

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ БЕЗ АНАЛОГОВЫХ ПРОТОТИПОВ

Рассмотрены амплитудно-частотные и временные характеристики цифровых фильтров Чебышева третьего и четвертого порядка. Показаны преимущества синтеза фильтров с помощью z-преобразования без аналоговых прототипов. Рассмотрена работа фильтров в динамическом режиме.

Ключевые слова: цифровой фильтр, фильтр Чебышева, z-преобразование, частотные характеристики, временные характеристики, динамические характеристики, динамический коэффициент передачи.

LUDMILA SERGEEVNA FONAR
Odessa National Polytechnic University

DYNAMIC CHARACTERISTICS OF DIGITAL FILTERS WITHOUT ANALOG PROTOTYPE

Abstract – The aim is to study the time-frequency characteristics of a digital Chebyshev filter, which give an idea of the chain in a dynamic mode (real-time)

Amplitude-frequency and time characteristics of Chebyshev third and fourth order filters are considered. It is shown the advantages filter synthesis with z-transformation with no analogue prototypes. This method can avoid the truncation of the frequency characteristic. The filter's work in dynamic is considered.

It is determined that its dynamic transfer coefficient as a function of the frequency becomes the transient response at zero frequency and as a function of time at $t \rightarrow \infty$ smoothly transitioning to the stationary value.

Keywords: digital filter, Chebyshev filter, z-transformation, frequency characteristics, timing characteristics, dynamical characteristics, the coefficient of dynamic transmission.

Введение

Работа радиотехнических устройств при обработке сигналов с изменяющимися параметрами сопровождается динамическими искажениями. Поэтому при исследовании работы цифровых фильтров в реальном масштабе времени необходимо учитывать переходные процессы, которые могут существовать длительное время. Для этого требуется выполнять анализ устройств в динамическом режиме.

При синтезе цифровых фильтров по аналоговым прототипам возникает ряд недостатков: невозможность получить бесконечно малую полосу пропускания, возникновение эффекта наложения спектров на краях диапазона за счет дискретизации и т.д. Поэтому актуальным является применение метода z-преобразования, который позволяет исключить указанные недостатки без ориентации на аналоговый прототип.

В качестве примеров были рассмотрены характеристики фильтров Чебышева третьего и четвертого порядков как фильтров с высокой избирательностью в динамическом режиме без использования аналоговых прототипов.

1. Частотные характеристики фильтров Чебышева

Фильтр Чебышева третьего порядка описывается операторным коэффициентом передачи

$$K_1(p) = \frac{1}{4p^3 + 2.4p^2 + 3.7p + 1}, \quad (1)$$

фильтр Чебышева четвертого порядка —

$$K_2(p) = \frac{0.707}{5.66p^4 + 3.9p^3 + 6.6p^2 + 2.3p + 1}. \quad (2)$$

В этих выражениях в качестве $p = \frac{j\omega}{\omega_c}$ используется нормированная частота.

Частотная характеристика фильтра Чебышева третьего порядка описывается выражением

$$K_1(j\omega) = \frac{1}{4\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^3 + 2.4\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2 + 3.7\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right) + 1}, \quad (3)$$

фильтра Чебышева четвертого порядка —

$$K_2(j\omega) = \frac{0.707}{5.66\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^4 + 3.3\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^3 + 6.6\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2 + 2.3\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right) + 1}. \quad (4)$$

С помощью программы MathCad были рассчитаны амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) этих фильтров по формулам (3) и (4) (рис. 1).

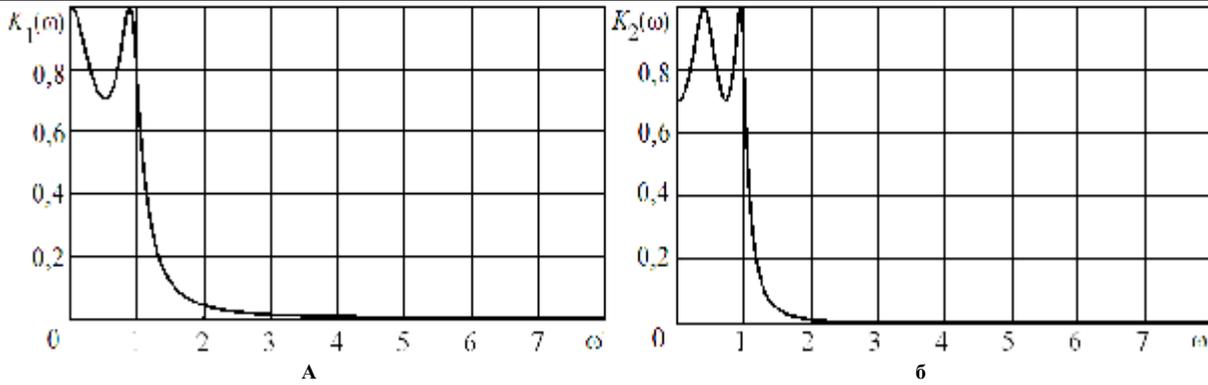


Рис. 1. АЧХ фильтров Чебышева третьего (а) и четвертого (б) порядка

Как видим, с ростом порядка селективность фильтра возрастает. Но даже на частоте $\omega = 8\omega_c$ характеристика имеет остаточное значение: $K_3 = 0,0004944$ и $K_4 = 0,00003095$.

Частотные характеристики фильтров Чебышева третьего и четвертого порядка, построенные на основании (3) и (4), достигают нуля на бесконечной частоте. Для цифровых фильтров с аналоговыми прототипами хвост характеристики обрезается, т.е. диапазон ограничивают частотой $\omega_m = \frac{1}{2}\omega_T$, где

$\omega_T = \frac{2p}{T}$ – частота Найквиста, T – период дискретизации, что приводит к погрешностям дальнейших расчетов. Чтобы избежать наложения спектров, предлагается переход к z -преобразованию [1, 2].

Денормируем коэффициенты передачи (1) и (2)

$$K_3(p) = \frac{w_c^3}{4p^3 + 2.4p^2w_c + 3.7pw_c^2 + w_c^3}, \quad (5)$$

$$K_4(p) = \frac{0.707w_c^4}{5.66p^4 + 3.3p^3w_c^2 + 6.6p^2w_c^3 + 2.3p + w_c^4}, \quad (6)$$

где w_c — частота среза фильтра.

Выполним z -преобразование, произведя замену

$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (7)$$

где T — период дискретизации.

После подстановки (7) в (5) и (6) были получены коэффициенты передачи для фильтров Чебышева третьего и четвертого порядка соответственно

$$K_3(z) = \frac{1 + 3 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + z^{-3}}{4 \cdot W^3 + 2.4 \cdot W^2 + 3.7W + 1 - (12 \cdot W^3 + 2.4 \cdot W^2 - 3.7 \cdot W - 3) \cdot z^{-1}} + \frac{1 + 3 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + z^{-3}}{(12 \cdot W^3 - 2.4 \cdot W^2 - 3.7W + 3) \cdot z^{-2} - (4 \cdot W^3 - 2.4 \cdot W^2 + 3.7 \cdot W - 1) \cdot z^{-3}}, \quad (8)$$

$$K_4(z) = \frac{0.707 \cdot (1 + 4 \cdot z^{-1} + 6 \cdot z^{-2} + 4 \cdot z^{-3} + z^{-4})}{5.66 \cdot W^4 + 3.3 \cdot W^3 + 6.6 \cdot W^2 + 2.3W + 1 - (22.6 \cdot W^4 + 6.6 \cdot W^3 - 4.6W - 4) \cdot z^{-1}} + \frac{0.707 \cdot (1 + 4 \cdot z^{-1} + 6 \cdot z^{-2} + 4 \cdot z^{-3} + z^{-4})}{(34 \cdot W^4 - 13.2 \cdot W^2 + 6) \cdot z^{-2} - (22.6 \cdot W^4 - 6.6 \cdot W^3 - 4.6W - 4) \cdot z^{-3}} + \frac{0.707 \cdot (1 + 4 \cdot z^{-1} + 6 \cdot z^{-2} + 4 \cdot z^{-3} + z^{-4})}{(5.66 \cdot W^4 - 3.3 \cdot W^3 + 6.6 \cdot W^2 - 2.3W + 1) \cdot z^{-4}} \quad (9)$$

В расчетах используется нормированная частота $W = \frac{\omega_T}{p\omega_c}$, которая связывает тактовую частоту ω_T с частотой среза фильтра ω_c через количество выборок частотной характеристики N , а через r —

количество выборок в пределах полосы пропускания, тогда $W = \frac{N}{pr}$.

Чтобы перейти от z-преобразования в частотную область, проведем в (8) и (9) замену $z = e^{j\omega T}$

$$K_3(z) = \frac{1 + 3 \cdot e^{-j\omega T} + 3 \cdot e^{-2j\omega T} + e^{-3j\omega T}}{4 \cdot W^3 + 2.4 \cdot W^2 + 3.7W + 1 - (12 \cdot W^3 + 2.4 \cdot W^2 - 3.7 \cdot W - 3) \cdot e^{-j\omega T}} + \frac{1 + 3 \cdot e^{-j\omega T} + 3 \cdot e^{-2j\omega T} + e^{-3j\omega T}}{(12 \cdot W^3 - 2.4 \cdot W^2 - 3.7W + 3) \cdot e^{-2j\omega T} - (4 \cdot W^3 - 2.4 \cdot W^2 + 3.7 \cdot W - 1) \cdot e^{-3j\omega T}} \quad (10)$$

$$K_4(z) = \frac{0.707 \cdot (1 + 4 \cdot e^{-j\omega T} + 6 \cdot e^{-2j\omega T} + 4 \cdot e^{-3j\omega T} + e^{-4j\omega T})}{5.66 \cdot W^4 + 3.3 \cdot W^3 + 6.6 \cdot W^2 + 2.3W + 1 - (22.6 \cdot W^4 + 6.6 \cdot W^3 - 4.6W - 4) \cdot e^{-j\omega T}} + \frac{0.707 \cdot (1 + 4 \cdot e^{-j\omega T} + 6 \cdot e^{-2j\omega T} + 4 \cdot e^{-3j\omega T} + e^{-4j\omega T})}{(34 \cdot W^4 - 13.2 \cdot W^2 + 6) \cdot e^{-2j\omega T} - (22.6 \cdot W^4 - 6.6 \cdot W^3 - 4.6W - 4) \cdot e^{-3j\omega T}} + \frac{0.707 \cdot (1 + 4 \cdot e^{-j\omega T} + 6 \cdot e^{-2j\omega T} + 4 \cdot e^{-3j\omega T} + e^{-4j\omega T})}{(5.66 \cdot W^4 - 3.3 \cdot W^3 + 6.6 \cdot W^2 - 2.3W + 1) \cdot e^{-4j\omega T}} \quad (11)$$

Амплитудно-частотные характеристики фильтров Чебышева третьего и четвертого порядка определяются выражениями $K_3(\omega) = |K_3(j\omega)|$ и $K_4(\omega) = |K_4(j\omega)|$ соответственно.

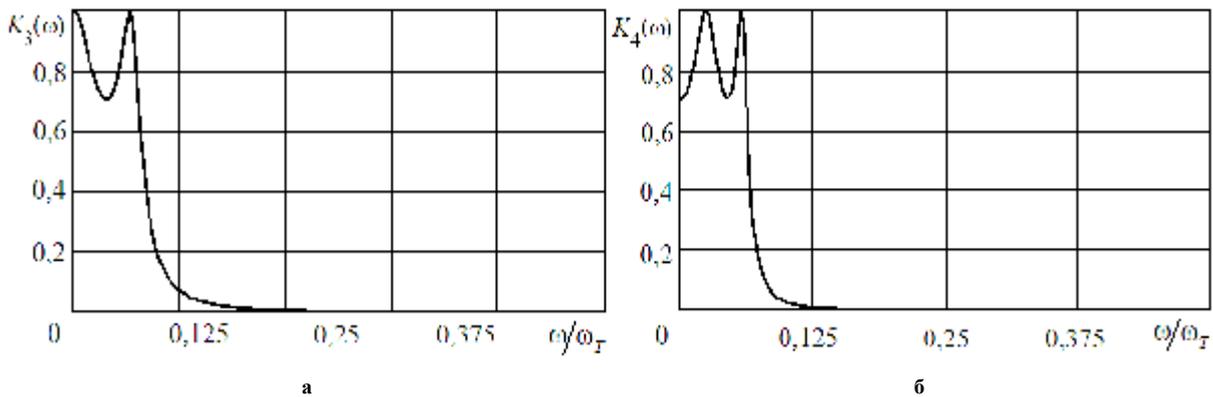


Рис. 2. АЧХ фильтров Чебышева третьего (а) и четвертого (б) порядка, рассчитанные при использовании метода z-преобразования

АЧХ фильтров Чебышева третьего и четвертого порядка, рассчитанные при использовании метода z-преобразования достигают нуля, что дает возможность избежать наложение спектров.

2. Анализ работы фильтров в динамическом режиме

Для анализа работы цифровых фильтров были использованы дискретные преобразования Фурье прямое (ДПФ),

$$K(jn\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-jnk\Omega T} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} \quad (12)$$

и обратное (ОДПФ)

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(jh\Omega) e^{j \frac{2\pi nk}{N}} \quad (13)$$

Динамический коэффициент передачи (ДКП) цифровых фильтров описывается выражением

$$K(jn\Omega, kT) = \sum_{k=0}^{kT} h_k e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} \quad (14)$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T_c}$,

T_c — время существования сигнала,

h_k — выборки импульсной характеристики,
 $n=1, 2, \dots, N-1$,

$$k=1, 2, \dots, N-1,$$

$$N = \frac{T_c}{T}$$

— количество выборок временной и частотной характеристик цепи.

С помощью обратного дискретного преобразования Фурье по частотным характеристикам фильтров были вычислены их временные характеристики — импульсная $h(t)$ (рис. 3) и переходная $g(t)$ (рис. 4).

$$g_k = \sum_{k=0}^k h_k. \quad (15)$$

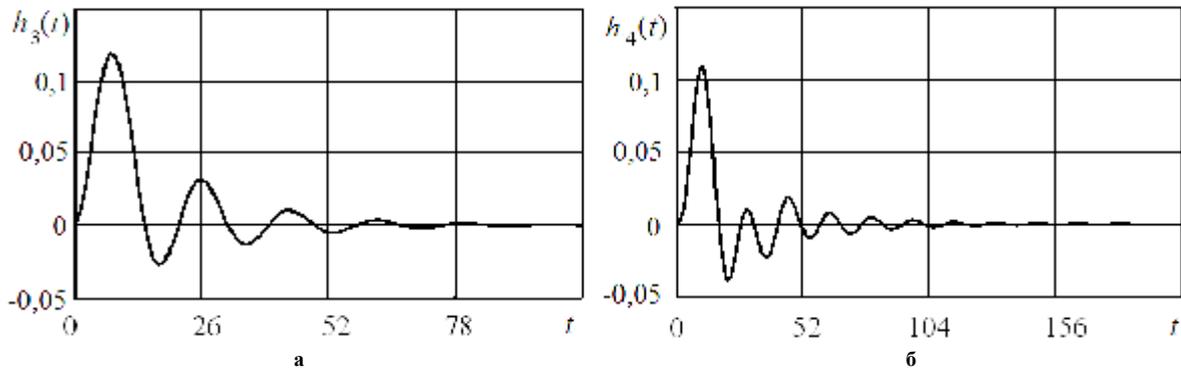


Рис. 3. Импульсные характеристики фильтров Чебышева третьего (а) и четвертого (б) порядка

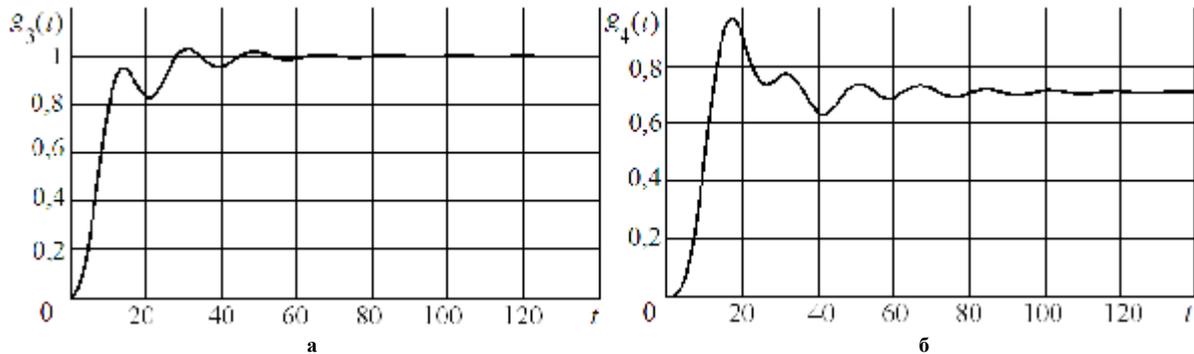


Рис. 4. Переходные характеристики фильтров Чебышева третьего (а) и четвертого (б) порядка

Для анализа работы фильтра в динамическом режиме производится усечение матрицы прямого ДПФ по вертикали. Причем для анализа отклика фильтра на сигнал с частотой $n\Omega$ производится построчное вычисление n -й строки, а для определения АЧХ в динамическом режиме — усечение, начиная с k -го столбца [3].

Графики ДКП фильтров Чебышева третьего и четвертого порядка представлены на рис. 5

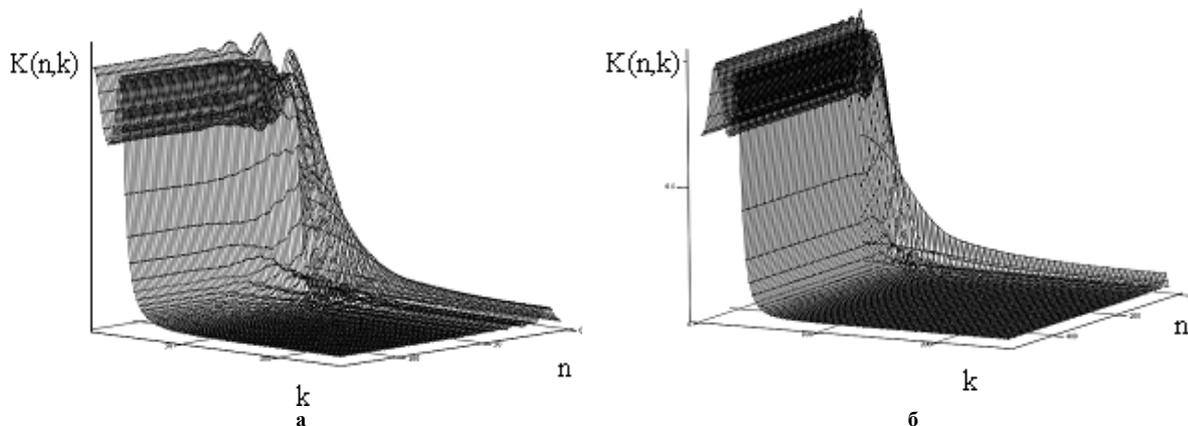


Рис. 5. ДКП Чебышева 3-го (а) и 4-го (б) порядка

Выводы

- синтез цифровых фильтров Чебышева третьего и четвертого порядка без аналоговых прототипов методом z -преобразования позволяет получить частотные характеристики, исключив эффект наложения, т.е. без усеченных хвостов;

- для определения динамических характеристик цифровых фильтров после вычисления выборок импульсного отклика следует использовать матрицу ДПФ;
- при частоте $\Omega=0$ динамические коэффициенты передачи $K(jn\Omega, kT)$ цифровых фильтров Чебышева третьего и четвертого порядка принимают вид переходных характеристик;
- динамические коэффициенты передачи $K(jn\Omega, kT)$ цифровых фильтров Чебышева третьего и четвертого порядка как функция времени при $t \rightarrow \infty$ плавно переходят к стационарному значению.

Литература

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. / А.Б Сергиенко – [2-е изд.]. – СПб. : Питер, 2007. – 751 с.
2. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Рабинер Л., Гоулд Б. – Пер. с англ. – М. : МИР, 1978. – 835 с.
3. Філіпський Ю.К. Динаміка сигнальних перетворень : нав. посіб. для студентів ВНЗ / Ю. К. Філіпський. – Одеса : ОДПУ, 2006. – 89 с.

References

1. Sergienko, A.B. Tsifrovaja obrabotka signalov [Digital signal processing] / A.B. Sergienko. —SPb:Peter, 2007. — 751 p.
2. Rabiner, L., Gould, B. Teoria i praktika tsifrovoi obrabotki signalov/ [Theory and Application of Digital Signal Processing: Per. from English.] / Rabiner, L., Gould, B. — Moscow, 1978. —835 p.
3. Filipyskiy, Yu.K. Dynamika syhnalnykh peretvoren: navch. posib. dlia studentiv VNZ [Dynamics of Signal Change: a teach. manual for students of higher educational establishments] / Yu.K. Filipyskiy. — Odesa, 2006. — 104 p.

Рецензія/Peer review : 22.7.2013 р. Надрукована/Printed :29.9.2013 р.
Рецензент: проф. каф. Інформаційної безпеки, Інституту радіоелектроніки та телекомунікацій,
Одеського національного політехнічного університету, д.т.н., Мазурков М.І.