

УДК 536.24:621.791.55

И.М. Кузяев, И.П. Казимиров, С.С. Беліменко

**РОЗРАХУНОК ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ ПРИ ОХОЛОДЖЕННІ ТРУБНИХ
ЕЛЕМЕНТІВ У РОБОЧИХ ОБ'ЄМАХ ХІМІЧНОГО ТА ТЕПЛОЕНЕРГЕТИЧНОГО
ОБЛАДНАННЯ**

**ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет», м. Дніпропетровськ
ТОВ підприємство «Теплотехніка», м. Дніпропетровськ**

Розроблено математичні моделі, що дозволяють описати неізотермічні процеси в робочих органах у вигляді трубних елементів різноманітного хімічного та теплоенергетичного устаткування при зовнішньому тепловому впливі на них, що описують різні межові умови. Представлено результати рішення розроблених математичних моделей у вигляді плоских й об'ємних графіків.

Робочі елементи хімічного й теплоенергетичного устаткування можуть бути виконані різноманітної геометричної форми, а саме: плоскої, циліндричної, конусної, тощо. При описанні теплових процесів в обладнанні з робочими зонами різної конфігурації використовується й відповідна система координат [1].

У роботі [2] отримано математичну модель для розподілу температурного поля у випадку плоского одношарового й двошарового тіла, попередньо нагрітого до певної температури, на верхню поверхню якого подається охолодний агент, за умови повної теплоізоляції інших поверхонь. При цьому розроблено комп'ютерні програми на базі математичного пакету Mathcad для моделювання температурних процесів за отриманими математичними моделями.

Однак слід зауважити, що багато робочих каналів виконано за допомогою трубних елементів з круглим поперечним перерізом. Тоді для моделювання температурних полів при охолодженні трубних елементів розрахункову схему можна подати згідно з рис. 1, тобто температурний процес буде розглядатися в циліндричній системі координат.

З огляду на те, що розмір трубних елементів у напрямку осі r набагато менше, ніж у напрямку осі z (вісь z перпендикулярно площині креслення), а також припускаючи дотримання симетричності теплового поля вздовж кутової координати, рівняння теплового балансу може бути подано таким чином:

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right), \quad (1)$$

де ρ , C_p , λ — відповідно густина, коефіцієнти теплоємності й теплопровідності матеріалу трубного елемента.

Для рішення рівняння (1) необхідно мати дві межові умови щодо осі r й одну початкову умову за часом t .

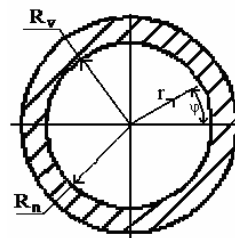


Рис. 1. Розрахункова схема для моделювання температурних процесів при охолодженні трубних елементів

Для рішення рівняння (1) у першому наближенні можна скористатися межовими умовами першого роду, а саме:

$$\left. \begin{aligned} T &= T_n \quad \text{при} \quad r = R_n; \\ T &= T_v \quad \text{при} \quad r = R_v, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де T_n — температура зовнішньої поверхні труби; T_v — температура внутрішньої поверхні труби.

Якщо припустити, що в початковий момент часу тіло мало постійну температуру T_p , то початкову умову можна записати так:

$$T(y, t) = T_p \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (3)$$

При рішенні рівняння (1) використаємо інтегральне перетворення Лапласа за часом t [3]. Тоді операторний аналог запишеться так:

$$\frac{d^2 T^L}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT^L}{dr} - \frac{s}{a} \cdot T^L = -\frac{T_p}{a}, \quad (4)$$

де T^L – зображення температури T ; s – змінна Лапласа; $a=rC_p/\lambda$.

Рішення рівняння (4) має вигляд [4]:

$$T^L = \frac{T_p}{s} + C_1 \cdot J_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}} \cdot i \cdot r\right) + C_2 \cdot Y_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}} \cdot i \cdot r\right), \quad (5)$$

де J_0 , Y_0 – функції Бесселя відповідно першого й другого роду нульового порядку; i – уявна одиниця; C_1 , C_2 – сталі інтегрування.

Операторний аналог межових умов (2) запишеться так:

$$\left. \begin{aligned} T^L &= \frac{T_n}{s} & \text{при} & \quad r=R_n; \\ T^L &= \frac{T_v}{s} & \text{при} & \quad r=R_v. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Підставивши межові умови (6) у рівняння (5) і визначивши сталі інтегрування, одержимо рівняння для температури в зображеннях:

$$T^L = \frac{T_p}{s} + \frac{T_v - T_p}{s} \cdot \frac{\text{Nu}1(s,r)}{\text{De}(s)} + \frac{T_n - T_p}{s} \cdot \frac{\text{Nu}2(s,r)}{\text{De}(s)}, \quad (7)$$

$$\text{де } \text{De}(s) = J_0(\sqrt{s} \cdot \text{Ra}_n) \cdot Y_0(\sqrt{s} \cdot \text{Ra}_v) - Y_0(\sqrt{s} \cdot \text{Ra}_v) \cdot J_0(\sqrt{s} \cdot \text{Ra}_n);$$

$$\text{Nu}1(s,r) = J_0(\sqrt{s} \cdot \text{Ra}_n) \cdot Y_0(a_i \cdot \sqrt{s} \cdot r) - Y_0(\sqrt{s} \cdot \text{Ra}_n) \cdot J_0(a_i \cdot \sqrt{s} \cdot r);$$

$$\text{Nu}2(s,r) = Y_0(\sqrt{s} \cdot \text{Ra}_v) \cdot J_0(a_i \cdot \sqrt{s} \cdot r) - J_0(\sqrt{s} \cdot \text{Ra}_v) \cdot Y_0(a_i \cdot \sqrt{s} \cdot r);$$

$$\text{Ra}_n = \frac{i \cdot R_n}{\sqrt{a}}; \quad \text{Ra}_v = \frac{i \cdot R_v}{\sqrt{a}}; \quad a_i = \frac{i}{\sqrt{a}}.$$

Щоб перейти до оригіналу виразу, треба знайти оригінали кожного з членів у його правій частині. Для першого члена маємо:

$$\frac{T_p}{s} \rightarrow T_p. \quad (8)$$

Оригінали для другого й третього членів можна одержати, якщо спочатку використати другу теорему розкладання у вигляді [3]:

$$\frac{\text{Nu}(s,r)}{\text{De}(s)} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Nu}(s_k,r)}{d\text{De}(s_k)} \cdot \exp(s_k \cdot z), \quad (9)$$

$$\text{де } d\text{De}(s_k) = \left. \frac{d\text{De}(s)}{ds} \right|_{s=s_k}.$$

Далі слід скористатися теоремою про інтегрування оригіналу, яка подається так:

$$\int_{0_j}^t \sum_k \frac{\text{Nu}(s_k,r)}{d\text{De}(s_k)} \cdot \exp(s_k \cdot \chi) d\chi. \quad (10)$$

У виразах (9) і (10) величина $\text{Nu}(s,r)$ для другого члена відповідає $\text{Nu}1(s,r)$, а для третього, відповідно – $\text{Nu}2(s,r)$. При цьому s_k позначає полюси для $\text{De}(s_k)$, які в цьому випадку можна подати таким чином:

$$s_k = \frac{a}{R_v^2} \cdot \left(\frac{P_k}{i} \right)^2, \quad (11)$$

де P_k – нулі для комплексу $\text{De}(s_k)$ при підстановці в нього полюсів (11); i – уявна одиниця.

Перші десять нулів можна визначити з рис. 2. При цьому, якщо скористатися функцією `root` із математичного пакету `Mathcad`, то точні значення для нулів будуть такі (для геометричних параметрів $R_n=41,5$ мм $R_v=44,5$ мм): $P_k=(43,45; 86,92; 130,37; 173,83; 217,29; 260,75; 304,21; 347,67; 391,13; 434,59)$.

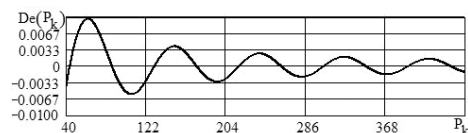


Рис. 2. Розподілення нулів для $\text{De}(s_k)$

Після виконання відповідних перетворень для розподілення температурного поля в трубному елементі можна записати наступний вираз:

$$T(r,z) = T_p - T_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Nu}2_k(r)}{P_k \cdot Z1_k} \cdot [1 - \exp(-s_k \cdot z)] - T_v \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Nu}1_k(r)}{P_k \cdot Z1_k} \cdot [1 - \exp(-s_k \cdot z)], \quad (12)$$

$$\text{де } \text{Nu}1_k(r) = J_0(P_k \cdot R_{nv}) \cdot Y_0\left(\frac{P_k \cdot r}{R_v}\right) - Y_0(P_k \cdot R_{nv}) \cdot J_0\left(\frac{P_k \cdot r}{R_v}\right);$$

$$\text{Nu}2_k(r) = J_0(P_k \cdot R_{nv}) \cdot Y_0\left(\frac{P_k \cdot r}{R_v}\right) -$$

$$-Y_0(P_k \cdot R_{nv}) \cdot J_0\left(\frac{P_k \cdot r}{R_v}\right);$$

$$Zl_k = -J_1(P_k \cdot R_{nv}) \cdot Y_0(P_k) \cdot R_{nv} - \\ J_0(P_k \cdot R_{nv}) \cdot Y_1(P_k) + \\ + J_1(P_k) \cdot Y_0(P_k \cdot R_{nv}) + \\ + J_0(P_k) \cdot Y_1(P_k \cdot R_{nv}) \cdot R_{nv};$$

$$T_n = 2 \cdot (T_n - T_p); \quad T_v = 2 \cdot (T_v - T_p); \quad R_{nv} = \frac{R_n}{R_v}.$$

На рис. 3 зображено розподілення температурного поля в трубному елементі при таких його характеристиках: $\rho=7800$ кг/м³, $C_p=532$ Дж/(кг·К), $\lambda=42,1$ Вт/(м·К), $T_n=373$ К, $T_v=313$ К, $T_p=633$ К.

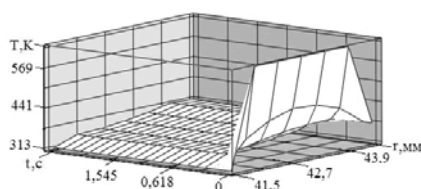


Рис. 3. Розподілення температурного поля при межових умовах першого роду

Слід зазначити, що для обладнання, яке акумулює й віддає теплову енергію виконати межові температурні умови (2), дуже важке завдання. Як правило, особливо при відбиранні тепла, можна відтворити межову умову другого або третього роду, які подаються відповідно таким чином:

— межова умова другого роду; це коли на поверхні елемента, що розглядається, задається тепловий потік q_n , наприклад:

$$\pm \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = q_n \quad \text{при } r = R_n; \quad (13)$$

— межова умова третього роду; це коли поверхня елемента має конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, наприклад:

$$\pm \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_{cv} \cdot (T_{cv} - T_v) \quad \text{при } r = R_v, \quad (14)$$

де α_{cv} — коефіцієнт тепловіддачі між охолодним середовищем і внутрішньою поверхнею стінки труби; T_v — температура внутрішньої поверхні труби; T_{cv} — температура охолодного середовища на внутрішній поверхні труби.

Операторні аналоги межових умов (13) і (14) запишуться відповідно так:

$$\lambda \cdot \frac{\partial T^L}{\partial r} = \frac{q_n}{s} \quad \text{при } r = R_n; \quad (15)$$

$$-\lambda \cdot \frac{\partial T^L}{\partial r} = \frac{\alpha_{cv} \cdot (T_{cv} - T_v)}{s} \quad \text{при } r = R_v. \quad (16)$$

Як видно з рівнянь (15) і (16) для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 слід диференціювати рівняння (12) за r , після чого одержимо:

$$\frac{\partial T^L}{\partial r} = -C_1 \cdot J_1\left(\sqrt{\frac{s}{a_z}} \cdot i \cdot r\right) \cdot \sqrt{\frac{s}{a_z}} \cdot i - \\ - C_2 \cdot Y_1\left(\sqrt{\frac{s}{a_z}} \cdot i \cdot r\right) \cdot \sqrt{\frac{s}{a_z}} \cdot i. \quad (17)$$

Після відповідної підстановки й перегрупування одержимо C_1 і C_2 , які далі підставимо у (17). Остаточно рівняння для зображення температури буде мати вигляд:

$$T^L = \frac{T_p}{s} - \frac{q_n}{\lambda \cdot s \cdot K_s} \cdot \frac{K_q}{K_z} + \frac{\alpha_{cv} \cdot (T_{cv} - T_v)}{\lambda \cdot s \cdot K_s} \cdot \frac{K_\alpha}{K_z}, \quad (18)$$

де $K_q = Y_1(K_s \cdot R_v) \cdot J_0(K_s \cdot r) - J_1(K_s \cdot R_v) \cdot Y_0(K_s \cdot r)$,

$$K_\alpha = Y_1(K_s \cdot R_n) \cdot J_0(K_s \cdot r) - J_1(K_s \cdot R_n) \cdot Y_0(K_s \cdot r),$$

$$K_z = J_1(K_s \cdot R_n) \cdot Y_1(K_s \cdot R_v) - J_1(K_s \cdot R_v) \cdot Y_1(K_s \cdot R_n),$$

$$K_s = \sqrt{\frac{s}{a_z}} \cdot i.$$

Помножимо й поділимо другий і третій члени правої частини рівняння (18) на комплекс $(\sqrt{s} \cdot i)$ і подамо його в такому вигляді (з урахуванням рівності $i^2 = -1$):

$$T^L = \frac{T_p}{s} + \frac{1}{s^2} \cdot \frac{Nu3(s,r)}{Del(s)} - \frac{1}{s^2} \cdot \frac{Nu4(s,r)}{Del(s)}, \quad (19)$$

$$\text{де } Nu3(s,r) = Q_n \cdot \left[\begin{array}{l} Y_1(K_s \cdot R_v) \cdot J_0(K_s \cdot r) - \\ - J_1(K_s \cdot R_v) \cdot Y_0(K_s \cdot r) \end{array} \right],$$

$$Nu4(s,r) = Q_\alpha \cdot \left[\begin{array}{l} Y_1(K_s \cdot R_n) \cdot J_0(K_s \cdot r) - \\ - J_1(K_s \cdot R_n) \cdot Y_0(K_s \cdot r) \end{array} \right],$$

$$Del(s) = J_1(K_s \cdot R_n) \cdot Y_1(K_s \cdot R_v) - \\ - J_1(K_s \cdot R_v) \cdot Y_1(K_s \cdot R_n),$$

$$Q_n = \frac{q_n \cdot \sqrt{a_z}}{\lambda};$$

$$Q_\alpha = \frac{\alpha_{cv} \cdot (T_{cv} - T_v) \cdot \sqrt{a_z}}{\lambda}.$$

Щоб перейти до оригіналу виразу (19), треба знову ж таки знайти оригінали кожного з членів у його правій частині. Оригінал першого члену знаходимо за виразом (8).

Для одержання оригіналів для другого й третього членів подамо, відповідно, другий і третій члени рівняння (19) у такому вигляді:

— другий член:

$$F2_1(s) \cdot F2_2(s, r),$$

$$\text{де } F2_1(s) = \frac{1}{s^2}; \quad F2_2(s, r) = \frac{\text{Nu}3(s, r)}{\text{Del}(s)};$$

— третій член:

$$F3_1(s) \cdot F3_2(s, r),$$

$$\text{де } F3_1(s) = \frac{1}{s^2}; \quad F3_2(s, r) = \frac{\text{Nu}4(s, r)}{\text{Del}(s)}.$$

Із останніх виразів видно, що другий і третій члени в рівнянні (19) представлено як добутки двох функцій від аргументів s і r . Тоді для знаходження оригіналів цих комплексів слід скористатися теоремою множення (теоремою Бореля) у вигляді [3]:

$$F1(s) \cdot F2(s) \rightarrow \int_0^t f1(t-\tau) \cdot f2(\tau) d\tau, \quad (20)$$

де $F1(s)$ і $F2(s)$ — два зображення в загальному випадку; $f1(t)$ і $f2(t)$ — оригінали відповідно зображень $F1(s)$ і $F2(s)$, що знайдено окремо один від іншого.

Для визначення оригіналів $F2_1(s)$ і $F3_1(s)$ можна використати таку формулу переходу:

$$\frac{1}{s^2} \rightarrow t. \quad (21)$$

Для визначення оригіналів від зображень $F2_2(s)$ і $F3_2(s)$ краще всього в даному випадку використати другу теорему розкладання у вигляді (9). При цьому полюси можна також подати згідно з виразом (11). Однак P_k знайдуться як нулі для комплексу $\text{Del}(s_k)$ при підстановці в нього полюсів (11).

Виконуючи диференціювання $V(s)$ за s і підставляючи полюси, одержимо такий вираз:

$$d\text{Del}(s_k) = \frac{R_v^2}{2 \cdot a \cdot P_k} \cdot (B1_k + B2_k - B3_k - B4_k), \quad (22)$$

$$\text{де } B1_k = \left[\frac{1/P_k \cdot J_1(R_{nv} \cdot P_k) -}{-R_{nv} \cdot J_0(R_{nv} \cdot P_k)} \right] \cdot Y_1(P_k),$$

$$B2_k = \left[\frac{1/P_k \cdot Y_1(P_k) -}{-Y_0(P_k)} \right] \cdot J_1(R_{nv} \cdot P_k),$$

$$B3_k = \left[\frac{1/P_k \cdot J_1(P_k) -}{-J_0(P_k)} \right] \cdot Y_1(R_{nv} \cdot P_k),$$

$$B4_k = \left[\frac{1/P_k \cdot Y_1(R_{nv} \cdot P_k) -}{-R_{nv} \cdot Y_0(R_{nv} \cdot P_k)} \right] \cdot J_1(P_k).$$

Комплекси $\text{Nu}3(s_k, r)$ і $\text{Nu}4(s_k, r)$ відповідно будуть мати вигляд:

$$\text{Nu}3(s_k, r) = Q_n \cdot \left[\frac{Y_1(P_k) \cdot J_0(r_c \cdot P_k) -}{-J_1(P_k) \cdot Y_0(r_c \cdot P_k)} \right];$$

$$\text{Nu}4(s_k, r) = Q_\alpha \cdot \left[\frac{Y_1(R_{nv} \cdot P_k) \cdot J_0(r_c \cdot P_k) -}{-J_1(R_{nv} \cdot P_k) \cdot Y_0(r_c \cdot P_k)} \right],$$

$$\text{де } r_c = \frac{r}{R_{cp}}.$$

Виконуючи певні перетворення, вирази для розподілення температури відповідно на внутрішній й зовнішній поверхнях можна подати таким чином:

$$T_v(t) = \frac{T_p + K1(t) - K2(t) \cdot T_{cv}}{1 - K2(t)}; \quad (23)$$

$$T_n(t) = T_p + K3(t) - K4(t), \quad (24)$$

$$\text{де } K1(t) = K_q \cdot \sum_k \Phi1_k(r)|_{r=R_v} \cdot \Psi_k(t) / Z_{nk};$$

$$K2(t) = K_\alpha \cdot \sum_k \Phi2_k(r)|_{r=R_v} \cdot \Psi_k(t) / Z_{nk};$$

$$K3(t) = K_q \cdot \sum_k \Phi1_k(r)|_{r=R_n} \cdot \Psi_k(t) / Z_{nk};$$

$$K4(t) = K_\alpha \cdot [T_{cv} - T_v(t)] \cdot \sum_k \Phi2_k(r)|_{r=R_n} \cdot \Psi_k(t) / Z_{nk};$$

$$\Phi1_k(r) = Y_1(P_k) \cdot J_0\left(P_k \cdot \frac{r}{R_v}\right) - J_1(P_k) \cdot Y_0\left(P_k \cdot \frac{r}{R_v}\right);$$

$$\Phi2_k(r) = Y_1(P_k \cdot R_{nv}) \cdot J_0\left(P_k \cdot \frac{r}{R_v}\right) - J_1(P_k \cdot R_{nv}) \cdot Y_0\left(P_k \cdot \frac{r}{R_v}\right);$$

$$\Psi_k(t) = \exp\left(-\frac{a}{R_v^2} \cdot P_k^2 \cdot t\right) + t \cdot \frac{a}{R_v^2} \cdot P_k^2 - 1;$$

$$Z_{nk} = P_k^2 \cdot (B1_k + B2_k - B3_k - B4_k);$$

$$K_q = \frac{2 \cdot q_n \cdot R_v}{\lambda}; \quad K_\alpha = \frac{2 \cdot \alpha_{cv} \cdot R_v}{\lambda}.$$

Графіки для двох варіантів розподілення ме-

жових температур згідно з виразами (23) і (24) зображено на рис. 4 (теплофізичні й геометричні характеристики взято такими ж, як і для рис. 3).

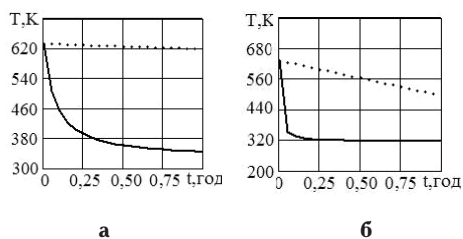


Рис. 4. Розподілення температур на поверхнях при межовій умові другого роду на зовнішньому радіусі й межовій умові третього роду на внутрішньому радіусі ($T_{cv}=323K$): — — T_i ; — T_n ; а — $q_n=1 \text{ Вт/м}^2$; $\alpha_{cv}=1 \text{ Вт/(м}^2\text{K)}$; б — $q_n=10 \text{ Вт/м}^2$; $\alpha_{cv}=10 \text{ Вт/(м}^2\text{K)}$

Підставляючи отримані значення межових температур у рівняння (12), одержано розподілення температур, що зображено на рис. 5 (для варіанта б на рис. 4).

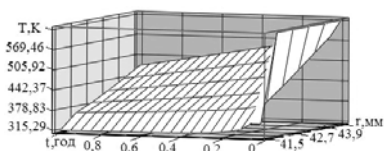


Рис. 5. Розподілення температурного поля при комбінованих межових умовах

Значний інтерес викликає вивчення температурних напружень в елементах конструкцій при наявності певних градієнтів тиску. Для отримання температурних напружень у циліндричних елементах можна скористатися наступними виразами [5]:

— для радіальних напружень:

$$\sigma_r = \frac{E \cdot \alpha}{2 \cdot (1-\nu)} \left(1 - \frac{R_v^2}{r^2} \right) \cdot [T_i(R_n, t) - T_i(r, t)]; \quad (25)$$

— для тангенціальних напружень:

$$\sigma_\phi = \frac{E \cdot \alpha}{2 \cdot (1-\nu)} \left[\left(1 + \frac{R_v^2}{r^2} \right) \cdot T_i(R_n, t) + \left(1 - \frac{R_v^2}{r^2} \right) \cdot T_i(r, t) - 2 \cdot T(r, t) \right]; \quad (26)$$

— для осьових напружень:

$$\sigma_z = \sigma_r + \sigma_\phi, \quad (27)$$

де $T_i(r, t) = \frac{2}{R_n^2 - R_v^2} \cdot \int_{R_v}^r r \cdot T(r, t) dr$; E — модуль пружності; ν — коефіцієнт Пуассона; α — коефіцієнт лінійного розширення.

На рис. 6 подано графіки для напружень, розрахованих при розподіленні температури за рис. 3, а на рис. 7 — відповідно з температурою до рис. 5.

Слід зазначити, що як при отриманні графіків, так і для оптимізації температурних режимів у даній роботі розроблено комп'ютерні програми на базі математичного пакету Mathcad.

Як видно із отриманих графіків, напруження для комбінованих температурних межових умов за абсолютною величиною значно перевищують рівень напружень для температурних межових умов першого роду. Однак в останньому випадку виникають напруження з різним знаком, що для крихких матеріалів небажано.

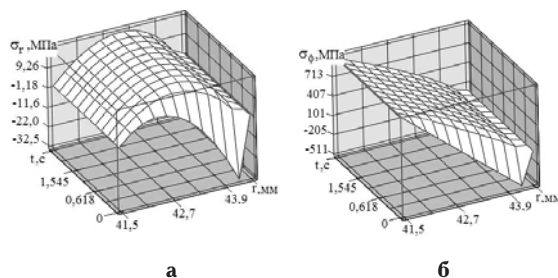


Рис. 6. Розподілення температурних напружень при температурних межових умовах першого роду: а — радіальні напруження; б — тангенціальні напруження

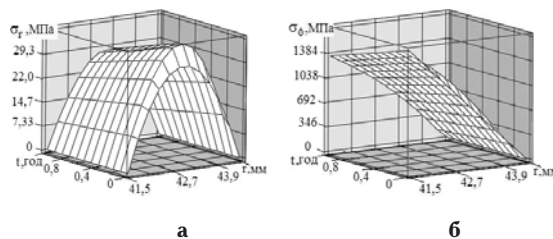


Рис. 7. Розподілення температурних напружень при комбінованих температурних межових умовах: а — радіальні напруження; б — тангенціальні напруження

Висновки

1. Розроблено математичні моделі для моделювання та оптимізації неізотермічних процесів в робочих органах у вигляді трубних елементів при зовнішньому тепловому впливі на них з різними межовими температурними умовами.

2. Побудовано комп'ютерні програми на базі математичного пакета Mathcad для моделювання температурних процесів у трубних елементах, у тому числі й температурних напружень.

3. Отримано об'ємні й плоскі графіки, які описують поведінку трубних елементів при наявності значних температурних градієнтів по об'єму тіла.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кузяев И.М. Механіка та реологія полімерів: навч.

- посібн. [для студ. вищ. навч. закл.]. — Дніпропетровськ: УДХТУ, 2002. — 386 с.
2. Кузяев И.М., Казимиров И.П., Белименко С.С. Моделирование тепловых процессов в рабочих объемах химического и теплоэнергетического оборудования // *Вопросы химии и хим. технологии*. — 2011. — № 1. — С.160-167.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Пер. с нем. Под ред. С.Ф. Фомина. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
5. Тылкин М.А., Яловой Н.И., Полухин П.И. Температуры и напряжения в деталях металлургического оборудования. — М.: Высш. шк., 1970. — 428 с.

Надійшла в редакцію 22.11.2011