

## МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФРАКТАЛЬНОСТІ ЦІНОВОЇ ДИНАМІКИ НА ФОНДОВИХ РИНКАХ

*Фрактальний аналіз часових рядів є інформативним і корисним методом виявлення прихованих закономірностей в динаміці цін біржових активів. Для аналізу часових рядів фондових індексів підбрано цілий комплекс сучасних методів, що включає метод R/S-аналізу Херста, модифікований Ло метод R/S\*-аналізу, стандартний метод аналізу флуктуацій SAF, метод аналізу детрендованих флуктуацій ADF. В рамках теоретичного обґрунтування адекватності і ефективності застосування запропонованої комплексної методики, необхідно проаналізувавши теоретичні основи цих методів, провести порівняльний аналіз методів, виявити їх переваги та істотні обмеження, вказати можливості вдосконалення; привести специфічні для фондового ринку економічні інтерпретації результатів такого аналізу рядів.*

*Ключові слова: аналіз часових рядів, фрактальний аналіз, гіпотеза фрактального ринку, показник Херста, показники самоподібності, скейлінг, переміщення системи.*

A. SH. TULIAKOVA

Odessa I.I.Mechnikov National University

## METHODS OF INVESTIGATION OF FRACTALITY OF PRICE DYNAMICS ON STOCK MARKETS

*Fractal analysis of time series are considered to be particularly informative and useful method to identify hidden regularities in price dynamics. A special complex of modern methods has been chosen to analyze stock market indices time series, including: Hurst R/S-analysis method, Lo's modification of R/S\*-analysis method, method of standard fluctuation analysis SAF, method of detrended fluctuation analysis DFA. Within the theoretical justification of the adequacy and effectiveness of the proposed complex methodology: after analysis the theoretical basis of these methods, make comparative analysis methods, identify their advantages and inherent limitations; find ways to improve them; note specific economic interpretation of the results of this time series analysis for the stock market.*

*Keywords: time series analysis, fractal analysis, fractal market hypotheses, Hurst exponent, measures of self-similarity, scaling, displacement of system.*

### Вступ

З середини 1960-х років домінуючою науковою парадигмою була *гіпотеза ефективного ринку* (Фама), що базувалася на *концепції випадкових блукань цін* біржових активів (Башальє, Осборн, Самуельсон). В 1990-х роках видатний математик Бенуа Мандельброт, який відкрив світові прекрасну геометрію фракталів, повернувся до досліджень фінансових ринків, щоб запропонувати альтернативу, що більш вдало описувала реальну динаміку цін, – *гіпотезу фрактального ринку*. В своїй статті "A Multifractal Walk Down Wall Street" 1999р. він так пояснює адекватність нової *концепції фрактальної динаміки цін*:

"Фрактал – геометрична форма, що може бути поділена на частини, кожна з яких – зменшена версія цілого. В фінансах ця концепція – не безпідставна абстракція, а теоретичне переформулювання практичного біржового прислів'я – динаміка акцій або валюти зовнішньо подібна незалежно від масштабів часу і ціни. Спостерігач не може за зовнішнім виглядом графіку відрізнити, чи це є данні недільних, денних або годинних змін. Така властивість визначає графіки як фрактальні криві, і дає можливість застосувати потужні інструменти з математичного і комп'ютерного аналізу" [1].

Теорія фрактальних ринків почала стрімко розвиватися [2–5].

### Фрактальні властивості

Однією з основних властивостей фракталів є фрактальна розмірність, яка може описувати або фізично просторову структуру, або часовий ряд (точніше розуміти графік часового ряду). Фрактальна розмірність характеризує те, як об'єкт заповнює простір. Існує декілька способів обчислити фрактальну розмірність.

В основу одного з них покладено наступні міркування. Для звичайної гладкої кривої довжину  $L$  приблизно можна оцінити як добуток кількості однакових прямолінійних відрізків  $K(\delta)$ , що уміщаються на кривій, на довжину таких відрізків  $\delta$ , тобто  $L \approx L(\delta) = K \cdot \delta$ . Довжина кривої  $L$  визначається граничним переходом  $L = \lim_{\delta \rightarrow 0} (K \cdot \delta)$ .

У випадку фракталів добуток  $K \cdot \delta$  перетворюється в нескінченність, оскільки при  $\delta \rightarrow 0$  враховуються все більш дрібні деталі фракталу. Проте асимптотично ця збіжність до нескінченності відбувається згідно деякого чітко визначеного степеневому закону  $\delta^D$ . Це значення  $D$  називають *розмірністю Хаусдорфа* [6]. Хаусдорф довів, що існує *критичний показник*  $D \in \mathbb{R}$  (дійсне число) такий, що добуток  $K \cdot \delta^D$  при граничному переході  $\delta \rightarrow 0$  залишається скінченним. При показниках менших ніж  $D$ ,

добуток перетворюється в нескінченність, а при показниках, більших ніж  $D$ , збігається до нуля:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} K(\delta) \cdot \delta^d = \begin{cases} 0, & d > D \\ \infty, & d < D \end{cases}.$$

Дане визначення можна спростити, зробивши його зручнішим для практичного застосування:

$$\text{при } \delta \rightarrow 0 \quad K(\delta) \sim \frac{1}{\delta^D} \Leftrightarrow \ln K(\delta) \sim \ln \frac{1}{\delta^D} \Leftrightarrow \ln K(\delta) \sim -D \ln \delta, \text{ тобто } D \approx -\frac{\ln K(\delta)}{\ln(\delta)}$$

На практиці частіше використовується інший спосіб обчислення – *клітинна розмірність*. Замість прямолінійних відрізків розглядаються "клітинки" – квадрати із стороною  $\delta$ , розмірність  $D$  визначається

по ідентичній формулі  $D \approx -\frac{\ln K(\delta)}{\ln(\delta)}$  шляхом підрахунку  $K(\delta)$  як кількості клітинок, необхідних для

покриття кривої залежно від їх розміру.

Фрактальна розмірність часового ряду визначає ступінь зазубленості його графіку. Наприклад, пряма лінія має фрактальну розмірність, рівну одиниці  $D=1$ , а графік моделі випадкового блукання  $D=1.5$ . При значеннях  $1.5 < D < 2$  часовий ряд більш зазублений, ніж для моделі випадкового блукання, тобто має більше інверсій. Статистика часового ряду з фрактальними розмірностями, відмінними від 1.5, не обов'язково знаходиться в межах нормального розподілу.

Самоподібність – найважливіша властивість фракталів. Властивість самоподібності є якісною, тобто об'єкт або процес є статистично подібним в різних масштабах (просторових або часових). Кожен масштаб нагадує інші масштаби, але не ідентичний їм. Така властивість робить фрактал масштабно-інваріантним. Розкриємо сутність появи концепції фрактальності і самоподібності на зміні концепції випадкових блукань через аналогію.

Ейнштейн, вивчаючи броунівський рух, виявив, що відстань  $A$ , яку проходить випадкова частинка, збільшується пропорційно кореню квадратному з часу  $T$ , за який вона проходить цю відстань:  $A \sim \sqrt{T}$ .

У фінансовій економіці ця ідея використовується, наприклад, для перерахунку *волатильності* (яка визначена як *середньоквадратичне відхилення*) на період часу  $T$  по відомій волатильності  $\sigma(\tau)$  за період

$$\tau: \sigma(T) = \sigma(\tau) \sqrt{\frac{T}{\tau}}.$$

Ця формула припускає, що *середньоквадратичне відхилення*  $\sigma(T)$  доходів фондових активів збільшується як квадратний корінь з часу:  $\sigma(T) \sim \sqrt{T}$ , тобто показник волатильності  $\sigma(T)$  розглядається як аналог відстані  $A(T)$ , на яку "переміщується система" і його масштабування з часом відбувається так само як і в *системі випадкових блукань*.

Наразі в багатьох сучасних наукових дослідженнях показано, що ця формула невірна практично для всіх фінансових ринків і не описує їх істотні властивості: *наявність пам'яті* і схильність до *великих викидів*. Ці властивості ринку можуть бути враховані в моделі фрактальної природи ринків. Концепція фрактальності ринків стверджує, що ринки – *самоподібні на різних часових масштабах*. Відомо, що припущення про самоподібність (фрактальність) передбачає виконання деякої умови про степеневу залежність від масштабу, в якій і полягає сама суть поняття "самоподібного об'єкту".

Зокрема, волатильності, обчислені на базі різних часових інтервалів, співвідносяться за наступною формулою:  $\sigma(T) = \sigma(\tau) \cdot \left(\frac{T}{\tau}\right)^H$ , де  $H$  – *показник самоподібності*.

Тобто припускається справедливості співвідношення:  $\sigma(T) \sim T^H$ , яке означає, що масштабування "відстані, на яку переміщується система" відбувається згідно степеневому закону залежності від часу.

В випадку  $H=0.5$  отримуємо як окремий випадок *модель випадкових блукань*, інакше ряд вважається *фрактальним* (самоподібним). "Фрактальні криві відрізняються багатством структури – основи фрактальної геометрії і теорії хаосу." [1]

Методи фрактального аналізу часових рядів

Далі розглянемо методи обчислення для часових рядів декількох показників самоподібності, що характеризують масштабування трохі різних за змістом "переміщень системи" в залежності від часу:

1. метод R/S-аналізу Херста,
2. модифікований метод R/S\*-аналізу Ло,
3. стандартний метод аналізу флуктуацій,
4. метод аналізу детрендованих флуктуацій.

Всі ці методи були розроблені спеціально для *аналізу часових рядів* на наявність в них властивості самоподібності (в сенсі масштабування "переміщень системи" в залежності від часу), тому в рамках кожного з цих методів *перевіряється справедливості* деякого степеневому закону залежності від масштабу часу. На

рис. 1 зображено загальну схему таких методів, основою яких є умовно кажучи "матрьошка" з трьох рівнів обчислень.

На вхід алгоритму подається часовий ряд логарифмічних прибутковостей цін. Для цього ряду також будується ряд профілю накопичень, елементами якого є часткові суми, накопичені за попередній період. Це відбувається на етапі первинної обробки.

На виході кожного з цих методів обчислюється відповідний показник  $H$ , що і буде показником такої характеристики ряду динаміки, як самоподібність, тому їх називають показниками самоподібності (або фрактальності, або скейлінговості). І знов, в випадку якщо  $H = 0.5$  отримуємо *модель випадкових блукань*, інакше ряд вважається *фрактальним* (самоподібним, також кажуть, що ряд має скейлінгову структуру).

Сенс показника самоподібності  $H$  тлумачиться наступним чином.  $F$  є аналогом відстані, на яку переміщується система за час  $T = n$ . Значення  $F$  змінює масштаб по мірі збільшення приросту часу  $n$  пропорційно значенню степеневій функції  $n^H$ , де  $H$  – показник степеню. Це називається *масштабуванням із степеневою залежністю* (або інакше скейлінговою поведінкою показника):  $F = C \cdot n^H$ . Логарифмуючи цю рівність, отримуємо:  $\ln(F) = \ln C + H \ln(n)$ , це рівняння прямої в координатах  $(\ln(F(n)); \ln(n))$ . На рис.1 показано, що показник самоподібності  $H$  – тангенс кута нахилу прямої графіку залежності до осі абсцис в подвійних логарифмічних координатах

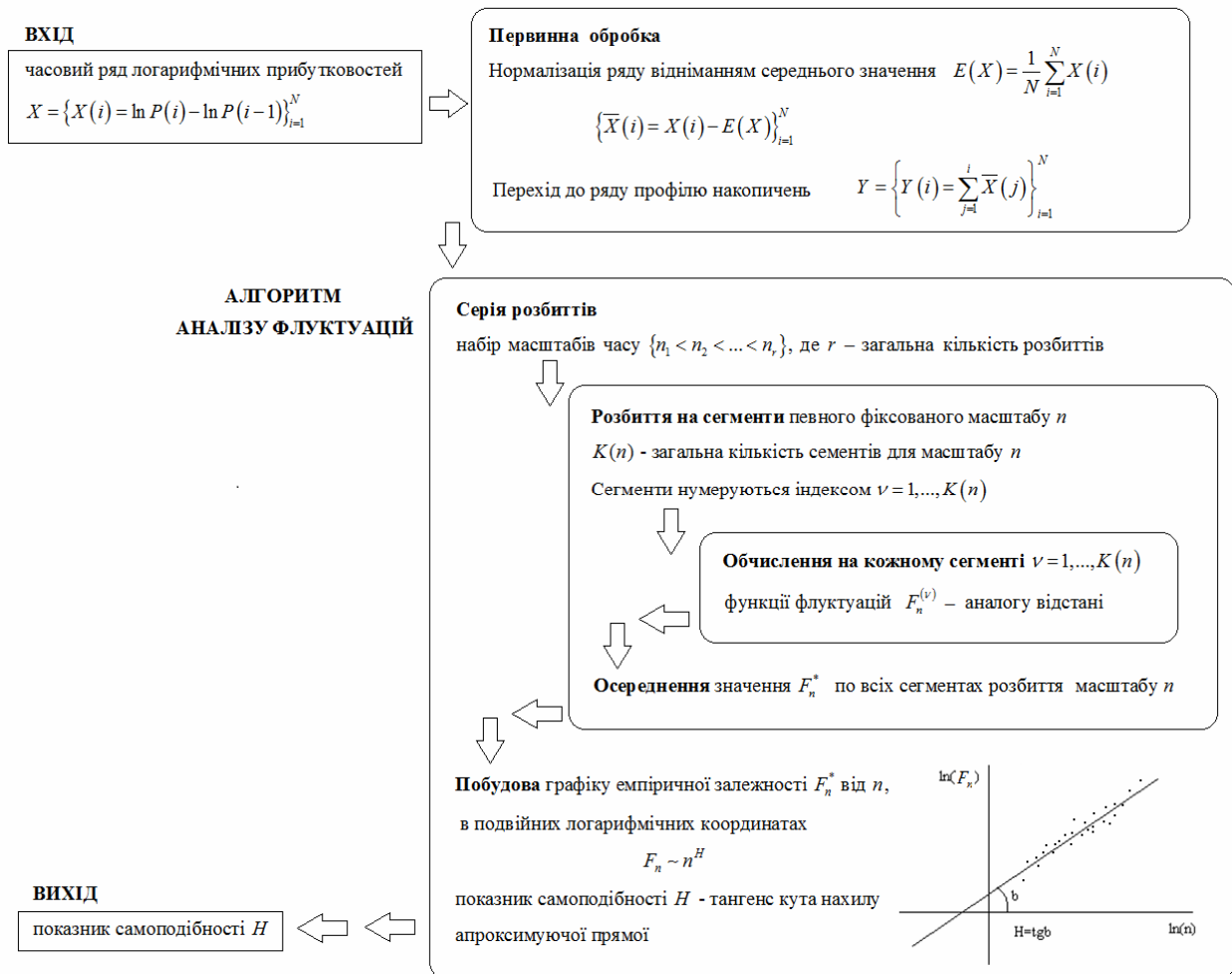


Рис.1. Узагальнена схема фрактального аналізу фінансових часових рядів. Побудова показника самоподібності

Методи дозволяють отримати оцінку показника самоподібності  $H$  з емпіричної залежності. Для цього певна величина "відстані"  $F$  обчислюється для підпоследовностей вхідного ряду різної довжини  $n$ . Щоб обчислене значення  $F_n$  для певного масштабу часу  $n$  було статистично інформативним, його треба оцінювати як середнє значення по деякій сукупності таких підпоследовностей однакової довжини  $n$ . Повторюючи розбиття і розрахунки середньої відстані  $F_n$  для всіх масштабів часу  $n \in \{n_1, n_2, \dots, n_r\}$ , отримуємо відповідний набір точок  $(n, F_n)$ . Будемо ці точки, що відображають *емпіричну залежність*  $F_n$  від  $n$ , в подвійних логарифмічних координатах. По графіку необхідно візуально оцінити можливість

адекватного наближення точок деякою прямою, що свідчатиме про справедливість степеневі залежності величини  $F_n$  від масштабу часу  $F_n \sim n^H$ . Тоді апроксимуємо точки графіку найближчою прямою, що визначається за допомогою методу найменших квадратів. Показник самоподібності  $H_{[R/S]}$  знаходимо як тангенс кута нахилу цієї апроксимуючої прямої. Описана процедура відповідає обчисленням на зовнішньому етапі алгоритму, що позначено на рис.1 "серія розбиттів для набору масштабів".

Зазначалося, що в якості аналогу відстані  $F_n$ , яку проходить система за час  $T = n$ , береться *середнє значення* по деякій сукупності підпоследовностей ряду однакової довжини  $n$ . Це відбувається на етапі алгоритму, що позначено на рис.1 як "розбиття на сегменти для фіксованого масштабу  $n$ ". Важливо розуміти, як правильно вибрати такі підпоследовності, і сформулювати статистично адекватну сукупність. Зазвичай для цього проводять так зване "розбиття часового ряду на сегменти". В такому контексті під "сегментом довжини  $n$ " розуміють підпоследовність, що складається з  $n$  точок і представляє собою цільний фрагмент часового ряду. Під "розбиттям на сегменти" мається на увазі відокремлення сегментів, так щоб вони не перетиналися, і покривали часовий ряд без пропусків. Зауважимо, що масштаб розбиття не може бути не занадто малим, щоб на сегментах такого масштабу робити певні обчислення, тому  $n_1 \geq 10$ , але і не може бути занадто великим, тому  $n_r \leq N/4$ , інакше оцінка втрачає статистичну інформативність, оскільки кількість сегментів  $K(n)$  стає дуже малою. Наприклад, для послідовності з 200 даних можливі такі розбиття: перше – на двадцять сегментів довжини  $n=10$ , друге – на десять з  $n=20$ , третє – на п'ять з  $n=40$ , четверте – на чотири з  $n=50$ . В загальному випадку необхідно обрати певне правило – спосіб визначення набору масштабів.

Проведено порівняльний аналіз цих методів, більш детально в роботі [7]. Порівнювати алгоритми зручно починаючи з внутрішнього етапу "розрахунків всередині сегментів", і послідовно піднімаючись на вищі етапи: конкретне розбиття для фіксованого масштабу, серія розбиттів для набору масштабів. Очевидна відмінність методів в тому, яку саме величину розглядають як аналог "відстані переміщення системи" на внутрішньому етапі. На етапі конкретного розбиття по-різному осереднюються значення по всім сегментам. Ці відмінності приведені в таблиці 1.

Таблиця 1

**Відмінності методів фрактального аналізу**

Метод	Означення функції $F$ аналогу відстані, на яку переміщується система за час $n$ , на сегменті $v$	Осереднення
R/S	<b>нормований розмах</b> $F_n^{(v)} = [R/S]_n^{(v)} = \frac{R_n^{(v)}(Y)}{S_n^{(v)}(X)}$ , розмах профілю на сегменті – $R_n^{(v)}(Y) = \max Y_n^{(v)} - \min Y_n^{(v)}$ , середньоквадратичне відхилення ряду на сегменті – $S_n^{(v)}(X) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X^{(v)}(i) - E_n^{(v)}(X)]^2}$ , де $E_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X(j)$	середнє арифметичне: $F_n = \frac{1}{K(n)} \sum_{v=1}^{K(n)} F_n^{(v)}$
R/S* Lo	<b>нормований розмах</b> $F_n^{(v)} = [R/S]_n^{(v)} \dots$ замінено $S$ в знаменнику $R/S$ більш складною сумою: $S_n^{(p)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X(j) - E_n(X))^2 + \Omega}$ $\Omega = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^p \varpi_p(j) \left( \sum_{i=j+1}^n (X(i) - E_n(X))(X(i-j) - E_n(X)) \right)$ ваги $\varpi_p(j) = 1 - \frac{j}{\rho+1}, \rho < n$	середнє арифметичне: $F_n = \frac{1}{K(n)} \sum_{v=1}^{K(n)} F_n^{(v)}$
SAF	<b>зсув профілю на сегменті</b> $F_n^{(v)} = (\text{close } Y_n^{(v)} - \text{open } Y_n^{(v)})$	середнє квадратичне: $F_n = \sqrt{\frac{1}{K(n)} \sum_{v=1}^{K(n)} [F_n^{(v)}]^2}$
ADF	<b>середньоквадратичне відхилення профілю від локального тренду:</b> $F_n^{(v)}(Y) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [Y^{(v)}(j) - Y^{(v)-TREND(m)}(j)]^2}$ , де локальний тренд – найближчий апроксимуючий поліном заданого порядку $m$ (тільки для $m \leq n-2$ ) на даному сегменті $v$ для профілю $Y_n^{(v)}$ (знаходиться методом найменших квадратів)	середнє квадратичне: $F_n = \sqrt{\frac{1}{K(n)} \sum_{v=1}^{K(n)} [F_n^{(v)}]^2}$

Також історично ці методи відрізнялися способом вибору послідовності масштабів розбиття, методом розбиття ряду на сегменти, але такі відмінності було виправлено для більш зручного порівняння результатів.

Способи визначення набору масштабів  $\{n_1 < n_2 < \dots < n_r\}$ . Масштаб часу (розмір сегментів) можна збільшувати в рази з певним коефіцієнтом  $\mu$ , а можна на деяку величину  $\varepsilon$ . Тоді автоматично в залежності від довжини ряду  $N$  буде визначатися загальна кількість розбиттів  $r$  (враховуючи  $10 \leq n \leq N/4$ ). Можна навпаки задати бажану кількість розбиттів  $r$ , і згідно з цим визначити значення параметру  $\mu$  або  $\varepsilon$ . Отже, отримано 4 способи формування набору масштабів часу для серії розбиттів часової послідовності на сегменти.

Спосіб розбиття на сегменти певного масштабу. Перша група сегментів визначається послідовним відокремленням з початку ряду суміжних сегментів довжини  $n$ , що не перетинаються. В кінці може залишитися фрагмент меншої довжини ніж  $n$ . Важливо врахувати всю інформацію закладену в часовий ряд, і навіть особливо значення в кінці. Тоді формується друга група сегментів – проводиться аналогічна процедура розбиття з кінця ряду. Тоді загальна кількість сегментів  $K(n) = 2k = 2 \cdot \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor$ . За способом розбиття зрозуміло, що сегменти першої групи перетинаються з сегментами другої групи.

#### Інтерпретації результатів фрактального аналізу

Метод R/S-аналізу, що був розроблений Мандельбротом і вдосконалений Петерсом [5] та іншими дослідниками, дозволяє обчислювати показник самоподібності, що називають коефіцієнтом Херста, на честь відомого британського гідролога, який використовував подібний показник в своєму попередньо створеному методі гідрологічного аналізу Херста [8], ідея цього методу і лягла в основу методу R/S-аналізу.

Показник Херста  $H_{R/S}$  вимірює інтенсивність довгострокових залежностей (також кажуть довгострокових кореляцій) у часовому ряді і його значення містить мінімальні відомості стосовно природи системи, що вивчається, по значенням показника можна відрізнити випадкові ряди від не випадкових, навіть якщо вони не є гаусові.

Відомо, що показник Херста  $H_{R/S}$  пов'язаний із клітинною фрактальною розмірністю  $D$  простим співвідношенням:  $H + D = 2$ . І це дає ще один метод обчислення фрактальної розмірності.

Класифікація рядів за значеннями показника Херста:

1)  $0.5 < H \leq 1$  – таке значення вказує на те, що ряду притаманна персистентна властивість. Ряд характеризується ефектами довгострокової пам'яті і має схильність дотримуватися трендів. Якщо ряд зростає (спадає) в попередній період, то скоріше за все він буде зберігати таку тенденцію ще деякий час в майбутньому. Трендостійкість поведінки збільшується при наближенні  $H$  до одиниці. Персистентний часовий ряд – найбільш розповсюджений тип, що зустрічається в природі, а також в економіці, і на фондових ринках. Такий ряд називають дрібним броунівським рухом або узагальненим броунівським рухом або фракталом. Ринок, що демонструє таку динаміку, називають фрактальним.

2)  $0 \leq H < 0.5$  – таке значення означає антиперсистентність, ряд міняє напрямок руху частіше, ніж випадковий ряд. Точки ряду (спостереження) – залежні і в цьому випадку, кожне з них несе пам'ять про попередні події. Ринок нестійкий. Чим ближчі значення  $H$  до нуля, тим нестійкішою є динаміка цін (за підйомом слідує падіння та навпаки).

3)  $H = 0.5$  – таке значення відповідає випадковому блуканню. Спостереження випадкові і незалежні. Такий процес повністю позбавлений пам'яті. Ринок в такому стані відповідає гіпотезі ефективності.

4)  $H > 1$  – дуже рідке явище. Виникають незалежні скачки амплітуди, розподілені за Леві.

Аналогічно класифікують ряди і модифіковані показники  $H_{R/S^*}, H_{SAF}$ . Проте сенс зазначених показників інтерпретується дещо інакше.

Модифікований метод R/S\*-аналізу. Ендрю Ло, професор MIT, виявив в своїх дослідженнях [9], що R/S-аналіз чутливий до короткострокових залежностей, і тому модифікував аналог відстані  $F$  (нормований розмах) таким чином, щоб його статистичні властивості залишалися інваріантними для широкого класу процесів з короткою пам'яттю, але змінювалися для процесів з довгою пам'яттю. Для цього він замінив  $S$  в знаменнику R/S більш складною сумою  $S^*$  (дивись формулу в таблиці), врахувавши, що дисперсія часткових сум не дорівнює сумі дисперсій окремих членів, вона повинна включати також автоковаріації. Відтак, оцінка повинна відображати не тільки суми квадратів відхилень, а й зважені автоковаріації до деякого лагу  $\rho$ . Використані ваги  $\pi_\rho(j)$  забезпечують додатність  $S_n^{(\rho)}$ .

Щодо обрання значення параметру лагу  $\rho$  варто врахувати наступні міркування. Занадто великі (у відношенні до  $n$ ) значення  $\rho$  призводять до того, що властивості оцінок у скінченних вибірках будуть істотно відрізнятися від їх асимптотичної поведінки. Але брати занадто маленькі значення  $\rho$  теж не можна, так як автоковаріації за лагом  $\rho$  можуть виявитися важливими, і їх слід було б включити в зважену суму.

Дональд Эндрюс, професор Єльського Університету, ввів для вибору  $\rho$  правило, засноване на властивостях ряду вхідних даних [10]. В якості  $\rho$  беруть цілу частину числа  $\tilde{\rho}_n = \left(\frac{3n}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{2\theta}{1-\theta^2}\right)^{2/3}$ , де  $\theta$  – оцінка коефіцієнта автокореляції першого порядку для ряду  $\{X(j)\}_{j=1}^n$ .

Стандартний метод аналізу флуктуацій SAF має декілька суттєвих відмінностей від R/S-аналізу, що відрізняє його інтерпретацію. В цьому методі в якості величини  $F_n^{(v)}$  розглядається саме відстань переміщення системи – зсув профілю на сегменті. Саме тому, коли проводиться осереднення значень  $F_n^{(v)}$  по всім сегментам  $v$ , в SAF для зсуву береться середньоквадратичне, а не середньоарифметичне. Очевидно, що розмах має завжди додатне значення, а зсув може бути будь-якого знаку, тому розглядати для зсуву середньоарифметичне не має сенсу, правильніше осереднювати абсолютне значення зсуву, і це легко врахувати обчисленням середньоквадратичного.

Метод аналізу детрендованих флуктуацій ADF. Перші 3 методи мають істотне обмеження, вони показують адекватні результати тільки для стаціонарних рядів, проте багато ринкових процесів виявляються нестационарними. Цього недоліку позбавлений більш сучасний метод *аналізу детрендованих флуктуацій*. Він передбачає видалення локальних трендів на всіх сегментах.

Локальний тренд розуміється як апроксимуючий поліном деякого фіксованого порядку  $m$ . Для апроксимації використовуються лінійні, квадратичні, кубічні поліноми чи поліноми вищого порядку (традиційно називаються ADF1, ADF2, ADF3 і т.д.). Наголосимо, що кожному значенню порядку полінома  $m$  відповідатиме окремий показник скейлінгу  $H_{[ADF(m)]}$ .

В даному методі, в якості показника  $F_n$ , аналога відстані, розглядається *середньоквадратичне відхилення* профілю від графіку побудованого тренду. Тобто при його обчисленні враховуються всі точки сегменту профілю, а не тільки дві точки сегменту, як для розмаху (точки максимального і мінімального значення) або зсуву (початкова і кінцева точки).

Переваги ADF порівняно з іншими методами полягають в тому, що він виявляє *довгострокові кореляції* нестационарних часових рядів, а також дозволяє ігнорувати очевидні *випадкові кореляції*, що є наслідком нестационарності.

Нарешті, порівняно з іншими методами, ADF дає більші можливості інтерпретації скейлінгового показника  $H_{[ADF(m)]}$  і так класифікує ряди:

- 1)  $H = 0.5$  також відповідає випадковому ряду;
- 2) при наявності лише *короткострокових кореляцій*  $H$  може відрізнитись від 0.5, проте має тенденцію прямувати до 0.5 при збільшенні розміру сегментів розбиття.
- 3) стабільне значення  $0.5 < H \leq 1$  показує персистентні *довгострокові кореляції*;
- 4) стабільне значення  $0 < H < 0.5$  означає антиперсистентний ряд;
- 5) для випадків  $H > 1$ , кореляції існують, проте перестають відображувати степеневу залежність.

Окрім можливості виявлення довгострокових кореляцій, метод аналізу детрендованих флуктуацій має ще одну важливу сферу застосування щодо виявлення прихованих закономірностей у вхідному ряді, яку можна отримати при комплексному застосуванні ADF різних порядків.

Оскільки, *процедура "детрендування"* (видалення локальних трендів) відбувається відніманням *апроксимуючих* значень полінома від *реальних* значень часового ряду, ADF різних порядків відповідно *відрізняються у своїх можливостях по вилученню тренду* в ряді. У ADF  $m$  ( $m$ -го порядку) вилучаються тренди профілю порядку  $m$  (або відповідно порядку  $(m - 1)$  для вхідного часового ряду). Таким чином порівняння результатів роботи ADF різних порядків використовується для визначення типу тренду у вхідному часовому ряді. Кожен тип тренду інтерпретується як виявлений певний вплив зовнішнього чинника на динаміку досліджуваного процесу. Таким чином при ADF вилучаються впливи *можливих трендів* для масштабів, більших від розміру сегменту. Отже, так як різні види ADF мають різні детрендові властивості, їх композиція може використовуватись для знаходження типів наявних у ряді трендів, що не можуть бути визначені з використанням традиційних методів, таких як спектральний аналіз.

Зауважимо, що *процедура нормування* вхідного ряду не обов'язкова, адже поступове зростаюче відхилення ненормованого профілю від нормованого (відхиляється на відповідне накопичення середнього) може бути видалено лінійним трендом під час *процедури детрендування*.

ADF використовується для визначення монофрактальних скейлінгових властивостей і довгострокових кореляцій в *за шумлених нестационарних* часових рядах. Проте багато економічних систем не демонструють простої *монофрактальної скейлінгової* поведінки, що може бути визначена одним показником скейлінгу.

В деяких випадках на часових шкалах існує кросовер  $T^*$ , що відділяє моделі з різною поведінкою, найчастіше, це довгострокові кореляції на малих масштабах часу  $t < T^*$  та кореляції іншого виду чи

некорельована поведінка на більших масштабах  $t > T^*$ . Наприклад, подивившись на рис. 2, можна зробити висновок про наявність точки кросоверу (зміни кута нахилу апроксимуючої прямої, вказана стрілкою). Ця точка свідчить про зміну фрактальності ряду на часових проміжках, більших ніж значення часової координати точки кросоверу.

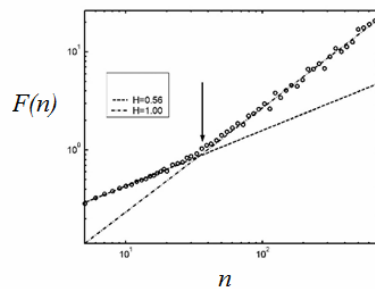


Рис. 2. Отримана методом ADF емпірична залежність, апроксимована двома прямими, що відображують зміну фрактальності часового ряду

Дослідження показують, що бувають ряди, які мають більш ніж одну точку кросоверу. Це говорить у загальному випадку про мультифрактальну природу економічних часових рядів.

Відмітимо, що одне розповсюджене порушення властивостей монофрактальності досліджуваного об'єкту, що вдалось помітити завдяки технології ковзного вікна: в багатьох реальних часових рядах скейлінгова поведінка змінюється для різних частин послідовності (вікон) та відповідно змінюється значення показників скейлінга.

Трапляються ще більш складні випадки, коли розглядаються накладені одна на одну множини із різною фрактальністю. Для таких випадків необхідно обчислювати набір показників скейлінга для повного опису поведінки об'єкта. Тоді застосовується мультифрактальний аналіз детрендованих флуктуацій MF-ADF [11], що є узагальненням методу ADF.

Перспективи цього дослідження полягають в застосуванні описаних методів фрактального аналізу і зазначеного методу мультифрактального аналізу в комплексі із застосуванням технології ковзного вікна для аналізу цінової динаміки на сучасних фондових ринках [7, 12, 13].

#### Висновки

Отже, застосування цих чотирьох методів дозволяє отримати цілий набір показників самоподібності  $\{H_{R/S}, H_{R/S^*}, H_{SAF}, \{H_{ADF(m)}\}_{m=1,2,\dots}\}$  (з різними аналогами відстані), що дає змогу досліднику зрозуміти з децю різних точок зору скейлінговість часового ряду. Таким чином ці методи взаємодоповнюють інформацію і можуть застосовуватися в комплексі.

Слід зазначити високу цінність застосування технології ковзного вікна для розрахунку показників  $\{H_{R/S}, H_{R/S^*}, H_{SAF}, \{H_{ADF(m)}\}_{m=1,2,\dots}\}$ , що дозволяє відстежувати можливість існування в часовій послідовності як персистентних, так і антиперсистентних ділянок. Аналіз динаміки локальних показників самоподібності може допомогти при інтерпретації суттєвих змін у динаміці системи.

#### Література

1. Mandelbrot B. A Multifractal Walk down Wall Street / Benoit B. Mandelbrot // Scientific American. – February 1999. – P. 70-73.
2. Mandelbrot B. Fractals and Scaling in Finance / Benoit B. Mandelbrot – Springer New York, 1997. – p.552.
3. Mandelbrot B. The (Mis)Behaviour of Markets / Benoit B. Mandelbrot, Richard L. Hudson – Basic Books, 2004. – p.328.
4. Peters E., Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices and Market Volatility / Edgar E. Peters – John Wiley & Sons, 2nd ed. 1996. – p.274.
5. Peters E., Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics / Edgar E. Peters – John Wiley & Sons, 1994. – p.315.
6. Feder J., Fractals / Jens Feder – Springer US, 2013. – p.283.
7. Тулякова А.Ш. Комплексна методика дослідження мульти- і моно- фрактальних властивостей динаміки фондового ринку. / А.Ш. Тулякова, М.П. Чайковська // Моделювання та інформаційні технології в економіці : колективна монографія ; ред. Соловйов. – Черкаси : Брама-Україна, 2014. – С. 32–61.
8. Hurst H.E. Long Term Storage Capacity of Reservoirs / H.E. Hurst // Transactions of the American Society of Civil of engineers. №116. 1951. – pp. 770-799.

9. Lo A.W. Long Term Memory in Stock Market Prices / A.W. Lo // *Econometrica*. №59. 1991. – pp.1279-1313.
10. Andrews D. Non-Strong Mixing Autoregressive Process / D. Andrews // *Journal of Probability*. №21. 1984. – pp.930-934.
11. Kantelhardt J.W. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series. / Jan W. Kantelhardt, Stephan A. Zschiegner, Eva Koscielny-Bunde, Armin Bunde, Shlomo Havlin and H. Eugene Stanley. // arXiv:physics/0202070v1 [physics.data-an] 27 Feb 2002.
12. Тулякова А.Ш. Моніторинг трансформаційних процесів на сучасних фондових ринках [Електронний ресурс] / А.Ш. Тулякова, М.П. Чайковська // *Економічний вісник Національного технічного університету України «Київський Політехнічний Інститут»*. 2014. – Режим доступу : <http://economy.kpi.ua/>
13. Тулякова А.Ш. Концепція комплексного інтелектуального аналізу динаміки фондових ринків / А.Ш. Тулякова, М.П. Чайковська // *Актуальні проблеми емерджентної економіки в контексті мережної парадигми : колективна монографія ; ред. Соловйов. – Черкаси : Брама-Україна, 2014. – С. 61–79.*

#### References

1. Benoit B. Mandelbrot, "A Multifractal Walk down Wall Street," *Scientific American*, Issue February 1999, pp. 70-73.
2. Benoit B. Mandelbrot, *Fractals and Scaling in Finance*, Springer New York, 1997, p.552.
3. Benoit B. Mandelbrot, Richard L. Hudson, *The (Mis)Behaviour of Markets*, Basic Books, 2004, p.328.
4. Edgar E. Peters, *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices and Market Volatility*, John Wiley & Sons, 2nd ed 1996, p.274.
5. Edgar E. Peters, *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, John Wiley & Sons, 1994, p.315.
6. Jens Feder, *Fractals*, Springer US, 2013, p.283.
7. A. Tuliakova and M.P.Chaykovska, "Kompleksna metodika doslidzhennya multi- i mono-fraktalnih vlastivostey dinamiki fondovogo rinku," *Modelyuvannya ta informatsiyi v ekonomitsi. Kolektivna monografiya*. Cherkasi: Brama-Ukrayina, 2014, pp.32-61.
8. H.E. Hurst, "Long Term Storage Capacity of Reservoirs," *Transactions of the American Society of Civil of engineers*. Issue №116, 1951, pp. 770-799.
9. A.W. Lo, "Long Term Memory in Stock Market Prices," *Econometrica*. Issue №59, 1991, pp.1279-1313.
10. D. Andrews, "Non-Strong Mixing Autoregressive Process," *Journal of Probability*. Issue №21, 1984, pp. 930-934.
11. Jan W. Kantelhardt, Stephan A. Zschiegner, Eva Koscielny-Bunde, Armin Bunde, Shlomo Havlin and H. Eugene Stanley, *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series*, arXiv:physics/0202070v1 [physics.data-an] 27 Feb 2002.
12. A. Tuliakova and M.P.Chaykovska, "Monitoring transformatsiynih protsesiv na suchasnih fondovih rinkah," *Ekonomichnyi visnik Natsionalnogo tehnicnogo universitetu Ukrayini «Kiyivskiy Politehnicniy Institut»*, 2014, <http://economy.kpi.ua/>
13. A. Tuliakova and M.P.Chaykovska, *Kontseptsiya kompleksnogo intelektualnogo analizu dinamiki fondovih rinkiv*," *Aktualni problemi emerdzhentnoyi ekonomiki v konteksti merezhnoyi paradigmi*, *Kolektivna monografiya*. Cherkasi: Brama-Ukrayina, 2014, pp.61-79.

Надійшла 05.09.2014; рецензент: д. е. н. Садченко О. В.