

УДК 519.866:332.1

ВІЛЬЧИНСЬКА О. М., ПАНОЧИШИН Ю. М., КУШНІР Т. О.

Вінницький навчально-науковий інститут економіки Тернопільського національного економічного університету

## ВИЗНАЧЕННЯ МОЖЛИВОСТЕЙ ЗАСТОСУВАННЯ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА ЯК ІНСТРУМЕНТУ УПРАВЛІННЯ ВИРОБНИЧИМИ РЕСУРСАМИ РЕГІОНУ

*У статті розглянуто модель Кобба-Дугласа для аналізу та управління виробничими ресурсами регіону. Функція Кобба-Дугласа побудована на основі статистичних даних по Вінницькій області за період з 2005 по 2014 р. Для визначення невідомих параметрів моделі, а також перевірки адекватності було використано табличний процесор Excel. У результаті перевірки розробленої моделі за різними критеріями встановлено, що модель є адекватною, і відповідно може використовуватися для аналізу. Визначено переваги та недоліки використання такої моделі для аналізу та прогнозування. Також визначено показники ефективності використання ресурсів.*

*Ключові слова: виробнича функція Кобба-Дугласа, виробничі ресурси, адекватність, ефективність, продуктивність, еластичність.*

VILCHYNSKA O. M., PANOCHYSHYN Y. M., KUSHNIR T. O.

Vinnitsia Educational and Scientific Institute of Economics of Ternopil National Economic University

## DETERMINATION OF OPPORTUNITIES OF COBB-DOUGLAS PRODUCTION FUNCTION AS A MANAGEMENT TOOL OF THE REGIONAL PRODUCTION RESOURCES

*In the article there is described the Cobb-Douglas model for the analysis and management of the regional production resources. The Cobb-Douglas function is built on the basis of statistical data of Vinnytsia region during the period from 2005 till 2014. The Excel spreadsheet program was used to determine the unknown parameters and model adequacy testing. As the result of the model testing according to various criteria it has been proved that it can be used for analysis. There are determined the advantages and disadvantages of the model use with the purpose of analysis and forecasting. The indexes of resources production efficiency have been also defined.*

*Keywords: Cobb-Douglas production function, production resources, adequacy, efficiency, productivity, flexibility.*

**Постановка проблеми.** Щоб уникнути ризику при прийнятті управлінських рішень в умовах безперервних фінансово-економічних змін, що переживає сучасний світ, в тому числі Україна, необхідно постійно підвищувати ступінь інформованості персоналу організацій, який розробляє, обґрунтовує і приймає ці рішення. Потреба виробництва у достатній, достовірній інформації обумовлює необхідність використання сучасного методичного інструментарію, що дозволяє одержати такі відомості, які неможливо отримати традиційними методами. Таким чином, на сьогодні актуальним є застосування виробничих функцій, в тому числі функції Кобба-Дугласа. Адже виробничі функції як апарат пізнання, покликаний розширити аналітичні можливості дослідження, особливо у напрямку факторного аналізу, що дозволяє виявити і мобілізувати резерви виробництва.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Виробнича функція вперше була побудована американськими дослідниками Ч. Коббом і П. Дугласом у 1928 р. Значний внесок у дослідження теоретичних і прикладних аспектів виробничої функції зробили такі зарубіжні і вітчизняні науковці, як Л.М. Благодир, О.В. Мороз [1], Б.Є. Грабовецький, І.В. Шварц [2], В.Я. Гуменюк, Н.Б. Ярошевич [3] та ін. У їх публікаціях розкрито сутність поняття "виробнича функція", охарактеризовано переваги та недоліки застосування виробничої функції Кобба-Дугласа для аналізу та прогнозування виробництва як на мікро-, так і на макрорівні.

**Виділення невирішених раніше частин проблеми.** Однак не дивлячись на значний інтерес до проблематики виробничих функцій і значну кількість досліджень, в цій області все ще залишається простір для наукових досліджень. Так, на нашу думку, на даний момент, немає такого широкого застосування виробничої функції Кобба-Дугласа, в теорії і практиці управління регіонами не використовують у повній мірі усі можливості математичних методів. Елементи математичного моделювання економічних процесів і явищ реалізуються переважно за допомогою рівняння регресії, яке відповідає на питання "що". В той же час параметри рівняння виробничої функції додатково відповідають на питання "наскільки", "в якій мірі", "чому". Досягається це шляхом розрахунку системи показників, в яких закладений певний економічний зміст, що дозволяє значно підвищити аналітичні можливості моделі.

**Мета дослідження** – теоретично обґрунтувати використання виробничої функції Кобба-Дугласа в економічних дослідженнях і пов'язати дослідження теоретичних питань з практичними задачами управління виробничими ресурсами.

**Результати дослідження.** Найпоширенішим підходом до визначення найдоцільнішої комбінації виробничих ресурсів у виробничому процесі для отримання максимального прибутку є методологія

побудови та верифікації виробничих функцій.

Виробнича функція – це функція, незалежні змінні якої приймають значення обсягів ресурсів, що витрачаються, а залежна змінна – значення обсягів випущеної продукції [4, с. 53].

Однією з найвідоміших виробничих функцій, яка використовується в макроекономічних дослідженнях, є модифікована виробнича функція Кобба-Дугласа. Вперше така функція була побудована американськими дослідниками Коббом і Дугласом у 1928 р. на основі даних про функціонування обробної промисловості США протягом двадцяти років, і є класичним прикладом економетричного моделювання.

У практичних задачах виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд [5]:

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}, \quad (1)$$

де  $Y$  – обсяг продукції;

$K$  – обсяг основного капіталу або обсяг основних фондів, що використовуються;

$L$  – середньорічна чисельність працівників (витрати живої праці);

$a_0, a_1, a_2$  – параметри моделі.

Популярність цієї функції серед економетриків можна пояснити такими її перевагами [3, с. 158]:

1. Нелінійність. Залежність результату від витрат має нелінійний характер, і не містить недоліків, характерних для лінійних виробничих функцій.

2. Динамічність. Розбіжність між реальністю і класичними динамічними моделями настільки велика, що можна стверджувати, що на даний момент динамічні моделі не мають практичного застосування.

3. Простота. Функція є простою, а тому привабливою для практичного застосування в управлінні виробничими ресурсами.

Але незважаючи на вказані переваги, виробнича функція Кобба-Дугласа має також ряд недоліків [3, с. 160]:

1. Проблема ефекту масштабу. Багато економістів вважають, що виробнича функція з постійним ефектом масштабу неадекватно відображає виробничий процес.

2. Проблема встановлення параметрів виробничої функції – показників еластичності випуску продукції по ресурсах. Граничні ціни факторів виробництва дорівнюють середнім цінам, які обчислюються на основі ринкових, що можливо лише в умовах ринкової рівноваги та досконалої конкуренції.

3. Модель Кобба-Дугласа була створена як інструмент аналізу на макрорівні – в її основі лежить припущення про повну взаємозамінність виробничих ресурсів.

4. Ігнорування фактору комплементарності – нехтування структурою капіталу у виробничій функції.

При побудові виробничих функцій для окремого регіону чи країни в цілому в якості величини річного випуску беруть сукупний продукт (дохід) регіону  $Y$ , а в якості ресурсів розглядають обсяг основного капіталу  $K$ , який використовувався на протязі року і кількість одиниць праці  $L$ , що витрачається на протязі року, які, зазвичай, вимірюються у вартісному вигляді. У результаті будується двофакторна виробнича функція  $Y = f(K, L)$ . Далі від двофакторних виробничих функцій переходять до трифакторних, при цьому в якості третього фактору можна взяти обсяг використовуваних природних ресурсів. Крім того, якщо виробничі функції будуються по даних часових рядів, то в якості особливого фактора росту виробництва можна включити технічний прогрес.

Проаналізуємо модель виробничої функції Кобба-Дугласа, що описує залежність між валовим регіональним продуктом та витратами основного капіталу і праці на прикладі Вінницької області на основі статистичних показників за 10 років (див. табл. 1).

Рівняння виробничої функції дає можливість оцінити як ізольований вплив окремих факторів на досліджуваний показник, так і їх сукупний вплив. Включення у модель первинних факторів дозволяє в найбільшій мірі розкрити резерви виробництва. Оскільки рівняння виробничої функції відображає в деякій мірі реально існуючий процес (явище), воно саме може стати об'єктом аналізу, виконуючи тим самим аналітичні функції. Зокрема, в процесі реалізації моделей формується система основних і проміжних параметрів, в яких закладений певний економічний зміст і аналіз яких дозволяє розкрити резерви виробництва, оцінити оптимальні сполучення окремих ресурсів. До таких показників відносяться коефіцієнт еластичності, гранична продуктивність, гранична норма заміщення тощо.

Проведемо дослідження виробничої функції Кобба-Дугласа.

Для цього обидві частини рівняння виробничої функції (1) прологарифмуємо [4]:

$$\ln Y = \ln a_0 + a_1 \ln K + a_2 \ln L. \quad (2)$$

Зробимо заміни:  $Y_1 = \ln Y$ ;  $X_1 = \ln K$ ;  $X_2 = \ln L$ ;  $a = \ln a_0$ .

В результаті отримаємо лінійну функцію:

$$Y_1 = a + a_1 X_1 + a_2 X_2. \quad (3)$$

Для визначення невідомих параметрів моделі, а також перевірки адекватності моделі було використано табличний процесор Excel (див. табл. 2, табл. 3) [4, 7].

В результаті було отримано такі значення параметрів:  $a_1 = 0,876438$ ,  $a_2 = 0,013166$ ,  $a = 0,521410$ .

Таким чином, лінійна функція набуває вигляду:

$$Y_1 = 0,521410 + 0,876438X_1 + 0,013166X_2 \quad (4)$$

Таблиця 1

## Статистичні дані по Вінницькій області [4] для розрахунку моделі

Рік $t$	Валовий регіональний продукт, млн грн. $Y(t)$	Капітал (млн грн.) $K(t)$	Чисельність працівників (тис. чол.) $L(t)$	$Y_1 = \ln Y$	$X_1 = \ln K$	$X_2 = \ln L$
2005	9350	17452,1	723,0	9,1431	9,7672	6,5834
2006	11350	22179,4	722,6	9,3370	10,0069	6,5829
2007	14252	27790,2	726,8	9,5647	10,2324	6,5887
2008	18597	35245,4	725,6	9,8308	10,4701	6,5870
2009	18957	47102,5	693,5	9,8499	10,7601	6,5418
2010	22128	38544,7	694,3	10,0046	10,5596	6,5429
2011	26622	47559,0	698,7	10,1895	10,7697	6,5492
2012	28995	66419,2	701,1	10,2749	11,1037	6,5527
2013	32740	69995,9	704,6	10,3964	11,1562	6,5576
2014	31535	68821,7	661,6	10,3589	11,1393	6,4947
Сума	214526	441110,1	7051,8	98,9496	105,9653	65,5807
Середнє	21452,6	44111,01	705,18	9,89496	10,59653	6,55807

Виконавши зворотнє перетворення  $a_0 = e^a = e^{0,521410} = 1,684409$ , отримаємо функцію Кобба-Дугласа:

$$Y = 1,684409 \cdot K^{0,876438} \cdot L^{0,013166} \quad (5)$$

Таблиця 2

## Показники регресійної статистики

Множинний $R$	0,9747
R-квадрат ( $R^2$ )	0,9499
Нормований R-квадрат ( $R^2$ )	0,9357
Стандартна помилка	0,1102
Спостереження	10

Таблиця 3

## Показники дисперсійного аналізу

	$Df$	$SS$	$MS$	$F$
Регресія	2	1,6165	0,80823	66,49358
Залишок	7	0,085085	0,01215503	
Разом	9	1,701549		
	Коефіцієнти	Стандартна помилка	$t$ -статистика	
$Y$ -перетин	0,521410	12,775746	0,040813	
Змінна $\ln K$	0,876438	0,1094925	8,00455	
Змінна $\ln L$	0,013166	1,8167833	0,00725	

$R$ -квадрат характеризує частку варіації залежної змінної, обумовленою регресією або мінливістю пояснюючих змінних (вказує на адекватність моделі). У нашому випадку  $R$ -квадрат (0,9499) близький до 1, що говорить про високу якість даної моделі, тобто регресія добре описує залежність між змінною  $Y$  і змінними  $K$  і  $L$ .

Логічна адекватність рівняння – це здатність рівняння адекватно, або іншими словами, найбільш точно відобразити природу досліджуваних явищ (процесів). Для багатофакторних рівнянь оцінка логічної адекватності полягає, насамперед, у відповідності знаків при невідомих економічній інтерпретації взаємозв'язків кожного фактора з результативним показником. Отже, залежності між факторами (ресурсами) і результативним показником повинні бути прямі. Тому додатні знаки перед параметрами ( $a_1$ ,

$a_2$ ) цілком обґрунтовані, оскільки зростання (зниження) будь-якого фактора відповідно призведе до збільшення (скорочення) обсягу виробництва [2].

Статистична адекватність означає відповідність моделі встановленим межах статистичних характеристик, зокрема, множинний коефіцієнт кореляції, середня помилка апроксимації,  $F$  – критерій Фішера,  $d$  – статистика (критерій Дарбіна-Уотсона). За проведеними розрахунками множинний коефіцієнт кореляції  $R = 0,9747$ , стандартна помилка апроксимації  $0,1102$ ,  $F$  – критерій Фішера  $66,49$ .

Відтак, побудована виробнича функція відзначається високими і надійними статистичними характеристиками. Значення множинного коефіцієнта кореляції свідчить про високу тісноту зв'язку результативного показника з відібраними факторами. Він характеризує сукупний вплив факторів на рівень результативного показника, свідчить, що варіація обсягу виготовленої продукції на 94,9% залежить від коливання включених у рівняння факторів і лише на 5,1% – від факторів що не враховуються. Це свідчить, що у складі моделі враховані найважливіші фактори. Крім множинного коефіцієнта кореляції про адекватність рівняння свідчить і мале значення середньої помилки апроксимації, яка характеризує середнє відносне відхилення між фактичним і теоретичними значеннями на основі побудованого рівняння.

Оскільки табличне значення критерію Фішера і статистики для 5% похибки відповідно дорівнює  $F_{кр} = 4,74$ , то враховуючи що  $F > F_{кр}$  ( $66,49 > 4,74$ ), модель адекватна.

Таким чином, можна дійти висновку, що побудоване рівняння відповідає всім вимогам і може бути використане для проведення економічного аналізу.

З отриманої функції легко визначаються ряд загальноприйнятих показників, що характеризують ефективність використання виробничих ресурсів.

Обчислимо показники ефективності:

Капіталовіддача

$$A_1 = a_0 x_{1cep}^{a_1-1} x_{2cep}^{a_2} = 1,684409 \cdot 10,59653^{0,876438-1} \cdot 6,55807^{0,013166} = 1,289824. \quad (6)$$

На одиницю затрат капіталу випуск продукції становить 1,3 одиниць.

Продуктивність праці

$$A_1 = a_0 x_{1cep}^{a_1} x_{2cep}^{a_2-1} = 1,684409 \cdot 10,59653^{0,876438} \cdot 6,55807^{0,013166-1} = 2,084096. \quad (7)$$

На одиницю затрат праці випуск продукції становить 2,1 одиниць.

Гранична продуктивність основного капіталу

$$M_1 = a_0 x_{1cep}^{a_1-1} x_{2cep}^{a_2} a_1 = A_1 a_1 = 1,289824 \cdot 0,876438 = 1,130451. \quad (8)$$

Якщо обсяг витрат капіталу збільшиться на одиницю, обсяг випуску збільшиться на 1,130 одиниць при незмінних обсягах праці.

Гранична продуктивність праці

$$M_2 = a_0 x_{1cep}^{a_1} x_{2cep}^{a_2-1} a_2 = A_2 a_2 = 2,084096 \cdot 0,013166 = 0,027440. \quad (9)$$

Якщо обсяг витрат праці збільшиться на одиницю, обсяг випуску збільшиться на 0,027 одиниць при незмінних обсягах капіталу.

Частинна еластичність випуску по капіталу

$$E_1 = \frac{M_1}{A_1} = \frac{1,130451}{1,289824} = 0,876361. \quad (10)$$

Якщо витрати капіталу збільшаться на 1%, випуск збільшиться на 0,87% при незмінних витратах праці.

Частинна еластичність випуску по праці:

$$E_2 = \frac{M_2}{A_2} = \frac{0,027440}{2,084096} = 0,013166. \quad (11)$$

Якщо витрати праці збільшаться на 1%, випуск збільшиться на 0,013% при незмінних витратах капіталу.

Еластичність виробництва

$$E_x = E_1 + E_2 = 0,876361 + 0,013166 = 0,889527. \quad (12)$$

Якщо витрати капіталу і праці збільшаться на 1%, випуск продукції збільшиться на 0,89%.

Всі ці вищенаведені показники є частинними показниками ефективності використання виробничих ресурсів і відображають відношення випуску продукції до затрат будь-якого з виробничих факторів. Аналіз по кожному конкретному статистичному показнику є однофакторним, динаміка будь-якого частинного показника недостатньо ефективно характеризує ефективність виробництва.

**Висновки.** У статті розроблено модель Кобба-Дугласа, яка описує залежність між валовим регіональним продуктом та витратами основного капіталу і праці на прикладі Вінницької області. В результаті перевірки розробленої моделі за різними критеріями встановлено, що модель є адекватною, і відповідно може використовуватися як інструмент для аналізу та управління виробничими ресурсами регіону. Також визначено показники ефективності використання ресурсів.

**Література**

1. Благодир Л.М. Визначення перспектив розвитку переробних підприємств олійно-жирової галузі України на основі виробничої функції Кобба-Дугласа / Л.М. Благодир, О.В. Мороз, Б.Є. Грабовецький // Актуальні проблеми економіки. – 2010. – № 2. – С. 241–251.
2. Грабовецький Б.Є. Виробничі функції в економічних дослідженнях / Б.Є. Грабовецький, І.В. Шварц // Вісник СумДУ. Серія Економіка. – 2013. – № 1. – С. 60–68.
3. Гуменюк В.Я. Переваги та недоліки застосування функції Кобба-Дугласа як інструменту управління виробничими ресурсами транспортних підприємств / В.Я. Гуменюк, Н.Б. Ярошевич // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Проблеми економіки та управління. – 2000. – № 391. – С. 157–162.
4. Погрішук Б.В. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / Б.В. Погрішук, О.М. Лисюк. – Тернопіль : Крок, 2010. – 372 с.
5. Ткаченко І.С. Регіональна економіка: аспекти математичного моделювання : монографія / І.С. Ткаченко, О.М. Лисюк. – Вінниця : ГЛОБУС-ПРЕС, 2006. – 160 с.
6. Головне управління статистики у Вінницькій області [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.vn.ukrstat.gov.ua>.
7. Щука В.Г. Обґрунтування вибору факторів, які чинять вплив на чистий прибуток енергопостачального підприємства ПАТ "Хмельницькобленерго" для його моделювання / В.Г. Щука, Я.І. Щипанова // Вісник Хмельницького національного університету. – 2015. – № 1. – С. 105–108.

Надійшла 03.03.2016; рецензент: д. е. н. Сірко А. В.