

*И.М. Кузьев*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЗАПОЛНЕНИЯ КАПИЛЛЯРОВ  
ПОЛИМЕРНЫМИ ЖИДКИМИ СРЕДАМИ С РАЗРАБОТКОЙ БЛОКОВ САПР**

**ГВУЗ «Украинский государственный химико-технологический университет», г. Днепропетровск**

Разработаны математические модели для процессов заполнения капилляров полимерными жидкими средами. Получены зависимости для определения поля скоростей и глубины заполнения капилляров. Разработаны блоки САПР на базе математического пакета Mathcad.

**Постановка проблемы**

Процессы заполнения различных типов каналов связаны с нестационарным течением жидких сред. При этом основным уравнением для описания данных процессов является уравнение движения, которое в векторном виде может быть представлено таким образом [1-3]:

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + [\nabla \times \sigma_{ij}] + \rho \vec{g}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $\vec{V}$  – вектор скорости;  $D/Dt$  – субстанциональная производная от вектора скорости;  $\nabla P$  – градиент давления;  $[\nabla \times \sigma_{ij}]$  – векторное произведение вектора  $\nabla$  на тензор  $\sigma_{ij}$ ;  $\vec{g}$  – вектор ускорения.

В большинстве случаев капилляры представляют собой или каналы круглой формы, или каналы, которые можно привести к круглой конфигурации. Тогда процессы течения следуют описывать в цилиндрической системе координат, в которой уравнения движения в проекциях на оси в общем случае можно представить так:

$$\rho \cdot \left( \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \Phi \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \\ + V \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{r} \cdot \Phi^2 \end{array} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} +$$

$$+ \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \\ + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \end{array} \right] + \rho \cdot g_r; \quad (2)$$

$$\rho \cdot \left( \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r} \times \\ \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + V \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{U \cdot \Phi}{r} \end{array} \right) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi} +$$

$$+ \left( \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \\ + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \cdot \sigma_{\varphi r} \end{array} \right) + \rho \cdot g_{\varphi}; \quad (3)$$

$$\rho \cdot \left( \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial V}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r} \cdot \Phi \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} +$$

$$+ \left( \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \\ + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \sigma_{zr} \end{array} \right) + \rho \cdot g_z, \quad (4)$$

где  $U$ ,  $\Phi$ ,  $V$  – проекции вектора скорости соответственно на оси  $r$ ,  $j$  и  $z$ .

**Построение математической модели**

Принимаем условие об осесимметричности потока относительно угловой координаты, а также учитываем только одну проекцию скорости, а именно, проекцию  $V$ , и градиент давления только вдоль оси  $z$ . Кроме того, пренебрегая массовыми силами, можно уравнение движения записать так:

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \sigma_{zr} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \quad (5)$$

Чтобы решить уравнение (5), необходимо выразить компоненты тензора напряжений через компоненты тензора скоростей деформаций. В простейшем случае связь между компонентами двух этих тензоров задается в виде реологического уравнения состояния для ньютоновской жидкости (данная зависимость справедлива, например, для расплава полиамида). Тогда для компонентов тензора напряжений, входящих в уравнение (5), будем иметь:

$$\sigma_{zr} = \eta \cdot \frac{\partial V}{\partial r}; \quad \sigma_{zz} = 2\eta \cdot \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (6)$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости.

Подстановка выражений (6) в (5) приводит к следующему уравнению:

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \eta \cdot \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} + 2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right). \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных от трех независимых переменных, а именно: времени  $t$  и двух координат  $r$  и  $z$ . Чтобы уменьшить количество независимых переменных, будем задавать комплексы, включающие производные по оси  $z$ , дискретно, что даст возможность использовать допущение о независимости этих комплексов от двух других независимых переменных. Тогда можно записать такие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} V \cdot \frac{\partial V}{\partial z} &= V_i \cdot \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta z_i} = KV1; \\ \frac{\partial P}{\partial z} &\approx \frac{\Delta P}{\Delta z_i} = \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta z_i} = KP; \\ 2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= 2 \cdot \frac{V_{i+1} - 2 \cdot V_i + V_{i-1}}{\Delta z_i^2} = KV2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

С учетом соотношений (8) уравнение (7) можно представить таким образом:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\rho}{\eta} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \cdot KP + \frac{\rho}{\eta} \cdot KV1 - KV2. \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) необходимо знать начальное условие по времени для скорости:

$$V(t) = f(t) \rightarrow t = 0, \quad (10)$$

где  $f(t)$  – функциональная зависимость скорости в момент времени  $t=0$  (данная зависимость может быть задана и константой).

Кроме того, для решения уравнения (9) также следует иметь и граничное условие по координате  $r$ .

Решение уравнения (9) будем находить с использованием операционного метода, то есть с помощью интегрального преобразования Лапласа [4]. Преобразование Лапласа в уравнении (9) следует выполнять по времени с учетом начального условия (10). Используя теорему о дифференцировании оригинала, получим операторный аналог уравнения (9) в виде:

$$\frac{d^2 V^L}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dV^L}{dr} - \frac{\rho}{\eta} \cdot (s \cdot V^L - f(0)) = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{KP}{s} + \frac{\rho}{\eta} \cdot \frac{KV1}{s} - \frac{KV2}{s}, \quad (11)$$

где  $V^L$  – изображение скорости  $V$ ;  $s$  – переменная преобразования Лапласа.

Чтобы определить величину  $KP$ , необходимо знать функциональную зависимость давления по координате  $z$  или во времени  $t$ , которая может иметь различную конфигурацию. На рис. 1 представлены две конфигурации зависимости давления от времени, для которых справедлива такая общая формула:

$$P(t) = P_n + P_m \cdot f(t) - P_k, \quad (12)$$

где  $P_n$ ,  $P_k$  – значения давлений соответственно на входе в канал в начальный момент времени и в конце заполненного жидкостью отрезка канала;  $P_m$  – максимально возможное давление, создаваемое в канале;  $f(t)$  – временная функция, определяющая конфигурацию кривой.

На рис. 1 представлены две функциональные временные конфигурации:

$$f(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right); \quad (13)$$

$$f(t) = (a \cdot t)^b \cdot \exp(c \cdot t). \quad (14)$$

Преобразуем уравнение (11) к виду:

$$\frac{d^2 V^L}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dV^L}{dr} - \frac{\rho}{\eta} \cdot s \cdot V^L = - \frac{\rho}{\eta} \cdot f(0) + \frac{1}{s} \cdot KP, \quad (15)$$

где  $KPV = \frac{KP}{\eta} + \frac{\rho}{\eta} \cdot KV1 - KV2$

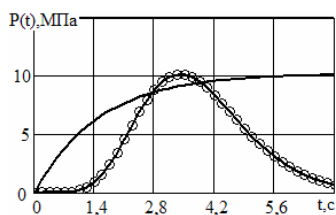


Рис. 1. Графики изменения давления от времени при  $P_m=10,2$  МПа ( $P_n=P_k$ ): - - - по зависимости (13) ( $t=1,5$  с); — по зависимости (14) ( $b=8,05$ ;  $c=-2,37$  с<sup>-1</sup>;  $a=0,8$  с<sup>-1</sup>)

Уравнение (15) относится к уравнениям Бесселя [5]. Решение для данного типа уравнений можно записать в виде:

$$V^L = \frac{f(0)}{s} - \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot KPV + C_1 \cdot J_0(\sqrt{s \cdot K_V} \cdot i \cdot r) + C_2 \cdot Y_0(\sqrt{s \cdot K_V} \cdot i \cdot r), \quad (16)$$

где  $J_0, Y_0$  – функции Бесселя соответственно первого рода нулевого порядка и второго рода нулевого порядка или функция Вебера;  $i$  – мнимая единица;  $K_V = \rho/\eta$ .

С учетом того, что скорость должна быть ограничена при  $r \rightarrow 0$ , то  $C_2=0$ . Тогда последнее уравнение упрощается к виду:

$$V^L = \frac{f(0)}{s} - \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot KPV + C_1 \cdot J_0(\sqrt{s \cdot K_V} \cdot i \cdot r), \quad (17)$$

Для определения константы  $C_1$  воспользуемся граничным условием, соответствующим прилипанию жидкости к стенке канала, а именно:

$$V=0 \text{ при } r=R, \quad (18)$$

где  $R$  – наружный радиус канала.

Операторный аналог соотношения (18) запишется следующим образом:

$$V^L = 0 \text{ при } r=R. \quad (19)$$

Подстановка (19) в (17) дает следующее выражение для  $C_1$ :

$$C_1 = - \frac{\frac{f(0)}{s} - \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot KPV}{J_0(\sqrt{s \cdot K_V} \cdot i \cdot R)}.$$

Окончательно выражение для распределения

скорости в изображении с учетом последнего соотношения будет иметь вид:

$$V^L = f(0) \cdot \Phi 1(s) - \frac{1}{s} \cdot KL \cdot \Phi 1(s), \quad (20)$$

где  $\Phi 1(s) = \frac{JR_0(s) - Jr_0(s)}{s \cdot JR_0(s)}$ ;

$$KL = \frac{\eta}{\rho} \cdot KPV;$$

$$JR_0(s) = J_0(\sqrt{s \cdot K_V} \cdot i \cdot R);$$

$$Jr_0(s) = J_0(\sqrt{s \cdot K_V} \cdot i \cdot r).$$

Для определения оригинала скорости  $V$  по уравнению (20) необходимо найти оригиналы каждого из двух членов в его правой части. При этом следует помнить, что величины  $f(0)$  и  $KL$  являются константами для  $s$ .

Чтобы найти оригинал первого члена, то есть оригинал от изображения  $f(0) \cdot \Phi 1(s)$ , воспользуемся второй теоремой разложения, представленной таким образом:

$$\frac{A(s)}{B(s)} \leftrightarrow \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_k \frac{A(s_k)}{s_k \cdot dB(s_k)} \cdot \exp(s_k \cdot t), \quad (21)$$

где  $A(s)$  – числитель для  $\Phi 1(s)$  с учетом множителя  $f(0)$ ;  $B(s)$  – знаменатель для  $\Phi 1(s)$  (без множителя  $s$ );  $s_k$  – полюсы для  $B(s)$ .

С учетом принятых обозначений для  $f(0) \cdot \Phi 1(s)$  можно записать такие соотношения:

$$A(s) = f(0) \cdot [JR_0(s) - Jr_0(s)]; \quad A(0) = 0;$$

$$B(s) = JR_0(s); \quad B(0) = 1;$$

$$dB(s_k) = \left. \frac{dB(s)}{ds} \right|_{s=s_k} = -\frac{1}{2} \cdot J_1(\sqrt{s_k \cdot K_V} \cdot i \cdot R) \cdot i \cdot R \cdot \sqrt{\frac{K_V}{s_k}}.$$

Полюсы в данном случае можно представить таким образом:

$$s_k = - \frac{Z_k^2}{K_V \cdot R^2}, \quad (22)$$

где  $Z_k$  – нули для  $J_0$ .

Принимая во внимание последние соотношения, для оригинала от изображения  $f(0) \cdot \Phi 1(s)$  получаем такое выражение:

$$f(0) \cdot \Phi 1(s) \leftrightarrow f(0) \cdot \phi 1(t) = f(0) \times$$

$$\times \sum_k \frac{J_0(Z_k) - J_0\left(Z_k \cdot \frac{r}{R}\right)}{Z_k \cdot J_1(Z_k)} \cdot EX(t) . \quad (23)$$

$$\text{где } EX(t) = \exp\left[-\frac{Z_k^2}{K_V \cdot R^2} \cdot t\right].$$

При отыскании оригинала для второго члена в правой части выражения (20) воспользуемся теоремой об интегрировании оригинала, которая имеет вид:

$$\frac{1}{s} \cdot KL \cdot \Phi 1(s) \leftrightarrow KL \cdot \int_0^t \phi 1(\zeta) d\zeta . \quad (24)$$

Подставляя выражение для оригинала функции  $\phi 1(t)$  из (23) в подынтегральное выражение (24), после выполнения интегрирования получаем:

$$\frac{1}{s} \cdot KL \cdot \Phi 1(s) \leftrightarrow KR \times$$

$$\times \sum_k \frac{J_0(Z_k) - J_0\left(Z_k \cdot \frac{r}{R}\right)}{Z_k^3 \cdot J_1(Z_k)} \cdot EX1(t) . \quad (25)$$

$$\text{где } KR = R^2 \cdot K_{PV} ; EX1(t) = 1 - EX(t) .$$

Окончательно, с учетом разбивки пространственно-временной области (по координате  $r$  и времени  $t$ ), получаем выражение для определения скорости в таком виде:

$$V_{i+1,j} = f(0) \cdot SJ_{i,j} - R^2 \cdot KR_{i,j} \cdot SJ_{i,j} , \quad (26)$$

$$\text{где } SJ_{i,j} = \sum_k \frac{J_0(Z_k) - J_0\left(Z_k \cdot \frac{r_j}{R}\right)}{Z_k \cdot J_1(Z_k)} \cdot EX(t_i) ;$$

$$SJ_{i,j} = \sum_k \frac{J_0(Z_k) - J_0\left(Z_k \cdot \frac{r_j}{R}\right)}{Z_k^3 \cdot J_1(Z_k)} \cdot EX1(t_i) ;$$

$$KR_{i,j} = \left[ \frac{1}{\eta} \cdot \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta z_i} + K_V \cdot V_{i,j} \cdot \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta z_i} - 2 \cdot \frac{V_{i+1,j} - 2 \cdot V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta z_i^2} \right] .$$

Для того, чтобы воспользоваться уравнением (26) с учетом выражения для  $KR_{i,j}$ , необходимо его записать относительно компоненты  $V_{i+1,j}$ . После соответствующей перегруппировки получаем:

$$V_{i+1,j} = f(0) \cdot \frac{SJ_{i,j}}{Do_{i,j}} - R^2 \cdot KR_{i,j} \cdot \frac{SJ_{i,j}}{Do_{i,j}} , \quad (27)$$

где

$$KR_{i,j} = \left[ \frac{1}{\eta} \cdot \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta z_i} - K_V \cdot \frac{V_{i,j}^2}{\Delta z_i} + 2 \cdot \frac{2 \cdot V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\Delta z_i^2} \right] ;$$

$$Do_{i,j} = 1 - R^2 \cdot \left( K_V \cdot \frac{V_{i,j}}{\Delta z_i} \cdot SJ_{i,j} - \frac{2}{\Delta z_i^2} \cdot SJ_{i,j} \right) .$$

При расчете скорости по выражению (27) следует сделать два замечания: первое – значение величины  $f(0)$  будет соответствовать  $V_{0,j}$ ; второе – при  $i=0$  значение для  $V_{i-1,j}$  следует принять равным нулю.

Можно выделить два наиболее часто встречающихся случая: первый – когда канал полностью открытый со стороны выходного отверстия; второй – когда канал полностью закрытый со стороны выходного отверстия. Для первого случая можно принять давление на выходе из канала равным атмосферному давлению. Во втором случае давление в конце из канала будет возрастать за счет сжатия воздуха, находящегося в канале.

#### Разработка блоков САПР для каналов с открытым выходным отверстием

Рассмотрим далее более детально вариант открытого выходного отверстия в заполняемом капилляре, приняв при этом давление на выходе из канала  $P_k$  и начальное давление на входе в канал  $P_n$  по уравнению (12), равным атмосферному давлению. Тогда с учетом выражений (12) и (13) можно записать:

$$P_i = P_m \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_i}{\tau}\right) \right] . \quad (28)$$

Если же использовать комбинацию выражений (12) и (14), то будет справедливым такое соотношение:

$$P_i = P_m \cdot (a \cdot t_i)^b \cdot \exp(c \cdot t_i) . \quad (29)$$

Решение уравнение (27) с учетом выражения (28) осуществлялось с помощью математического пакета MathCad. Результаты расчета приведены в программном блоке САПР-1. Объемный график изменения скорости в зависимости от времени и радиальной координаты представлен на рис. 2; плоский график изменения высоты заполнения капилляра  $z$  от времени по оси капилляра изображен на рис. 3.

## Часть 1

$$x1 := (2.5 \ 5.6 \ 8.5 \ 12 \ 15.4 \ 18 \ 21.4 \ 24.2 \ 27.5 \ 30.5 \ 34.6 \ 36.6)^T$$

```
Z :=
| k ← 0
| for xp ∈ x1
|   | xt → root(J0(xp), xp)
|   | xc_k ← xt
|   | k ← k + 1
| xc
```

$$Z^T :=$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	2.4	5.52	8.65	11.79	14.93	18.07	21.21	24.35	27.49	30.63	33.78	36.92

## Часть 2

$$t_n := 0s \quad t_k := 8s \quad im := 399 \quad dt := \frac{t_k}{im} \quad i := 0..im \quad R := 0.2mm \quad t_i := t_n + i \cdot dt \quad P_n := 1atm \quad P_k := 1atm$$

$$P_m := 10.2 \cdot 10^6 Pa \quad \tau := 1.5s \quad jm := 10 \quad dr := \frac{R}{jm} \quad j := 0..jm \quad r_j := j \cdot dr \quad \rho := 1200 \cdot \frac{kg}{m^3} \quad \eta := 180 \cdot Pa \cdot s \quad K_V := \frac{\rho}{\eta}$$

$$V_n := 10^{-4} \cdot \frac{m}{s} \quad k := 0..11$$

$$EX_{k,i} := \exp\left[-\frac{(Z_k)^2}{K_V \cdot R^2} \cdot t_i\right] \quad EX1_{k,i} := 1 - \exp\left[-\frac{(Z_k)^2}{K_V \cdot R^2} \cdot t_i\right] \quad SJ_{i,j} := \sum_k \frac{J_0(Z_k) - J_0\left(Z_k \cdot \frac{r_j}{R}\right)}{Z_k \cdot J_1(Z_k)} \cdot EX_{k,i}$$

## Часть 3

$$Pl_i := P_m \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t_i}{\tau}\right)\right)$$

V1 := for i ∈ 1..im

```

| for j ∈ 1..jm
|   | V0,j ← 0 ·  $\frac{m}{s}$  ⊕ z1 ← 0m ⊕ V1,j ← Vn
|   | Δzi ← dt · V1,0
|   | Doi,j ← 1 + R2 ·  $\left[\frac{K_V \cdot V_{i,j} \cdot SJ_{i,j}}{\Delta z_i} - \frac{2 \cdot SJ1_{i,j}}{(\Delta z_i)^2}\right]$ 
|   | dPzi ←  $\frac{Pl_i - Pl_{i-1}}{\Delta z_i}$ 
|   | KR1i,j ←  $\frac{1}{\eta} \cdot dPzi - \frac{K_V \cdot (V_{i,j})^2}{\Delta z_i} + \frac{4 \cdot V_{i,j} - 2 \cdot V_{i-1,j}}{(\Delta z_i)^2}$ 
|   | Vi+1,j ← Vn ·  $\frac{SJ_{i,j}}{Doi,j} - R^2 \cdot KR1i,j \cdot \frac{SJ1_{i,j}}{Doi,j}$ 
|   | zi+1 ← zi + Δzi
|   |  $\left(\frac{V}{UnitsOf(V)} \quad \frac{z}{UnitsOf(z)}\right)^T$ 
```

$$V1^T = (\{401,11\} \ \{401,1\}) \quad V := V1_0 \cdot m \cdot s^{-1} \quad z := V1_1 \cdot m$$

В части 1 программного блока САПР-1 определяются нули  $Z_k$  для функции Бесселя  $J_0$ . В части 2 задаются исходные величины и определяются выражения, независимые от давления и скорости в канале. В части 3 введен программный модуль для определения искомым величин (скорости  $V$  и высоты заполнения капилляра  $z$ ) с учетом комплексов, зависящих от давления и осевой координаты.

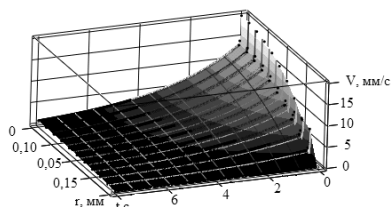


Рис. 2. Объемный график изменения скорости  $V$  для открытого выходного отверстия в зависимости от времени и радиальной координаты при таких параметрах:  $R=0,2$  мм;  $\rho=1200$  кг/м<sup>3</sup>;  $\eta=180$  Па·с;  $V=0,0001$  м/с;  $\tau=1,5$  с;  $P_m=10,2$  МПа (изменение давления происходит по уравнению (28))



Рис. 3. График изменения высоты заполнения капилляра  $z$  от времени по оси капилляра при тех же параметрах, что и на рис. 2

На рис. 4 и рис. 5 приведены аналоги соответственно графиков, изображенных на рис. 2 и рис. 3, но в случае изменения давления согласно с уравнением (29).

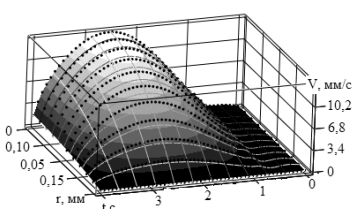


Рис. 4. Объемный график изменения скорости  $V$  в зависимости от времени и радиальной координаты при таких параметрах:  $b=8,05$ ;  $c=-2,37$  с<sup>-1</sup>;  $a=0,8$  с<sup>-1</sup> с учетом изменения давления по уравнению (29) (остальные параметры такие же, как и на рис. 2)

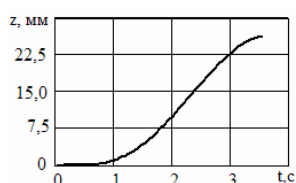


Рис. 5. График изменения высоты заполнения капилляра  $z$  от времени по оси капилляра при тех же параметрах, что и на рис. 4

Изменение скорости заполнения полимерным материалом капилляров зависит от параметров, входящих в уравнение (27), с учетом характеристик для развиваемого давления. На рис. 6–8 приведены графики изменения скорости и высоты заполнения капилляра по оси капилляра при варьировании одного из параметров. При этом изменение давления происходит по уравнению (28).

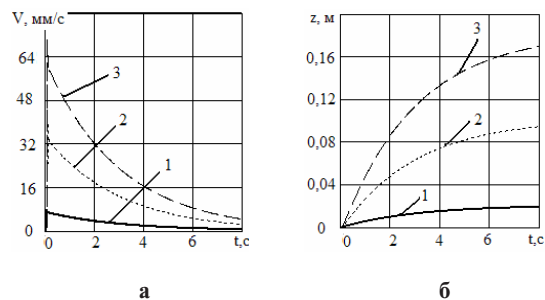


Рис. 6. Графики изменения скорости (а) и высоты заполнения капилляра (б) по оси капилляра при таких параметрах:  $\rho=1200$  кг/м<sup>3</sup>;  $\eta=180$  Па·с;  $V=0,0001$  м/с;  $\tau=1,5$  с;  $P_m=10,2$  МПа (1 –  $R=0,1$  мм; 2 –  $R=0,5$  мм; 3 –  $R=0,9$  мм)

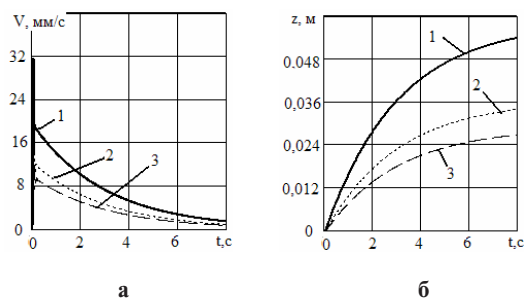


Рис. 7. Графики изменения скорости (а) и высоты заполнения капилляра (б) по оси капилляра при таких параметрах:  $\rho=1200$  кг/м<sup>3</sup>;  $R=0,3$  мм;  $V=0,0001$  м/с;  $\tau=1,5$  с;  $P_m=10,2$  МПа (1 –  $\eta=200$  Па·с; 2 –  $\eta=500$  Па·с; 3 –  $\eta=900$  Па·с)

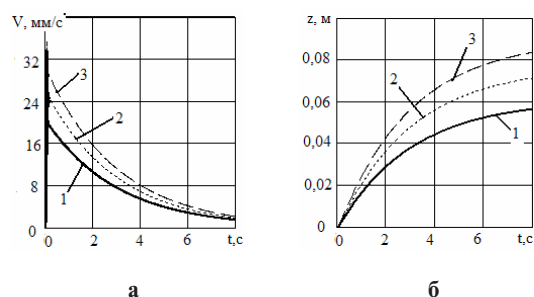


Рис. 8. Графики изменения скорости (а) и высоты заполнения капилляра (б) по оси капилляра при таких параметрах:  $\rho=1200$  кг/м<sup>3</sup>;  $R=0,3$  мм;  $\eta=180$  Па·с;  $V=0,0001$  м/с;  $\tau=1,5$  с; (1 –  $P_m=10$  МПа; 2 –  $P_m=16$  МПа; 3 –  $P_m=22$  МПа)

### Разработка блоков САПР для каналов с закрытым выходным отверстием

При моделировании процессов заполнения капилляров в случае закрытого выходного отвер-

## Часть 3

$$P_n := 1 \text{atm} \quad P_k := 1 \text{atm} \quad L_k := 25 \text{mm} \quad P_{1i} := P_n + P_m \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t_i}{\tau}\right)\right)$$

V1 := for i ∈ 1..im

$$\begin{aligned} & z_1 \leftarrow 0 \text{m} \oplus P_{k1} \leftarrow P_n \oplus V_{o1} \leftarrow \pi \cdot R^2 \cdot L \\ & \text{for } j \in 1..jm \\ & \quad V_{0,j} \leftarrow 0 \cdot \frac{m}{s} \oplus V_{1,j} \leftarrow V_n \oplus \Delta z_i \leftarrow dt \cdot V_{i,0} \\ & \quad Do_{i,j} \leftarrow 1 + R^2 \cdot \left[ \frac{K_V \cdot V_{i,j} \cdot SJ_{i,j}}{\Delta z_i} - \frac{2 \cdot SJ_{i,j}}{(\Delta z_i)^2} \right] \\ & \quad dPz_i \leftarrow \frac{(P_{1i} - P_{k_i}) - (P_{1i-1} - P_{k_{i-1}})}{\Delta z_i} \\ & \quad KR1_{i,j} \leftarrow \frac{1}{\eta} \cdot dPz_i - \frac{K_V \cdot (V_{i,j})^2}{\Delta z_i} + \frac{4 \cdot V_{i,j} - 2 \cdot V_{i-1,j}}{(\Delta z_i)^2} \\ & \quad V_{i+1,j} \leftarrow V_n \cdot \frac{SJ_{i,j}}{Do_{i,j}} - R^2 \cdot KR1_{i,j} \cdot \frac{SJ_{i,j}}{Do_{i,j}} \\ & \quad z_{i+1} \leftarrow z_i + \Delta z_i \\ & \quad VU \leftarrow \frac{V}{\text{UnitsOf}(V)} \\ & \quad zU \leftarrow \frac{z}{\text{UnitsOf}(z)} \\ & \quad VUo \leftarrow \frac{V_o}{\text{UnitsOf}(V_o)} \\ & \quad PU_k \leftarrow \frac{P_k}{\text{UnitsOf}(P_k)} \\ & \quad \text{return}(VU \ zU \ VUo \ PU_k)^T \text{ if } V_{i+1,0} \leq 0 \\ & \quad \text{return}(VU \ zU \ VUo \ PU_k)^T \text{ if } V_{0i} \leq 0 \\ & \quad V_{o_{i+1}} \leftarrow \pi \cdot R^2 \cdot (L_k - z_{i+1}) \oplus P_{k_{i+1}} \leftarrow P_{k1} \cdot V_{o1} \cdot (V_{o_{i+1}})^{-1} \\ & \quad (VU \ zU \ VUo \ PU_k)^T \end{aligned}$$

$$V1 = \begin{pmatrix} \{208,1\} \\ \{208,1\} \\ \{207,1\} \\ \{208,1\} \end{pmatrix}$$

$$rw0 := \text{rows}(V1_0) - 4 \quad rw1 := \text{rows}(V1_1) - 1 \quad rw2 := \text{rows}(V1_2) - 1 \quad rw3 := \text{rows}(V1_3) - 1$$

$$V := \text{submatrix}(V1_0, 1, rw0, 0, 10) \cdot \frac{m}{s} \quad z := \text{submatrix}(V1_1, 1, rw1, 0, 0) \cdot m$$

$$Vo := \text{submatrix}(V1_2, 1, rw2, 0, 0) \cdot m^3 \quad P_k := \text{submatrix}(V1_3, 1, rw3, 0, 0) \cdot Pa$$

ствия следует учитывать изменение давления газа в закупоренной выходной части капилляра. Для этого воспользуемся уравнением состояния для идеального газа:

$$\rho_g(t) = \frac{M}{R_g \cdot T} \cdot P_g(t), \quad (30)$$

где  $\rho_g(t)$  – плотность воздуха;  $M$  – молекулярная масса воздуха;  $R_g$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – температура;  $P_g(t)$  – давление воздуха, создаваемое в закрытом канале.

Изменение плотности воздуха в закупоренном канале можно найти из уравнения неразрывности, которое в данном случае можно записать в

виде:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial \rho_g}{\partial z} = -\rho_g \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \quad (31)$$

По аналогии с тем, как были представлены соотношения (8), можно записать градиенты величин по координате  $z$  в разностной форме и в уравнении (31). Однако, в случае идеального газа задачу можно упростить, записав при этом такое выражение:

$$P_1 \cdot v_1 = P_i \cdot v_i, \quad (32)$$

где  $P_1, v_1$  – соответственно давление и удельный объем в начальный момент времени;  $P_i, v_i$  – соответственно давление и удельный объем в текущий момент времени  $t_i$ .

С учетом предположения о неизменности массы последнее выражения можно переписать так:

$$P_1 \cdot V_{01} = P_i \cdot V_{0i}, \quad (33)$$

где  $V_{01}, V_{0i}$  – объемы капилляра соответственно в начальный момент времени и в текущий момент времени  $t_i$ .

Расчеты для закрытого канала также проводились с помощью математического пакета MathCad.

Результаты расчета для закрытого отверстия приведены в программном блоке САПР-2. Объемный график изменения скорости в зависимости от времени и радиальной координаты представлен на рис. 9. Плоские графики изменения: высоты заполнения капилляра  $z$  от времени по оси капилляра и давления в закупоренной части канала приведены, соответственно, на рис. 10 и 11. При этом глубина канала составляла  $L_k=25$  мм.

Следует отметить, что определение нулей  $Z_k$ , а также исходные данные и первичные выражения для данного программного блока ничем не отличались от тех, которые приведены в программном блоке САПР-1, в связи с чем части 1 и 2 не приводятся.

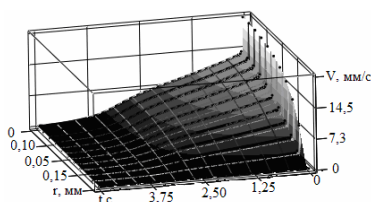


Рис. 9. Объемный график изменения скорости  $V$  для закрытого выходного отверстия в зависимости от времени и радиальной координаты при тех же параметрах, что и для рис. 2

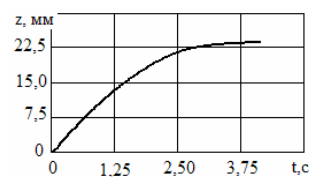


Рис. 10. График изменения высоты заполнения капилляра  $z$  от времени по оси капилляра при тех же параметрах, что и на рис. 9

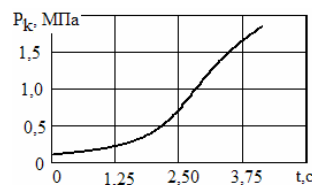


Рис. 11. График изменения давления в закупоренной части канала от времени по оси капилляра при тех же параметрах, что и на рис. 10 и 9

### Выводы

1. Разработаны математические модели, описывающие процессы заполнения капилляров с открытым и закрытым выходным отверстием.

2. Построены программные блоки на базе математического пакета Mathcad для моделирования процессов течения в капиллярах с целью оптимизации режимов работы.

3. Приведены аналитические зависимости и графики, позволяющие оценить оптимальное соотношение между технологическими параметрами, свойствами жидкости и геометрией капилляров.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей; пер. с англ. Г.В. Виноградова. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
2. Vxhme G. Strxmungsmechanik nicht-newtonscher fluids. – Stuttgart: V.G. Teubner, 1981. – 280 s.
3. Кузьяев И.М. Механіка та реологія полімерів: навч. посібн. [для студ. вищ. навч. закл.]. – Дніпропетровськ: УДХТУ, 2002. – 386 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям; пер. с нем. С.Ф. Фомина. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

Поступила в редакцию 29.05.2013