

ВИКОРИСТАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ В ЕКОНОМІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ

У статті визначено нові підходи до використання комплексних змінних в економічних розрахунках з урахуванням просторової або часової затримки. Проведено обґрунтування економічного еквівалента вартості у вигляді комплексних змінних та аналіз можливості використання комплексної вартості для розв'язання найпростіших економічних задач.

Ключові слова: комплекснозначна економіка, комплексні змінні.

LISHCHYNSKA L. B.

Vinnytsia Institute of Trade and Economics of Kyiv National University of Trade and Economics

USING OF THE COMPLEX VARIABLES IN ECONOMIC CALCULATIONS

In this article certainly new going near the use of complex variables in economic calculations taking into account a spatial or sentinel delay. The ground of economic equivalent cost as complex variables and analysis of possibility of the use of complex cost is conducted for the decision of the simplest economic tasks. Using of complex economic units allows to pass from the one dimensional decision of task to three-dimensional, gives possibility by sight to represent on the complex plane of economic a process which is forecast, and the got results open the prospect of optimization of decision of such economic tasks. It is showed that an economic operation will be unprofitable in the case of receipt of results in II and III quadrants of complex plane, and work in the IV quadrant with passing can give an additional profit. Perspective is subsequent research of influence of additional constituents of process: imaginary component of calculations and module of aggregate actual and imaginary constituents of process, which also can bring in additional information in an economic process which is examined.

Key words: complex-valued economic, complex variables.

Постановка проблеми. Введення комплексних чисел у різноманітні математичні розрахунки, на відміну від використання у таких розрахунках тільки дійсних чисел, розширює аналітичні можливості досліджень у різних галузях науки і техніки [1]. Але економічні науки, як правило, оперують тільки з дійсними числами. Економіка як об'єкт для наукового дослідження і пізнання є не менш складною, чим розділи інших наук, тому стосовно економіки комплексні змінні можуть дати точніший опис процесів, що відбуваються у ній, і за допомогою цих змінних можна побудувати складніші моделі, ніж з використанням тільки дійсних змінних.

Моделі і математичні методи роботи з комплексними змінними розглядаються не як деяка альтернатива моделям і методам дійсних змінних, а як інструмент, який доповнює і розширює існуючий арсенал економіко-математичного моделювання. Комплексна змінна сама по собі може розглядатися як модель, яка характеризує властивості об'єкту більш комплексно, оскільки складається з двох змінних (дійсної та уявної), а не з однієї, що характерно для моделей з використанням тільки дійсних змінних.

Комплекснозначна економіка [2] надає економісту новий інструмент дослідження, а чим багатобразніший цей інструмент, тим ширше коло завдань може вирішити дослідник. Є безліч випадків, коли комплекснозначні моделі якраз відповідають економічному сенсу процесу, що вивчається, і описують його значно краще за моделі дійсних змінних. Найяскравіше це виявляється для ступеневої комплекснозначної виробничої функції з дійсними коефіцієнтами, яка описує складний вплив витрат капіталу і витрат праці як на прибуток, так і на витрати виробництва, моделі дійсних змінних тут не є такими актуальними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В останнє десятиліття спостерігаються спроби введення комплексних чисел і в економічні розрахунки [2–6]. Їх використання, як правило, базується на розгляді таких економічних розрахунків, коли корені рішення алгебраїчних рівнянь є комплексними, але такі рішення є рідкісними. Суттєвий внесок у розробку теоретичних та прикладних аспектів комплекснозначної економіки зробили такі науковці, як С.Г. Светуньков, А.В. Заграновська, Т.В. Меркулова, Ф.І. Приходько та інші.

Виділення невирішених частин загальної проблеми. Аналіз наукової літератури із зазначеної проблематики свідчить про те, що окремі питання, пов'язані з використанням комплексних змінних в економічних розрахунках досліджено недостатньо.

Саме тому, визначення наукових підходів, які використовують в економічних розрахунках властивості комплексних чисел характеризувати співвідношення між його складовими з урахуванням просторової або часової затримки є актуальним і потребує додаткового дослідження.

Мета дослідження. Виходячи з вище викладеного, метою роботи є визначення нових підходів до використання комплексних змінних в економічних розрахунках з урахуванням просторової або часової затримки.

Для досягнення цієї мети у роботі поставлені і вирішуються такі задачі:

1. Обґрунтування економічного еквівалента вартості у вигляді комплексних змінних.
2. Аналіз можливості використання комплексної вартості для рішення найпростіших економічних задач.

Виклад основного матеріалу дослідження. При здійсненні, наприклад, фінансових вкладень для реалізації будь-якого бізнес-проекту у вигляді внесення первинної суми C_0 і через деякий час додаткової суми C_i , алгебраїчні сумарні витрати будуть дорівнювати [7]

$$C_{\Sigma} = C_0 + C_i. \quad (1)$$

Якщо розглядати значення C_0 і C_i як дійсні числа, цю інформацію можна подати у векторному вигляді (рис. 1а).

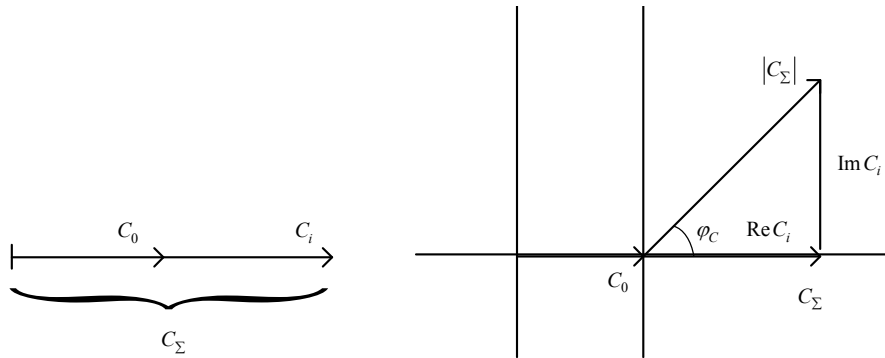


Рис. 1. Графічне зображення сумарних витрат з використанням комплексних змінних

Комплексне число є точкою не на осі, а на комплексній площині. Тому для того, щоб однозначно визначити цю точку на комплексній площині однієї характеристики не достатньо. Для цього необхідне використання вже двох координат: відрізка на вісі дійсної частини і відрізка на вісі уявної частини.

Виконуючи які-небудь математичні дії з двома дійсними змінними, виконуються математичні операції лише з цими двома змінними, а, виконуючи аналогічні дії над двома комплексними числами одночасно виконується математична операція відразу з чотирма дійсними числами.

Математичні дії з комплексними економічними змінними дають інші результати, а математичні моделі комплексних економічних змінних моделюють інші економічні процеси. В деяких випадках моделі комплексних змінних краще описують економічні процеси, ніж моделі дійсних змінних.

У цьому процесі не враховано час затримки додаткових витрат C_i від початку процесу t_1 . Зрозуміло, що при успішності кінцевого результату, чим пізніше внесена сума C_i , тим більш можливим є додатковий дохід від використання C_i . Для врахування цієї затримки пропонується початковий параметр C_0 розглядати як дійсне число, а параметр C_i – як уявне число, подаючи сумарні витрати у вигляді

$$C_{\Sigma} = C_0 + jC_i, \quad (2)$$

де $j = \sqrt{-1}$.

Основні поняття теорії комплексних змінних детально розглянуті у низці літературних джерел, зокрема у [8–10].

Використовуючи властивість комплексного числа [8], запишемо

$$C_{\Sigma} = |C_{\Sigma}| e^{j\varphi_C} = |C_{\Sigma}| \cos \varphi_C + j |C_{\Sigma}| \sin \varphi_C = \operatorname{Re} C_{\Sigma} + j \operatorname{Im} C_{\Sigma}, \quad (3)$$

де

$$\operatorname{Re} C_{\Sigma} = |C_{\Sigma}| \cos \varphi_C, \operatorname{Im} C_{\Sigma} = |C_{\Sigma}| \sin \varphi_C, |C_{\Sigma}| = (\operatorname{Re}^2 C_{\Sigma} + \operatorname{Im}^2 C_{\Sigma})^{1/2},$$

$$\varphi_C = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im} C_{\Sigma} / \operatorname{Re} C_{\Sigma}). \quad \text{а)}$$

Геометрична інтерпретація аналітичних виразів (3) може бути подана на комплексній площині у вигляді рис. 1б. Найцікавішим є параметр φ_C , який характеризує фазовий зсув між початковими витратами C_0 і модулем $|C_{\Sigma}|$.

Розглядаючи економічну операцію як періодичний процес з періодом повторення T , який може характеризувати тільки час конкретної економічної операції, значення φ_C можна подати у вигляді

$$\varphi_C = 2\pi\Delta t/T, \quad (4)$$

де T – період процесу;

Δt – проміжний час від часу закінчення операції T до часу t_i додаткових витрат C_i , тобто $\Delta t = T - t_i$.

Враховуючи, що за визначенням $C_0 > 0$ і $C_i > 0$, що відповідає тільки першому квадранту комплексної площини (рис. 1б), де $\varphi_C \leq \pi/2$, з (4) знаходимо

$$\Delta t_{\max} \leq T/4. \quad (5)$$

З урахуванням (5), при $\Delta t_{\max} = T/4$ маємо

$$\varphi_C(\Delta t_{\max} = T/4) = \pi/2, \text{ Re } C_\Sigma = 0, \text{ Im } C_\Sigma = |C_\Sigma|.$$

У випадку, якщо $\Delta t = 0$, маємо

$$\varphi_C = 0, \text{ Im } C_\Sigma = 0, \text{ Re } C_\Sigma = C_i.$$

Таким чином, подання вторинних витрат C_i у вигляді уявної складової сумарних комплексних витрат C_Σ дає можливість врахувати часовий інтервал Δt їх використання, обмеживши цикл значенням $T/4$. При $\varphi_C = 0$ сумарні витрати, які подаються у загальному випадку у вигляді комплексної змінної C_Σ , приводяться до скалярного значення $\text{Re } C_\Sigma = C_\Sigma$, що не суперечить загальноприйнятій методиці сумарної оцінки витрат.

Відомо, що чим пізніше у часі можуть бути понесені витрати C_i , тим більша ймовірність отримати додатковий прибуток, наприклад, у найпростішому випадку покласти гроші у банк на депозитний рахунок на визначений час $\Delta t_i < \Delta t_{i\max}$.

Тому постають такі питання: за який час можна провести цю операцію і який буде потенційний прибуток. Вирішення цих задач можливе шляхом використання вищенаведеного аналізу.

Початковими даними для вирішення цих задач є:

T – сумарний час проведення економічної операції (період процесу);

C_Σ – сумарні витрати, необхідні для проведення операції;

C_0 – первинні витрати для початкового етапу проведення операції;

C_i – сума внеску, яка передбачена для відтермінування;

C_3 – третя сума внеску;

t_i – час внесення в економічну операцію другої суми витрат C_i .

Найбільш наочним є подання вирішуваної задачі на комплексній площині (рис. 2).

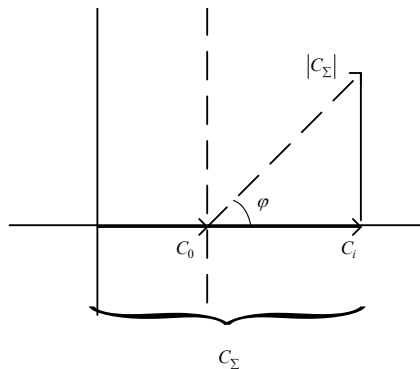


Рис. 2. Наочне подання вирішуваної задачі на комплексній площині

Крок 1. На дійсній вісі відмічаємо відомі значення C_0 і C_Σ .

Крок 2. Розраховуємо відносний час затримки другої частини суми C_i для реалізації бізнес-проекту t_i/T .

Крок 3. Використовуючи (3) і (4) знаходимо фазову затримку внесення суми C_i і під цим кутом проводимо пряму у напрямку модуля $|C_\Sigma|$.

Крок 4. Враховуючи, що загальний час економічної операції дорівнює T , а відтермінування внесення другої суми фінансування t_i , знаходимо сумарний час затримки внесення суми C_i .

У випадку вдалого закінчення розробленого бізнес-проекту у момент T додатковий прибуток проекту буде визначатися не значенням C_Σ , а буде дорівнювати

$$C'_\Sigma = C_0 + C_i + \Delta C, \quad (6)$$

де $\Delta C = \Delta C_\Sigma K_d$ – додатковий прибуток проекту;

K_d – депозитний (або інший економічний) коефіцієнт.

Таким чином, можна розрахувати і суму $-\Delta C$ скорочення вартості бізнес-проекту, який може являти значний економічний ризик.

Наведені графічні розрахунки можуть бути виключені, але вони дозволяють наочніше розглянути процес розрахунків.

Іншою важливою задачею використання комплексних змінних є розрахунок додаткового бажаного прибутку ΔC шляхом затримки частини внеску на час Δt_i , цей прибуток визначається виразом

$$\Delta C = \frac{C_3 \cdot K_d \cdot t_i}{T}.$$

Також можна знайти необхідний час депозитного внеску

$$\Delta t = \frac{C_0 \cdot T}{t_i \cdot K_d}.$$

Ще більш корисні результати можна спостерігати для випадку операції в інтервалі T , що підвищує надійність досягнення додаткового прибутку.

Висновки

1. Визначено нові підходи до використання комплексних змінних в економічних розрахунках з урахуванням просторової або часової затримки. Проведено обґрунтування економічного еквівалента вартості у вигляді комплексних змінних та аналіз можливості використання комплексної вартості для розв'язання найпростіших економічних задач.

2. Використання комплексних економічних одиниць дозволяє перейти від одновимірного рішення задачі до тривимірного (двох координат на комплексній площині з урахуванням часу процесу, тобто до «3D-розрахунків»).

3. Використання комплексних економічних одиниць надає можливість візуально зобразити на комплексній площині економічної процес, який прогнозується, а отримані результати відкривають перспективу оптимізації вирішення таких економічних задач.

4. Показано, що економічна операція буде збитковою у випадку отримання результатів у II і III квадрантах комплексної площини, а робота у IV квадранті з випередженням може дати додатковий прибуток.

5. Перспективним є подальше дослідження впливу додаткових складових процесу: уявної складової розрахунків і модуля сукупності дійсної та уявної складових процесу, які також можуть внести додаткову інформацію в економічний процес, що розглядається.

Література

1. Ліщинська Л.Б. Інформаційні пристрої і системи на узагальнених перетворювачах імітансу / Л.Б. Ліщинська // Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки. – 2015. – № 4 (226). – С. 132–134.
2. Svetunkov S. Complex-Valued Modeling in Economics and Finance / S. Svetunkov. – New York : Springer Science+Business Media, 2012. – 318 p.
3. Светуных С.Г. Исследование свойств производственной функции комплексного аргумента : препринт / С.Г. Светуных, И.С. Светуных И.С. – СПб : Изд-во СПбГУЭФ, 2005. – 25 с.

4. Светульников С.Г. Комплекснозначный анализ и моделирование неравномерности социально-экономического развития регионов России / С.Г. Светульников, А.В. Заграновская, И.С. Светульников. – СПб : Изд-во СПбГУЭФ, 2012. – 129 с.
5. Merkulova T.V. Dynamics of macroeconomic indicators modeling by functions of complex variables / T.V. Merkulova, F.I. Prikhodko // Бізнес-Інформ (Бюлетень ВАК України). – 2010. – № 4. – С. 67–71.
6. Светульников И.С. Обратные производственные функции комплексного переменного / И.С. Светульников // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении : сборник научных трудов. – СПб : Изд-во СПбГУЭФ, 2007. – Вып. № 15. – С. 88–93.
7. Єщенко П.С. Сучасна економіка : навч. посіб. / П.С. Єщенко, Ю. І. Палкін. – К. : Вища шк., 2005. – 325 с.
8. Маркушевич А.И. Комплексные числа и конформные отображения / А.И. Маркушевич. – М. : Государственное издательство технико-экономической литературы, 1954. – 52 с.
9. Шабунин М.И. Теория функций комплексного переменного / М.И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. – М. : ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. – 248 с.
10. Tavares G. N. On the Statistics of the Sum of Squared Complex Gaussian Random Variables / G. N. Tavares, L. M. Tavares // IEEE Transactions on Communications. – 2007. – 55(32). – P. 1857–1862.

Надійшла 26.02.2017; рецензент: д. е. н. Ткачук О. М.