УДК 519.85

А.И. Косолап

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ СЕТЕЙ ДАТЧИКОВ

ГВУЗ «Украинский государственный химико-технологический университет», г. Днепропетровск

Рассмотрена задача размещения датчиков на различных объектах, которая сводится к решению квадратичной системы уравнений. Эта система равносильна оптимизационной задаче, в которой необходимо найти точку глобального минимума. Для решения последней задачи используется метод точной квадратичной регуляризации. Численные эксперименты подтверждают его эффективность для решения данного класса задач.

Введение

С каждым годом все большее число объектов требует установки датчиков для сбора данных и их обработки в компьютерных сетях. Такие датчики устанавливаются на атомных станциях, химических заводах, орбитальных станциях, военных объектах, в городах, офисах и на множестве других объектов. Количество датчиков может достигать тысяч единиц. Чем меньше датчиков, тем проще и дешевле информационная система. Поэтому необходимо избегать избыточности датчиков, рассчитывая для каждого объекта их минимальное количество, которое обеспечивает требуемые функции по сбору данных. Часто на объекте уже установлены датчики, но для сбора новых данных необходимо увеличить их число и, самое главное, определить координаты их размещения.

Задаче оптимального размещения датчиков на объектах посвящены многочисленные исследования [1–2]. Чаще для решения соответствующей задачи оптимизации используется полуопределенное программирование [2–3]. Этот математический аппарат иногда позволяет найти оптимальное расположение датчиков, однако, в общем случае, найденное решение будет лишь нижней оценкой искомого. Разрабатываются специальные методы для решения этого класса задач, но и они могут гарантировать точность решения лишь в частных случаях [2].

В работе использован новый метод точной квадратичной регуляризации, который был эффективным при решении многих сложных задач [4]. Этот метод позволяет преобразовывать сложные многоэкстремальные задачи к максимизации нормы вектора на выпуклом множестве. Для решения последней задачи могут быть использованы эффективные методы локальной оптимизации [5].

Постановка задачи и метод ее решения

Пусть a^i – координаты установленных на объекте датчиков ($a^i=(a^i_1, a^i_2, a^i_3)$), а x^j – координаты новых датчиков, которые предстоит определить. Каждый датчик имеет заданный радиус сбора данных, поэтому расстояние между установленными и новыми датчиками будем обозначать через d_{ij} (между i-м установленным и j-м новым), а расстояние между новыми датчиками через h_{jk} (между j-м новым и k-м новым). Тогда задача поиска координат новых датчиков сводится к решению квадратичной системы уравнений

$$\|a^i-x^j\|^2=d_{ij}^2,\ \forall\, i\neq j,\ \|x^j-x^k\|^2=h_{ij}^2, \forall\, j\neq k, \qquad (1)$$

где $\|.\|$ – евклидова норма вектора. Если n – число установленных датчиков, а m – число новых, то система (1) будет иметь 3m переменных и $nm+m(m-1)/2$ уравнений. Такая система не всегда будет иметь решение, поэтому добавим новые переменные u, v – отклонение от требуемых расстояний. Тогда решение квадратичной системы (1) сведется к оптимизационной задаче

$$\min\{\|u\|^2+\|v\|^2 | \|a^i-x^j\|^2=d_{ij}^2+u_{ij},\ \forall\, i\neq j,$$

$$\|x^j-x^k\|^2=h_{ij}^2+v_{jk}, \forall\, j\neq k, u i 0, v i 0\}. \qquad (2)$$

Число переменных задачи (2) равно $3m+nm+$ $+m(m-1)/2$. Очевидно что, если заданные расстояния между датчиками могут быть выдержаны, то значение целевой функции в задаче (2) будет равно нулю. Задача (2) всегда имеет решение и, лучшему расположению новых датчиков будет соответствовать ее точка глобального минимума. Допустимая область задачи (2) является достаточно сложной, что затрудняет ее решение. Используем метод точной квадратичной регуляризации [4] для преобразования задачи (2) к виду

$$\max\{\|z\|^2 \| \|u\|^2+\|v\|^2+s+(r-1)\|z\|^2\le d, \|a^i-x^j\|^2\le d_{ij}^2+u_{ij},$$

$$-\|a^i-x^j\|^2+r\|z\|^2+d_{ij}^2+u_{ij}\le d,\ \forall\, i\ne j,\ \|x^j-x^k\|^2\le h_{ij}^2+v_{jk},$$

$$-\|x^j-x^k\|^2+h_{ij}^2+v_{jk}\le d,\ \forall\, j\ne k, u\ge 0, v\ge 0\}, \tag{3}$$

где s,r – новые параметры, d – новая переменная, а компоненты вектора $z=(x,\ u,\ v,\ z_{p+1})$, $p=3m+nm+m(m-1)/2$. Число переменных задачи (3) равно $3m+nm+m(m-1)/2+2$. В задаче (3) необходимо найти минимальное значение переменной d, для которой выполнится условие $r\|z\|^2=d$. Параметр r достаточно положить равным 2, а s выбираем из условия $\|u^*\|^2+\|v^*\|^2+s i\|z^*\|^2$, где $z^*=(x^*, u^*, v^*)$ – решение задачи (2). Допустимая область задачи (3) будет выпуклой. Значение переменной d будем находить методом дихотомии. Найдем минимальное значение d, решая выпуклую задачу

$$\min\{d \| \|u\|^2+\|v\|^2+s+(r-1)\|z\|^2\le d, \|a^i-x^j\|^2\le d_{ij}^2+u_{ij},$$

$$-\|a^i-x^j\|^2+r\|z\|^2+d_{ij}^2+u_{ij}\le d,\ \forall\, i\ne j,\ \|x^j-x^k\|^2\le h_{ij}^2+v_{jk},$$

$$-\|x^j-x^k\|^2+h_{ij}^2+v_{jk}\le d,\ \forall\, j\ne k, u\ge 0, v\ge 0\}. \tag{4}$$

Если для ее решения выполнится условие $r\|z\|^2=d$, то задача (2) решена. В противном случае, $r\|z\|^2<d$, тогда выберем величину шага h и будем изменять переменную $d=d_0+h$, где d_0 – найденное значение целевой функции задачи (4). При увеличении d значение $r\|z\|^2$-d будет расти. По мере приближения значения $r\|z\|^2$-d к нулю величину шага следует уменьшить, если $r\|z\|^2$-d станет больше нуля, то переменную d уменьшаем. Таким образом, методом дихотомии будет найдено значение переменной d, для которой выполняется условие $r\|z\|^2=d$. Найденное решение используем в качестве начальной точки для решения задачи (2). Если при решении задачи (2) значение целевой функции уменьшится, то восстановим значения переменных z_{p+1}, d по формулам

$$z_{p+1}=\sqrt{s-\|x\|^2},\ d=r\|z\|^2.$$

Далее, снова будем решать задачу (3). Поиск по рассмотренному методу продолжаем до тех пор, пока значение целевой функции задачи (2) убывает. В противном случае процесс решение заканчивается и оптимальные координаты новых датчиков найдены.

Рассмотренный алгоритм решения задачи (2) включает поиск точки локального минимума задачи (3) и метод дихотомии для нахождения переменной d. Для задач локальной оптимизации в настоящее время наиболее эффективным является прямо-двойственный метод внутренней точки [5]. Выбор этого метода обусловлен также тем, что задача (3) при определенных условиях эквивалентна выпуклой задаче

$$\max\{c^T x \| \|u\|^2+\|v\|^2+s+(r-1)\|z\|^2\le d, \|a^i-x^j\|^2\le d_{ij}^2+u_{ij},$$

$$-\|a^i-x^j\|^2+r\|z\|^2+d_{ij}^2+u_{ij}\le d,\ \forall\, i\ne j,\ \|x^j-x^k\|^2\le h_{ij}^2+v_{jk},$$

$$-\|x^j-x^k\|^2+h_{ij}^2+v_{jk}\le d,\ \forall\, j\ne k, u\ge 0, v\ge 0\},$$

где с – центр шара минимального радиуса, описывающего выпуклую допустимую область этой задачи.

Учитывая то, что прямо-двойственный метод внутренней точки позволяет решать задачи с тысячами переменных [5], рассмотренный метод точной квадратичной регуляризации применим для решения практических задач расположения датчиков на любых объектах.

Разработано программное обеспечение для решения этого класса задач. Для примера 6-ти установленных датчиков с координатами (табл. 1) и 4-х новых датчиков с заданными расстояниями (табл. 2) методом точной квадратичной регуляризации найдены координаты новых датчиков (табл. 3).

Численные эксперименты проводились на двухъядерном процессоре Pentium Core i5 с частотой 2,5 ГГц.

Таблица 1

Координаты установленных датчиков

a_1^i	a_2^i	a_3^i
1	2	3
4	3	5
6	3	8
4	1	6
6	4	2

Таблица 2

Расстояния между датчиками

d_1^i	d_2^i	d_3^i	d_4^i	h_1^i
1	1	1	1	1
1	3	2	1	2
1	1	3	1	1
3	2	1	2	1
2	1	2	3	2
1	2	2	1	1

Таблица 3

Координаты новых датчиков

x_1^i	x_2^i	x_3^i
4,515148	2,447242	5,199951
4,603391	2,803716	5,027518
4,552285	2,763327	5,019866
4,561288	2,790263	5,11987

Выводы

Использован новый метод точной квадратичной регуляризации для оптимального расположения датчиков. Показано, что рассмотренная методика может быть использована для оптимального расположения большого числа датчиков. Проведенные численные эксперименты свидетельствуют об эффективности данного метода для решения многоэкстремальных задач оптимального расположения датчиков на объектах различной природы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Langendoen K., Reijers N.* Distributed localization in wireless sensor networks: a quantitative comparison // Computer Networks. – 2003. – Vol.43. – P.499-518.

2. *Niewiadomska-Szynkiewicz E., Markso M.* Optimization schemes forwireless sensor network localization // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. – 2009. – Vol.19. – № 2. – P.291-302.

3. *Sensor* Network Localization, Euclidean Distance Matrix Completions, and Graph Realization / Y. Ding, N. Krislock, J. Qian, H. Wolkowicz. – Waterloo: University of Waterloo, 2008. – 23 p.

4. *Косолап А.И.* Метод квадратичной регуляризации для решения систем нелинейных уравнений // Журн. обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – № 4. – С.44-50.

5. *Nocedal J., Wright. S.J.* Numerical optimization. – Springer, 2006. – 685 p.

Поступила в редакцию 10.06.2013