

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ ПРОЕКТАМИ

УДК 681.51

**С. Ю. Протасов**, к.т.н., доцент

Черкаський державний технологічний університет

б-р Шевченко, 460, г. Черкаси, 18006, Україна

[protasov\\_sergey@mail.ru](mailto:protasov_sergey@mail.ru)

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВЯЗИ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ДРОБНОГО ИНЕРЦИОННОГО ЗВЕНА И ЭЛЕМЕНТОВ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

*Статья посвящена вопросам определения связи соответствия параметров дробного звена и параметров длинной линии, имеющей распределенные индуктивность, омическое сопротивление, емкость и поперечную проводимость. Так как число параметров длинной линии может вдвое превышать число параметров дробного звена, рассматривается вариант, когда эквивалентный длинной линии элемент зависит от двух элементов дробного порядка со своими параметрами. Представляется нахождение эквивалента линии без искажений и дробного звена, одним из параметров которого является коэффициент усиления. Показано возможность использования разработанного метода как типового алгоритма компьютерной имитации элементов динамических систем с распределенными параметрами.*

**Ключевые слова:** дробное звено, длинная линия, передаточная функция, преобразование Лапласа.

**Постановка проблемы.** В последние годы интенсивно разрабатываются и находят все более широкое применение методы неразрушающего контроля технических изделий на базе эффектов нелинейности, инерционности и флуктуирования их физических параметров [1–3]. На основе этих методов можно определять диагностические параметры и признаки физического состояния изделий. К таким методам неразрушающего контроля, выполненным на основе подачи специальных испытательных сигналов, относятся методы интегральной диагностики, базирующиеся на расчете параметров динамических моделей непрерывных объектов.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Для целей диагностики используют два вида переходных характеристик – переходная (получаемая при подаче на вход объекта тестового сигнала в форме единичного скачка) и импульсная переходная (при подаче сигнала типа дельта-функции) [4]. Предпочтительной является переходная характеристика ввиду ее практической доступности. Известен целый ряд различных тепловых, электромагнитных объектов и устройств, пе-

редаточные функции которых содержат  $\sqrt{s}$  в дробно-рациональной и экспоненциальной зависимостях. В частности, к числу таких объектов относятся RC-объекты [5, 6].

В работе [1] переходная характеристика дробного инерционного звена рассматривается как физическая интерпретация неполной гамма-функции и предложены два подхода к ее численной реализации. Во втором из них предполагается реализация дробно-рациональной передаточной функции. Однако при этих подходах обходится задача определения связи между параметрами дробного звена и соответствующего ему элемента с распределенными параметрами.

**Цель статьи** – разработка метода определения связи между параметрами дробного инерционного звена и элементов длинных линий.

**Изложение основного материала.** Рассмотрим задачу отыскания связи как соответствия параметров дробного звена и параметров длинной линии, имеющей распределенные индуктивность, омическое сопротивление, емкость и поперечную проводимость,

соответственно равные  $l, r, c, g$  единицам на единицу длины линии. Имеем уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + l \frac{\partial i}{\partial t} + ri &= 0, \\ \frac{\partial i}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial t} + gv &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ввиду того, что число параметров длинной линии вдвое превышает число параметров дробного звена, можно рассмотреть вариант, когда эквивалентный длинной линии элемент зависит от двух элементов дробного порядка со своими параметрами. Поэтому можно считать, что уравнениям (1) соответствуют функции

$$\begin{aligned} \Psi_{i1}(\Psi_{i1}(v_{11}, p_{11}), \\ \Psi_{i2}(\varphi_{f1}(v_{11}, p_{11}, v_{f1}, p_{f1}), \\ \varphi_{f2}(v_{11}, p_{11}, v_{f2}, p_{f2})) = 0, \quad s = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

где функции  $\Psi_{i2}$  определяют вклад в соответствующее уравнение (2) эквивалентирующих звеньев дробного порядка (аргументами  $\Psi_{i1}, \Psi_{i2}, \varphi_{f1}, \varphi_{f2}$  являются переменные  $v_{11} = [u \ v]^T$  и параметры  $p_{11} = [r \ l \ c \ g]^T$  длинной линии и переменные  $v_{f1}, v_{f2}$  и параметры  $p_{f1} = [r_{f1} \ d_{f1}]^T, p_{f2} = [r_{f2} \ d_{f2}]^T$  первого и второго звена дробного порядка). Применив преобразование Лапласа, из (1) и (2) получим уравнения эквивалентирования в виде

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} + (ls+r)I - \Psi_{12} &= 0, \\ \frac{dI}{dx} + (cs+g)V - \Psi_{22} &= 0, \\ \frac{d^2V}{dx^2} - q^2V + \frac{d\Psi_{12}}{dV}(ls+r)I + \frac{d\Psi_{12}}{dI}(cs+g)V &= 0, \\ \frac{d^2I}{dx^2} - q^2I + \frac{d\Psi_{22}}{dV}(ls+r)I + \frac{d\Psi_{22}}{dI}(cs+g)V &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $q^2 = (r + ls)(g + cs)$ .

Однако более простым представляется нахождение эквивалента линии без искажений и дробного звена, одним из параметров которого является коэффициент усиления  $a_f$ . Передаточная функция линии в этом случае определена выражением

$$W(s, L) = 1 / \text{ch}qL, q^2 = (r + ls)(g + cs), \quad (4)$$

причем параметры линии связаны соотношением  $lg = cr$  [7], в силу чего  $q = s + r / l = s + g / c$ .

Для дробного звена с коэффициентом усиления  $a_f$  уравнение эквивалентирования в комплексной плоскости примет вид:

$$\frac{1}{\text{ch}qL} - \frac{a_f}{(Ts + 1)^d} = 0, \quad (5)$$

или во временной области (используя обратное преобразование Лапласа для вычитаемого в (5)):

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\text{ch}qL} \right\} - \frac{a_f T^d}{\Gamma(d)} t^{d-1} e^{-t/T} = 0. \quad (6)$$

Соотношение (5) запишем в виде

$$(Ts + 1)^d / a_f = \text{ch}(qL). \quad (7)$$

Положив  $s = \alpha + j\omega$  и записывая переменные в (7) в тригонометрической форме, получим:

$$(Ts + 1)^d / a_f = A^d (\cos(j_{fd}) + j \sin(j_{fd})) / a_f, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(Ta + 1)^2 + (Tw)^2}, \\ j_f &= \arctg Tw / (Ta + 1), \\ j_{fd} &= (j_f + 2kp)m / n, \\ (m + 1) / n^3 d^3 (m - 1) / n, \quad k &= 0, 1, \dots, n - 1, \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} \text{ch}(qL) &= \text{ch}(L(a + r / l)) \cos(wL) + \\ &+ \text{jsh}(L(a + r / l)) \sin(wL). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (8), (10) получаем уравнения эквивалентирования в виде:

$$A^d \cos(j_{fd}) / a_f = \text{ch}(L(a + r / l)) \cos(wL), \quad (11)$$

$$A^d \sin(j_{fd}) / a_f = \text{sh}(L(a + r / l)) \sin(wL). \quad (12)$$

Из (11), (12) получим:

$$\text{tg}(j_{fd}) = \text{th}(L(a + r / l)) \text{tg}(wL). \quad (13)$$

Соотношения (9)–(13) определяют точные значения параметров  $a_f, d$  и  $T$  только при знаке равенства в аппроксимации  $d$  рациональной дробью в (9).

Рассматривая класс дробных звеньев с рациональным показателем  $d = m/n$ , можно в этом случае по (9)–(13) найти связь параметров  $a_f$  и  $T$  с параметрами соответствующей длинной линии. Так, для полуинерционного звена ( $d = 1/2$ ) из (11)–(13) при  $s \rightarrow 0$  получим:

$$T = L \text{th}(Lr / l), a_f = 1 / \text{ch}(Lr / l). \quad (14)$$

При произвольном показателе  $d$  из (5) условие эквивалентирования принимает вид:

$$a_j ch(qh) = e^{d \ln(Ts+1)}.$$

**Вывод.** Таким образом, в данной статье предложено новый метод определения связи между параметрами дробного инерционного звена и элементов длинных линий. Полученные результаты, иллюстрируют возможность рассматривать дробное инерционное звено как типовой алгоритм компьютерной имитации элементов динамических систем с распределенными параметрами.

#### Список литературы

1. Шевелёв А. Г. Основы линейной теории нестационарных систем автоматического управления / А. Г. Шевелёв ; М-во образ. и науки Украины НАУ. – К. : Изд-во НАУ, 2004. – 265 с.
2. Солодовников В. В. Теория автоматического управления техническими системами / Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1993. – 492 с.
3. Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез / Г. Д'Анжело. – М. : Машиностроение, 1974. – 288 с.
4. Протасов С. Ю. Динамические характеристики линейных объектов с переменными параметрами / С. Ю. Протасов // Моделирование та інформаційні технології : зб. наук. праць ; ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. – К., 2010. – № 56. – С. 64–71.
5. Остапенко Ю. О. Идентификация і моделювання технологічних об'єктів керування / Ю. О. Остапенко. – К. : Задруга, 1999. – 420 с.

6. Федоткин И. М. Математическое моделирование, теория технологических процессов и их идентификации / И. М. Федоткин, И. С. Гулый. – К. : Арктур-А, 1998. – 416 с.
7. Носов Г. В. Компьютерное исследование длинных линий и электромагнитного поля : учеб. пособие / Носов Г. В., Мakenова Н. А., Канев Ф. Ю. – Томск : Изд-во Томского политех. ун-та, 2009. – 100 с.

#### References

1. Shevelev, A. G. (2004) Fundamentals of linear theory of time-varying systems of automatic control. Kyiv: Izd-vo NAU, 265 p. [in Russian].
2. Solodovnikov, V. V., Plotnikov, V. N. and Yakovlev, A. V. (1993) The theory of automatic control by engineering systems. Moscow: Izd-vo MGTU im. N. E. Bauman, 492 p. [in Russian].
3. D'Angelo, G. (1974) Linear systems with variable parameters. Analysis and synthesis. Moscow: Mashinostroenie, 288 p. [in Russian].
4. Protasov, S. Yu. (2010) Dynamic characteristics of linear objects with variable parameters. *Modelyuvannya ta informaciyi tehnologii: proceedings of G. E. Pukhov IPME, NAS of Ukraine*. Kyiv, (56), pp. 64–71 [in Russian].
5. Ostapenko, Yu. O. (1999) Identification and modelling of technological control objects. Kyiv: Zadruga, 420 p. [in Ukrainian].
6. Fedotkin, I. M. and Gulyi, I. S. (1998) Mathematical modelling, theory of technological processes and their identification. Kyiv: Arktur-A, 416 p. [in Russian].
7. Nosov, G. V., Makenova, N. A. and Kaney, F. Yu. (2009) Computer investigation of long lines and electromagnetic field. Tomsk: Izd-vo Tomskogo politeh. un-ta, 100 p. [in Russian].

**S. Yu. Protasov**, *Ph.D, associate professor*  
Cherkasy State Technological University  
Shevchenko Blvd., 460, Cherkasy, 18006, Ukraine  
[protasov\\_servey@mail.ru](mailto:protasov_servey@mail.ru)

#### THE METHOD FOR DETERMINING THE CONNECTION BETWEEN PARAMETERS OF FRACTIONAL INERTIAL LINK AND ELEMENTS OF LONG LINES

*Last years methods of non-destructive control of technical wares on the base of effects of non-linearity, inertance and fluctuating of their physical parameters are intensively developed and find a*

*more wide use. On the basis of these methods it is possible to determine diagnostic parameters and signs of physical condition of wares. To such methods of non-destructive control, executed on the basis of injection of special test signals, the methods of integral diagnostics, based on the calculation of parameters of dynamic models of continuous objects, are referred.*

*The aim of the article is to develop the method for determining of the connection between parameters of fractional link and elements of long line having distributed inductance, ohmic resistance, capacitance and transverse conductivity. Since the number of parameters of long line can double the number of parameters of fractional link, an option is considered when equivalent to long line element depends on two elements of fractional order with their parameters. Finding of the equivalent of a line without distortions and fractional link, one of parameters of which is the gain, is shown. The possibility of using of developed method as a typical computer simulation algorithm of elements of dynamic systems with distributed parameters is considered.*

**Keywords:** *fractional link, long line, transfer function, Laplace transform.*

*Стаття надійшла до редакції 27.10.2014.*

*Рецензенти:* Палагін В. В., д.т.н., професор,  
Мусієнко М. П., д.т.н., професор.