi(\vartheta, r) = T(\vartheta)R(r), \quad (5)$$

где функция $T(\vartheta)$ зависит только от полярного угла ϑ , а функция $R(r)$ – только от радиальной координаты r .

После подстановки выражения (5) в уравнение (4) получаем

$$T(\vartheta)FR(r) + \frac{R(r)}{r^2}FT(\vartheta) = 0, \quad (6)$$

где

$$FR(r) = \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + k^2 R(r);$$

$$FT(\vartheta) = \frac{\partial^2 T(\vartheta)}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg } \vartheta \frac{\partial T(\vartheta)}{\partial \vartheta}.$$

Рассмотрим функцию $FT(\vartheta)$ и попытаемся с помощью эквивалентных преобразований исключить из её описания производные функции $T(\vartheta)$.

Переходя к новой переменной $\xi = \cos \vartheta$, выражение для функции $FT(\vartheta)$ можно записать в следующем виде:

$$FT(\vartheta) = - \left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial^2 T(\vartheta)}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial T(\vartheta)}{\partial \xi} \right]. \quad (7)$$

Внутри квадратной скобки выражения (7) добавим и вычтем произведение

$\nu(\nu + 1)T(\vartheta)$, где $\nu = 0, 1, 2, \dots$ – элемент ряда натуральных чисел. При этом выражение (7) принимает следующий вид:

$$FT(\vartheta) = - \left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial^2 T(\vartheta)}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial T(\vartheta)}{\partial \xi} - \nu(\nu + 1)T(\vartheta) \right]. \quad (8)$$

Если предположить, что $T(\vartheta) = P_\nu(\xi)$, где $P_\nu(\xi)$ – функция Лежандра первого рода степени ν [4], то квадратная скобка в выражении (8) обращается в нуль. Очевидно, что линейная комбинация функций Лежандра, т.е.

$$T(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu P_\nu(\xi), \quad (9)$$

где C_ν – константы, также обращает в нуль квадратную скобку в формуле (8).

Из сказанного выше следует, что

$$FT(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} FT_\nu(\vartheta) = - \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu + 1) C_\nu P_\nu(\xi). \quad (10)$$

Совершенно ясно, что в представлении (5) каждой функции $T_\nu(\vartheta) = C_\nu P_\nu(\xi)$ должна соответствовать своя функция $R_\nu(r)$. При этом выражение (5) следует записать в виде

$$\Phi(\vartheta, r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu R_\nu(\xi) P_\nu(\xi). \quad (11)$$

Уравнение (6) при этом необходимо записать в следующем виде:

$$T_\nu(\vartheta) F R_\nu(r) + \frac{R_\nu(r)}{r^2} F T_\nu(\vartheta) = 0,$$

откуда следует, что

$$C_\nu P_\nu(\xi) \left\{ \frac{\partial^2 R_\nu(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R_\nu(r)}{\partial r} + \left[k^2 - \frac{\nu(\nu + 1)}{r^2} \right] R_\nu(r) \right\} = 0. \quad (12)$$

Полагая $C_\nu P_\nu(\xi) \neq 0$ из равенства (12), получаем уравнение функции радиальной координаты

$$x^2 \frac{\partial^2 R_\nu(x)}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial R_\nu(x)}{\partial x} + [x^2 - \nu(\nu + 1)] R_\nu(x) = 0, \quad (13)$$

где $x = kr$ – безразмерная радиальная координата.

Подстановкой

$$R_\nu(x) = x^{-1/2} U_\nu(x), \quad (14)$$

где $U_\nu(x)$ – новая функция безразмерной координаты x , уравнение (13) приводится к стандартному уравнению Бесселя относительно функции $U_\nu(x)$:

$$x^2 \frac{\partial^2 U_\nu(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial U_\nu(x)}{\partial x} + [x^2 - (\nu + 1/2)^2] U_\nu(x) = 0. \quad (15)$$

При выбранной зависимости от времени $e^{i\omega t}$ радиальная составляющая $U_\nu(x)$ скалярного потенциала $\Phi(\vartheta, r)$ определяется следующим решением уравнения (15):

$$U_\nu(x) = B_\nu H_{\nu+1/2}^{(2)}(x), \quad (16)$$

где B_ν – константа; $H_{\nu+1/2}^{(2)}(x)$ – функция Ханкеля второго рода полуцелого порядка.

Подставляя выражение (16) в определение (14), а полученный результат – в представление (11), можно записать, что

$$\Phi(\vartheta, r) = x^{-1/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu H_{\nu+1/2}^{(2)}(x) P_\nu(\xi), \quad (17)$$

где $A_\nu = B_\nu C_\nu$.

Полярный компонент $u_\vartheta(\vartheta, r)$ вектора смещения материальных частиц среды в акустическом поле дискового излучателя определяется в соответствии с общим выражением (1) следующим образом:

$$u_\vartheta(\vartheta, r) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(\vartheta, r)}{\partial \vartheta} = -k \sin \vartheta x^{-3/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu H_{\nu+1/2}^{(2)}(x) \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \xi}. \quad (18)$$

Поскольку $\partial P_0(\xi)/\partial \xi \equiv 0$, постольку выражение (18) необходимо переписать в следующем виде:

$$u_\vartheta(\vartheta, r) = -k \sin \vartheta x^{-3/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu H_{\nu+1/2}^{(2)}(x) \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \xi}. \quad (19)$$

Производная функции Лежандра $P_\nu(\xi)$ определяется рекуррентным соотношением следующего вида [7]:

$$\frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\nu}{\xi^2 - 1} [\xi P_\nu(\xi) - P_{\nu-1}(\xi)].$$

При $\xi = 0$ ($\vartheta = \pi/2$) эта производная принимает следующее значение:

$$\left. \frac{\partial P_v(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = v P_{v-1}(0). \quad (20)$$

Если $v - 1 = 2n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, то

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P_{2n+1}(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} &= (2n+1)P_{2n}(0) = \\ &= (2n+1)(-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Если показатель степени v функции Лежандра $P_v(\xi)$ является четным числом, то её первая производная при $\xi = 0$ равна нулю.

Таким образом, только нечетные значения значка v создают принципиальную возможность для выполнения граничных условий (3). С учетом этого обстоятельства перепишем выражение (17) в следующем виде:

$$\Phi(\vartheta, r) = x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} H_{2n+3/2}^{(2)}(x) P_{2n+1}(\xi) \quad (22)$$

При этом граничное условие (3) записывается в виде

$$\begin{aligned} -k x^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} J_{2n+3/2}(x) (2n+1)(-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} - \\ - \operatorname{Re} w(r) = 0 \quad \forall r \leq R_1 \end{aligned} \quad (23)$$

где $J_{2n+3/2}(x) = \operatorname{Re} H_{2n+3/2}^{(2)}(x)$ – функция Бесселя полуцелого порядка.

Из уравнения (23) точно определяется лишь один коэффициент A_1 . Действительно, при $x = 0$ ($r = 0$) из уравнения (23) следует, что

$$-k A_1 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{J_{3/2}(x)}{x^{3/2}} \right] = \operatorname{Re} w(0). \quad (24)$$

Функция Бесселя $J_{3/2}(x)$ определяется формулами Рэлея [4] в следующем виде:

$$J_{3/2}(x) = x^{1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\sin x - x \cos x)}{x^2}.$$

При этом

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{J_{3/2}(x)}{x^{3/2}} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \right] = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Подставляя последний результат в равенство (24), получаем следующее определение коэффициента A_1 :

$$A_1 = -\frac{3}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re} w(0). \quad (25)$$

Из формулы (25) следует, что при $k \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$) коэффициент A_1 неограниченно возрастает по абсолютной величине. Поскольку аналитические свойства коэффициентов A_{2n+1} в разложении (23) одинаковы, постольку можно утверждать, что по мере уменьшения частоты смены знака направления движения элементов поверхности осциллирующего диска все коэффициенты A_{2n+1} возрастают по абсолютной величине. В пределе, при $\omega \rightarrow 0$, возникает сингулярность типа $1/0$.

Очевидно, что из равенства (23) невозможно точно определить коэффициенты A_{2n+1} при $n > 0$. Анализируя ситуацию с позиции выполнения технических расчетов, можно прийти к выводу, что знание точных значений всех без исключения коэффициентов A_{2n+1} вовсе не обязательно. Действительно, если ряд (22) сходится, а он должен быть сходящимся по своему физическому содержанию, то количественные оценки потенциала $\Phi(\vartheta, r)$ формируются первыми N членами этого ряда. Число N суммируемых членов ряда (22) определяется заданной погрешностью вычислений.

Первые N коэффициентов A_{2n+1} надежно и эффективно определяются с помощью метода коллокаций [8]. Суть этого метода чрезвычайно проста. На радиальной оси, которая находится в плоскости колеблющегося диска, фиксируется N точек, расстояния между которыми, вообще говоря, должны отличаться друг от друга. Координаты этих точек обозначим символами $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_N$. Точка r_1 не должна находиться в центре диска. Положение точки r_N определяется способом закрепления внешнего контура осциллирующего диска. При шарнирном и жестком закреплении этого контура координата $r_N < R_1$. В случае свободного закрепления внешнего кон-

тура осциллирующего диска точка r_N должна находиться на границе диска, т.е. на окружности $r = R_1$. Обозначая $x_m = kr_m$ и оставляя в сумме (23) первые $N + 1$ слагаемых, запишем равенство (23) для каждой из точек коллокации, т.е. для каждой точки с координатой r_m :

$$\begin{aligned} & A_3 J_{2+3/2}(x_1)(2+1)P_2(0) + A_5 J_{4+3/2}(x_1)(4+1)P_4(0) + \\ & + \dots + A_{2m+1} J_{2m+3/2}(x_1)(2m+1)P_{2m}(0) + \\ & + \dots + A_{2N+1} J_{2N+3/2}(x_1)(2N+1)P_{2N}(0) = \\ & = -\frac{x_1^{3/2}}{k} \operatorname{Re} w(r_1) - A_1 J_{3/2}(x_1), \\ & A_3 J_{2+3/2}(x_2)(2+1)P_2(0) + A_5 J_{4+3/2}(x_2)(4+1)P_4(0) + \\ & + \dots + A_{2m+1} J_{2m+3/2}(x_2)(2m+1)P_{2m}(0) + \\ & + \dots + A_{2N+1} J_{2N+3/2}(x_2)(2N+1)P_{2N}(0) = \\ & = -\frac{x_2^{3/2}}{k} \operatorname{Re} w(r_2) - A_1 J_{3/2}(x_2), \\ & A_3 J_{2+3/2}(x_N)(2+1)P_2(0) + A_5 J_{4+3/2}(x_N)(4+1)P_4(0) + \\ & + \dots + A_{2m+1} J_{2m+3/2}(x_N)(2m+1)P_{2m}(0) + \\ & + \dots + A_{2N+1} J_{2N+3/2}(x_N)(2N+1)P_{2N}(0) = \\ & = -\frac{x_N^{3/2}}{k} \operatorname{Re} w(r_N) - A_1 J_{3/2}(x_N), \end{aligned} \quad (26)$$

где константа A_1 определена соотношением (25).

В неоднородной системе алгебраических уравнений (26) содержится N уравнений и ровно N искомых констант $A_3, A_5, \dots, A_{2m+1}, \dots, A_{2N+1}$. Указанная неоднородная система уравнений решается относительно искомых констант единственным образом.

После определения первых $2N+1$ констант разложения (22) скалярного потенциала по сферическим гармоникам можно утверждать, что задача об акустическом поле осциллирующего диска формально полностью решена.

Выводы:

1. Предложен новый подход к оценке параметров и характеристик акустических полей осциллирующих дисков.

2. Предложена новая методика вычисления фазовых характеристик гармонических волн, которые формируются осциллирующим диском в окружающей среде. Дана оценка размера ближнего поля излучателя.

Список литературы

1. Шарапов В. М. Пьезоэлектрические датчики / Шарапов В. М., Мусиенко М. П., Шарапова Е. В. ; под ред. В. М. Шарапова. – М. : Техносфера, 2006. – 632 с.
2. Электроакустические преобразователи / Шарапов В. М., Минаев И. Г., Сотула Ж. В., Куницкая Л. Г. ; под ред. В. М. Шарапова. – М. : Техносфера, 2013. – 296 с.
3. Шульга Н. А. Колебания дискового биморфного преобразователя типа металл – пьезокерамика / Н. А. Шульга, В. М. Шарапов, С. И. Рудницкий // Прикладная механика. – 1990. – Т. 26, №10. – С. 64–72.
4. Вовк И. В. Новый подход к оценке акустических свойств излучателя в виде диска / И. В. Вовк, В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура // Акустичний вісник. – 2008. – Т. 11, вип. 3. – С. 13–26.
5. Гринченко В. Т. Основы акустики / Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацыпура В. Т. – К. : Наукова думка, 2007. – 640 с.
6. Петрищев О. Н. Исследование параметров динамического напряженно-деформированного состояния асимметричных биморфных пьезокерамических элементов при различных способах закрепления внешнего контура металлического диска / О. Н. Петрищев, В. М. Шарапов, Ж. В. Сотула // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2013. – № 3. – С. 48–55.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / [под ред. М. Абрамовица и И. Стиган]. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
8. Математическая энциклопедия. Том 2 Д – Коо. – М. : Советская энциклопедия, 1979. – Ст. 951–952.

References

1. Sharapov, V. M., Musienko, M. P. and Sharapova, E. V. (2006) Piezoelectric sensors. In: V. M. Sharapov (Ed.). Moscow: Technosphere, 632 p. [in Russian].
2. Sharapov, V. M., Minayev, I. G., Sotula, Zh. V. and Kunitskaya, L. G. (2013) Electroacoustic converters. In: V. M. Sharapov (Ed.). Moscow: Technosphere, 296 p. [in Russian].

3. Shulga, N. A., Sharapov, V. M. and Rudnicki, S. I. (1990) Oscillations of bimorph disk converter of metal – piezoceramics type. *Prikladnaya mekhanika*, Vol. 26, № 10, pp. 64-72. [in Russian].
4. Vovk, I. V., Hrinchenko, V. T. and Matsypura, V. T. (2008) A new approach to the assessment of acoustic properties of the emitter in the form of a disk. *Acustychnyi visnyk*, Vol. 11, (3), pp. 13-26 [in Russian].
5. Grinchenko, V. T., Vovk, I. V. and Matsypura, V. T. (2007) Fundamentals of acoustics. Kiev: Naukova dumka, 640 p. [in Ukrainian].
6. Petrishchev, O. N., Sharapov, V. M. and Sotula, Zh. V. (2013) The investigation of parameters of dynamic stress-strained state of asymmetric bimorph piezoceramic elements for different methods of fixing of outer contour of metal disc. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu*, (3), pp. 48-55 [in Russian].
7. Handbook on special functions with formulas, graphs, and mathematical tables (1979) In: M. Abramowitz and I. Stegun (Ed.). Moscow: Nauka, 832 p. [in Russian].
8. Mathematical encyclopaedia (1979) Volume 2 D – Koo. Moscow: Soviet Encyclopedia, art. 951-952 [in Russian].

Стаття надійшла до редакції 29.01.2014.

Zh. V. Sotula, Ph.D.

Cherkasy State Technological University
Schevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine
janna-sotula@yandex.ru

THE CALCULATION OF ACOUSTIC FIELD OF BIMORPH PIEZOELECTRIC TRANSDUCER

The known calculations of characteristics and parameters of acoustic field created by means of bimorph piezoelectric transducers are analyzed. A general statement of objectives and the analysis of solutions of some special cases are shown. A new approach to the estimation of parameters of acoustic fields of oscillating disks, which are widely used as sound receivers and transmitters in electroacoustics, hydroacoustics, non-destructive testing, medical technology and other areas, is offered. This approach consists in the following: the calculation of acoustic field of bimorph piezoelectric transducer is considered as an independent task of applied acoustics. A general scheme for solving this problem is developed and the results of the calculation of parameters of acoustic field for bimorph piezoelectric transducer with free fixing of outer contour of metal disk are discussed. A new technique for calculating of phase characteristics of harmonic waves which are generated by an oscillating disc in the environment is offered. The size of transducer near-field is estimated.

Keywords: *acoustic field, bimorph disc piezoelectric transducer, near-field.*