

А. А. Тимченко, *д.т.н., професор\**  
Черкаський державний технологічний університет  
б-р Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006, Україна

## СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ ТА МОДЕЛЕЙ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКІВ І ВЗАЄМОДІЙ. ЛІНІЙНІ СТАТИЧНІ СИСТЕМИ

*Розглядається підхід до створення свого роду мови спілкування дослідника технічних систем з ЕОМ з наступним використанням т.зв. стандартизованого математичного (матричного) опису взаємозв'язків, який дозволяє формувати моделі лінійних статичних систем. При цьому використовується апарат теорії графів потоків сигналів.*

**Ключові слова:** елемент, система, модель, задача, граф потоків сигналів, системний аналіз та системний підхід.

**Вступ. Витоки задачі та структурного підходу.** Зробимо деякий історичний екскурс з позицій системного аналізу до розгляду класичної технологічної послідовності наукового дослідження [1, 2]:

<синтез> → <аналіз> → <прийняття рішень>.

Система як об'єкт системного дослідження. Розглянемо технологію створення та дослідження систем як мережу зв'язаних елементів, де мережа зв'язків визначається як структура. Як відомо, на етапі створення систем з використанням фундаментальних законів фізики, механіки, електротехніки, електроніки та інших наук використовуються результати базових винаходів та експериментальних досліджень об'єктів. Наприклад, така практика існує при створенні т.зв. об'єктів автономного функціонування – ОАФ (транспортних засобів, роботоподібних систем, технологічних та енергетичних комплексів, можливих віртуальних структур та ін.).

Задачі побудови математичної моделі системи вхід-вихід як елемента. Результати обробки експериментальних досліджень, виконаних на базі різного роду аналогів та макетів, характеризують відповідні реакції конструкції на відповідні входи і дають можливість побудувати математичні моделі вхід-вихід у вигляді різного роду функціональних залежностей типу: *невідомий вихід системи є перетворення її входу, тобто:*

$$x = f(y), (1)$$

де  $x$  – вихід,  $y$  – вхід,  $f()$  – оператор перетворення. Це можуть бути елементарні функції, в нашому випадку – лінійна залежність (наприклад, закон Ома –  $u = Ri$ ):

$$x = c y.$$

Зауваження. Для більш складних випадків можуть бути використані залежності типу поліномів (наприклад степеневого):  $x = \sum_{i=0}^n c_i y^i$ , де можливо при заміні змінних  $y^i$  отримати знову лінійну залежність декількох змінних  $y_i$ , тобто  $x = \sum_{i=0}^n d_i y_i$ ,  $y_i = y^i$ , де  $c_i$ ,  $d_i$  – невідомі коефіцієнти (параметри), які знаходяться при обробці експериментальних даних; у лінійному випадку  $d_i$  визначається відповідно  $d_i = \frac{x_i}{y_i}$ .

**Системний підхід до дослідження математичної моделі статичної системи.** Розглянемо етапи створення системи:

<структура (будова)> → <функція (алгоритм, процес)> → <технологія (реалізація мети)>,

які базуються відповідно на процесах [3]:

<структуризації> → <алгоритмізації> → <цілеорієнтації>.

Задачі системних досліджень статичної системи як мережі зв'язаних елементів. Ясно, що основні перетворення в системі відбуваються в елементах, які, будучи зв'язаними, формують різні реакції системи на її виході та визначають задачі.

\* В підготовці статті до друку взяли участь: к.т.н., доцент Андрієнко В. О., магістранти: Жуковський О. О., Чабан Ю. В.



Рівняння, алгебраїчно розв'язані відносно своєї головної змінної з виділенням відповідного перетворення  $a_{ii}$ , в круглих дужках, відображують зв'язки елементів як на входах, так і виходах. В квадратних дужках показано зв'язки на входах та виходах кожного з елементів. При більш уважному розгляді граф-схеми та виразу (7) доходимо висновку, що для опису системи:

$$\langle \text{входи} \rangle \rightarrow \langle \text{елементи} \rangle \rightarrow \langle \text{виходи} \rangle$$

необхідно ще додати опис з'єднань елементів відповідно на їх входах та виходах:

$$Y_E = S_{EC} Y_C, \quad X_C = S_{CE} X_E, \quad (8)$$

$$X_E = A_e^{-1} (B_e Y_E + B_3 Y_E - A_3 X_E) \quad (9)$$

(причому часто це можуть бути одиничні матриці).

Можливо на графах також відобразити використання методу отримання рівняння вхід-вихід системи, приводячи до виходу як вхідні, так і системні зв'язки, які дозволяють отримати опис системи як перетворення входу системи в її вихід.

Розглядаючи рис. 2, де відображені точки алгебраїчних сум, а саме:

- суми зв'язків на входах елементів;
- суми зворотніх зв'язків виходів;
- загальні суми на вході перетворення елементів, як прямих  $y_i$ , так і зворотніх  $x_i$  зв'язків, бачимо, що рівняння перетворення елементів можливо записати, використовуючи закон вузла, а саме:

сума виходів вузла дорівнює сумі його входів, тобто алгебраїчна сума сигналів вузла дорівнює нулю ( $\sum y_i = 0$ ).

В результаті отримуємо знову компактний вигляд матричного опису – моделі системи, відомий як опис  $P, V, H$  – структур [5]:

$$X_C = S_{CE} X_E, \quad A X_E = B Y_E, \quad Y_E = S_{EC} Y_C. \quad (10)$$

Таким чином, отримавши результати та оцінивши їх відповідно до критеріальних системних оцінок на базі розрахунків, ми маємо можливість як параметри використати не тільки значення коефіцієнтів перетворень елементів, а також їхні структурні зв'язки.

Інколи це змушує повернутись на початковий етап синтезу структури системи (конструювання). І взагалі це призводить до використання т.зв. структурних перетворень на базі структурованих описів елементів. Для того щоб оцінити якість характеристик системи на першому етапі, необхідно оцінити як параметричні змінні – коефіцієнти елементів, а також зв'язки між ними. До речі, відсутність в кожному рівнянні «свого» зворотного зв'язку в описі елементів може свідчити про те, що елементи, в свою чергу, є також з'єднанням, наприклад, використанням внутрішнього зворотнього зв'язку, який дозволяє розподілити перетворення параметрів елементів відповідно як між прямими, так і зворотніми зв'язками. В кожному окремому випадку визначається дослідником з метою досягнення оптимальних системних характеристик [6, 7].

**Системний аналіз основних структурних з'єднань.** Задачі структурних з'єднань входять до класу структурних змін в системі, які можуть бути використані для корегування системних характеристик входу-виходу. Покажемо це з використанням структурної схеми моделі системи для опису виходів відповідно до двох елементів як залежностей (рис. 3):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_{22} b_{11} y_1 - a_{12} b_{11} y_2}{a_{11} a_{12} - a_{12} a_{21}}, \\ x_2 = \frac{a_{11} b_{22} y_2 - a_{21} b_{11} y_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \end{cases} \quad (11)$$

Ці функціональні залежності дають можливість досліджувати процеси в системі автономно в кожному каналі:

$$x_1 = f_1(y_1, y_2), \quad x_2 = f_2(y_1, y_2).$$

Структурний опис основних з'єднань елементів (паралельного, послідовного, зворотно-паралельного). З точки зору структурних з'єднань двох елементів опишемо всі їх види.

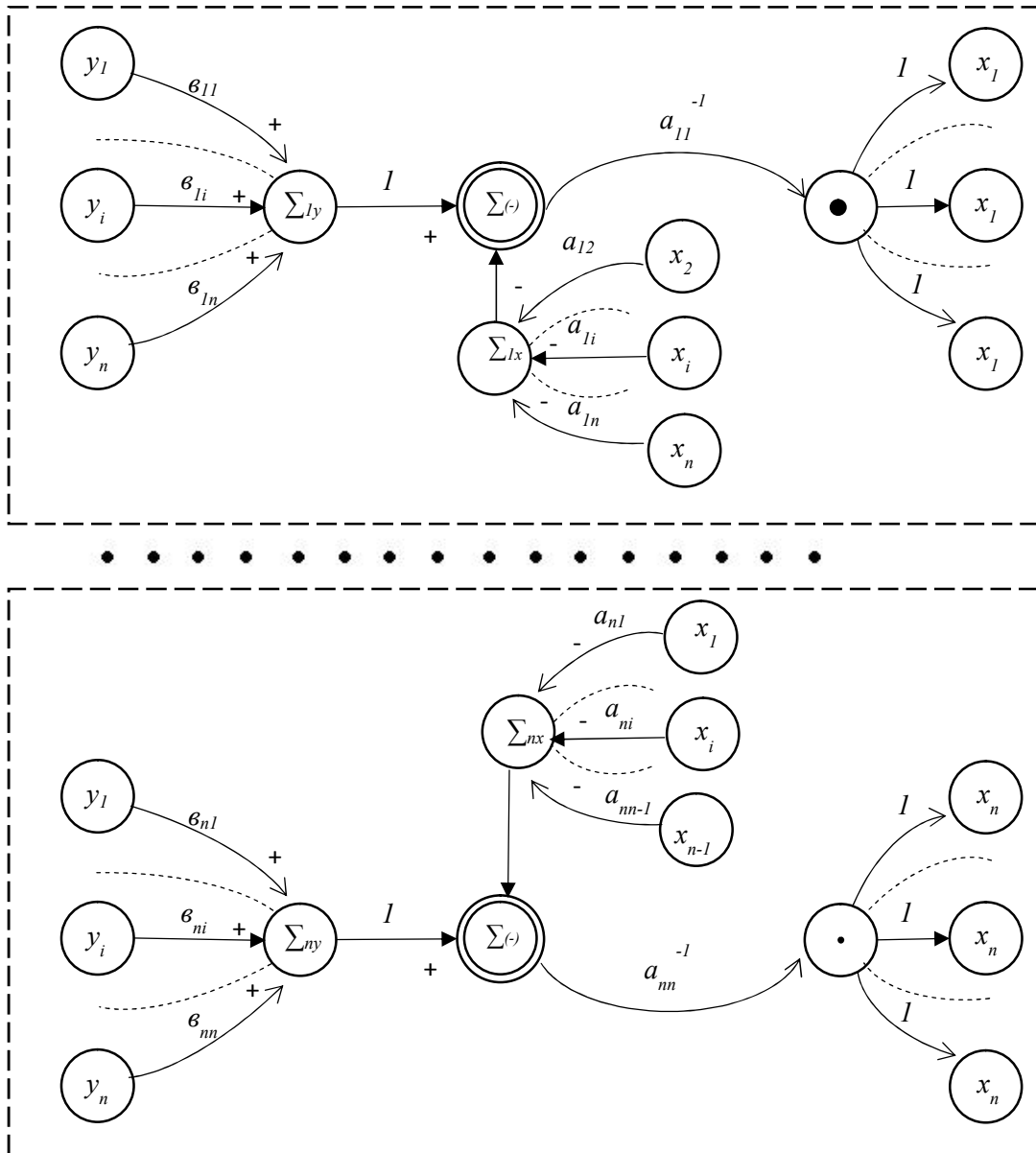


Рис. 3. Граф-схема системи як мережі зв'язаних елементів

Паралельне з'єднання (рис. 4). Відповідно паралельне з'єднання двох елементів на початковому етапі можливо сформулювати вербальний алгоритм з'єднання:

1. На входах кожного із елементів прирівняти їх відповідно між собою та системним входом.
2. Виходи елементів з'єднуються між собою та системним виходом.
3. Зв'язки описуємо як незалежні.

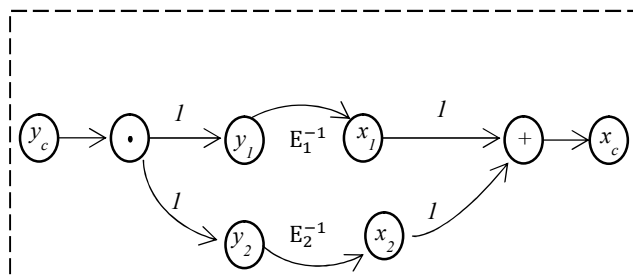


Рис. 4. Граф-схема паралельного з'єднання

Тоді можливо вищесказане записати детально відповідно як в скалярному:

$$x_1 = E_1^{-1} y_1, \quad y_1 = y_2 = y_c,$$

$$x_2 = E_2^{-1} y_2, \quad x_c = x_1 + x_2$$

так і в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1c} \\ y_{2c} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{1c} \\ x_{2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Використовуючи топологічні властивості матриць, при елементному описі можна формувати відповідні т.зв. входні та вихідні матриці, а також матриці перетворення елементів. Виключаючи при цьому проміжні змінні (тобто розв'язуючи цю систему алгебраїчних рівнянь), отримаємо рівняння вхід-вихід системи:

$$(E_1 + E_2)x_c = y_c.$$

*Послідовне з'єднання.* На вербальному рівні формулюється наступним чином (рис. 5).

1. Вхід першого елемента з'єднується з системним входом, а другого – з виходом першого.
2. Вихід другого елемента з'єднується з системним виходом.

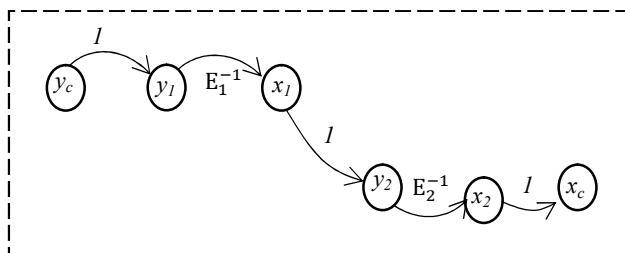


Рис. 5. Граф-схема послідовного з'єднання

Опишемо це з'єднання як систему поелементного опису (елементи і зв'язки окремо):

$$x_1 = E_1^{-1} y_1, \quad y_1 = y_c, \quad y_2 = x_1,$$

$$x_2 = E_2^{-1} y_2, \quad x_c = x_2.$$

або в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1c} \\ y_{2c} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{1c} \\ x_{2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Виключаючи при цьому проміжні змінні (тобто розв'язуючи цю систему алгебраїчних рівнянь), отримаємо рівняння вхід-вихід системи:

$$(E_1 * E_2)x_c = y_c.$$

*Зворотньо-паралельне з'єднання* (рис. 6).

На вербальному рівні запишеться:

1. На вхід першого елемента подаються два входи (через суматор) – зовнішній (системний) і внутрішній (вихід другого елемента чи елементів).
2. На вхід другого елемента подається вихід першого.
3. На системний вихід подається вихід другого елемента.

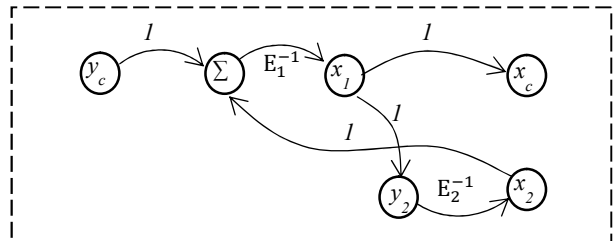


Рис. 6. Граф-схема зворотньо-паралельного з'єднання

Опишемо це з'єднання:

$$x_1 = E_1^{-1} y_1, \quad y_1 = x_2 + y_c, \quad y_2 = x_1,$$

$$x_2 = E_2^{-1} y_2, \quad x_c = x_1.$$

або в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1c} \\ y_{2c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{1c} \\ x_{2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Ця сукупність з'єднаних елементів є системним з'єднанням. Якщо виключити проміжні змінні, отримуємо вхід-вихід системи:

$$(E_1 E_2 - 1) x_c = E_1 E_2^{-1} y_c.$$

Маючи структуровані перетворення вхід-вихід, переходимо до системних представлень того чи іншого виду з'єднання, а саме:

$$\tilde{A}X = \tilde{B} Y, \quad (15)$$

де  $\tilde{A} = (A, B), \tilde{B} = (\tilde{A} \quad \tilde{B})$ .

Таким чином, ми знову отримуємо матричне рівняння виду:

$$A X = B Y,$$

яке по формі відповідає (4).

На цьому етапі мова практично зводиться до одного елемента, тільки його вид описання відносно початкового буде структуровано з використанням матриць  $A_i B_i$ .

Можливі наступні дослідження функціонування системи, змінюючи як значення парамет-

рів матриць, так і структурних зв'язків, використовуючи їх для досягнення бажаних системних показників (6, 7).

Відомо (за А. Г. Івахненком), що між характеристиками елементів прямих і зворотних зв'язків існує залежність типу  $N \rightarrow S$  (тобто елемент прямого зв'язку є оберненим зворотному зв'язку).

Підводячи підсумки, можна зробити наступне зауваження.

*Зауваження.*

1. Як бачимо, в основі досліджень лежать методи розв'язку систем алгебраїчних або матричних рівнянь. Вважаючи, що на сьогоднішні є достатні комп'ютерні програми, які дозволяють їх розв'язувати як в числовому, так і в функціональному вигляді, можливо використовувати елементи матриці як параметри [8].
2. Задаючи бажані системні характеристики, можливо розв'язувати задачі як структурного, так і параметричного синтезу, розглядаючи модель системи як мережі зв'язаних елементів.

#### **Структурно-параметричний метод корекції системних характеристик.**

Використання структурних перетворень для розвитку методу синтезу оптимальних характеристик вхід-вихід системи чи забезпечення інших системних властивостей (наприклад, автономності каналів, інваріантності відносно зовнішніх впливів, нечутливості відносно параметричних змін або традиційної стійкості станів). Нижче розглянемо підхід до використання методу параметричного синтезу.

Нехай на перших етапах проектування отримано об'єкт з відповідними характеристиками вхід-вихід:

$$E_0 x_0 = y_0, \quad x_0 = x_c \pm \varepsilon,$$

де  $x_0$  – вихід,  $y_0$  – вхід,  $E_0$  – перетворення об'єкта як системи,  $x_c$  – бажана вихідна характеристика системи.

Виникає задача скоригувати перетворення системи, додавши до елемента  $E_0$  інший елемент  $E_g$ , використовуючи один із видів з'єднання (паралельне, послідовне або зворотне-паралельне).

*Паралельне з'єднання.* Опишемо це з'єднання як систему поелементного опису (елементи і зв'язки окремо):

$$x_0 = E_0^{-1} y_0, \quad y_c = y_0 = y_g,$$

$$x_g = E_g^{-1} y_g, \quad x_c = x_0 + x_g.$$

Виключаючи при цьому проміжні змінні (тобто розв'язуючи цю систему алгебраїчних рівнянь), отримаємо рівняння вхід-вихід системи:

$$(E_0 + E_g) x_c = y_c.$$

Використовуючи критеріальну залежність

$$\chi = [\varepsilon = x_c - x_0 \Rightarrow \emptyset],$$

отримаємо

$$(E_0^{-1} + E_g^{-1}) y_c - E_0^{-1} y_0 = 0,$$

звідки

$$E_g^{-1} y_c = E_0^{-1} (y_0 - y_c),$$

або

$$E_g^{-1} = E_0^{-1} \frac{(y_0 - y_c)}{y_c}.$$

*Послідовне з'єднання.* Опишемо це з'єднання як систему поелементного опису (елементи і зв'язки окремо):

$$x_0 = E_0^{-1} y_0, \quad y_c = y_g, \quad y_0 = x_g$$

$$x_g = E_g^{-1} y_g, \quad x_c = x_0.$$

Виключаючи при цьому проміжні змінні (тобто розв'язуючи цю систему алгебраїчних рівнянь), отримаємо рівняння вхід-вихід системи:

$$(E_0 * E_g) x_c = y_c.$$

Використовуючи критеріальну залежність

$$\chi = [\varepsilon = x_c - x_0 \Rightarrow \emptyset],$$

отримаємо

$$(E_0^{-1} * E_g^{-1}) y_c - E_0^{-1} y_0 = 0,$$

звідки

$$E_g^{-1} = E_0^{-1} y_0 / y_c.$$

*Зворотне паралельне з'єднання.* Опишемо це з'єднання

$$x_0 = E_0^{-1} y_0, \quad y_0 = y_c + x_g,$$

$$x_g = E_g^{-1} y_g, \quad x_c = x_0,$$

ця сукупність з'єднаних елементів є системою. Якщо виключити проміжні змінні, отримаємо

$$E_g^{-1} = (E_0^{-1} E_g^{-1} - 1) y_c / E_0^{-1} x_c.$$

#### **Основні висновки.**

Проведений системний аналіз відомого матричного рівняння поелементного математичного опису лінійної статичної системи дає можливість порівняти його з відомим графічним

представленням у вигляді графів потоків сигналів (графів Мезона), по якому досить наочно можна використати т.зв. *вербальне представлення* про елементарні типи з'єднання – паралельного, послідовного та зворотно-паралельного.

Відносно зворотного переходу до матричного опису існує можливість використати відомий перший закон Кірхгофа про вузол потоків сигналів (аналогічного закону про алгебраїчного суму струмів вузла) – вона повинна дорівнювати нулю, тобто, як наслідок – існує рівність між тим, що надходить до вузла і тим, що виходить із нього.

В подальшому такий структурований опис дає можливість використати його для т.зв. структурного – параметричного синтезу по критерію оптимальності, інваріантності та автономності.

В подальшому можливе використання програмно-методичних комплексів для алгоритмізації процесів пошуку оптимальних характеристик.

#### Список літератури

1. Тимченко А. А. Структурний підхід до побудови моделей взаємозв'язків та взаємодії. *Математичне та імітаційне моделювання систем (МОДС-2016)*. Чернігів: ЧМТУ, 2016. С. 414–416.
2. Тимченко А. А., Ночевнов Д. П. Структурні перетворення системних з'єднань (послідовних, паралельних, зворотнопаралельних). *Вісник Черкаського державного технологічного університету*. 2011. № 1. С. 20–26.
3. Тимченко А. А. Основи системного підходу: структуризація, формалізація, цілеорієнтація. *Інформаційні технології в освіті, науці, техніці (ІТОНТ-2012)*. Черкаси: ЧДТУ, 2012. Т. 1. С. 48–49.
4. Шатихин Л. Г. Структурные матрицы и их применения для исследования систем. Москва: Изд-во Машиностроение, 1974. 248 с.
5. Mesarovich, M. D. The control of multiavirable system. NewYork: Wily, 1960. 212 p.
6. Щипанов Г. В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов. *Автоматика и телемеханика*. 1939. № 1. С. 20–31.
7. Тимченко А. А. Системний підхід до синтезу нових законів керування. *Автоматика-2013: матеріали XX Міжнародної конференції з автоматичного керування*. Миколаїв: НУК, 2013. С. 284–285.
8. Дьяконов В. П. *Mathematica 5.1/5.2/6.0. Программирование и математические вычисления*. Изд-во ДМК Пресс, 2008. 76 с.

#### References

1. Timchenko, A. A. (2016)The structural approach to building relationships and interaction models. *Matematychna ta imitatsiynne modelyuvannya system (MODS 2016)*. Cherkniv: CMTU, pp. 414–416.
2. Timchenko, A. A., Nochevnov, D. P. (2011) Structural transformation system connections (serial, parallel, reverse parallel). *Visnyk Cherkaskoho derzhavnoho tehnolohichnoho universytetu*, No. 1, pp. 20–26.
3. Timchenko, A. A. (2012) Fundamentals of system approach, structuring, formalization, target orientation. *Informatsiyni tehnologiyi v osviti, nauksi, tehnitsi (ITONT 2012)*. Cherkasy: ChSTU, vol. 1, pp. 48–49.
4. Shatikhin, L. G. (1974) Structural matrices and their applications for systems research. Moscow: Izd-vo Machinostroyeniye, 248 p.
5. Mesarovich, M. D. (1960) The control of multiavirable system. NewYork: Wily, 212 p.
6. Schypanov, G. V. (1939) The theory and designing methods of automatic regulators. *Avtomatika i telemehanika*, No. 1, pp. 20–31.
7. Timchenko, A. A. Systematic approach to the synthesis of new laws control. *Avtomatyka 2013: Proceedings of the XX International Conference on Automatic Control*. Nikolaev: NUS, pp. 284–285.
8. Dyakonov, V. P. (2008) *Mathematica 5.1/5.2/6.0. Programming and mathematical calculations*. Izd-vo DMK Press, 576 p.

**A. A. Timchenko**, *Dr.Tech.Sc., professor*  
Cherkassy State Technological University  
Shevchenko blvd, 460, Cherkassy, 18006, Ukraine

#### **SYSTEM ANALYSIS OF PROCESSES AND MODELS. LINEAR STATISTICS.**

*The approach to the creation of a kind of language communication researcher technical systems with a computer using standardized mathematical (matrix) describing mutual relations, which allows you to create static model of linear systems. When the device is used tools graph theory flow signals.*

*Consider creating technology and research systems as networks of connected elements, where network communication is defined as a structure.*

**Key words:** *element, system, model, task, count signal flows, analysis and systematic approach.*

*Статтю представляє А. А. Тимченко, д.т.н.,професор.*