

are produced) available on the sample modified with the laser. Table 1 shows the obtained enhancement as the ratio of the heat flux of the laser treated surface and the smooth reference surface for selected values of the temperature difference (from 4 to 20 K).

Table 1

Heat transfer enhancement ratio					
$T-T_{\text{sat}}, \text{K}$	4	8	12	16	20
$q_{\text{laser}}/q_{\text{smooth}}$	2,99	2,40	2,12	1,93	1,80

Conclusions

The application of the laser treatment is an effective method that can result in increased heat fluxes for the same superheat value. Boiling heat transfer performance has been improved in comparison to the smooth surface (without any modification) especially for small temperature differences. Here the heat flux has been ca. 3 times higher. It could be linked with a higher number of nucleation sites available for vapour production on the surface modified with laser. Further tests in this field could provide more data on the enhancement of boiling on such treated surfaces. However, one of the problems related to the use of laser on copper is a possible beam reflection and different heater materials might need to be used.

References

1. Wondra F., Stephan P., Pool boiling heat transfer from tubular microstructured surfaces in saturated FC-72, ECI Int. Conf. on Boiling Heat Transfer, Spoleto, 2006.
2. Hong K.T., Imadojemu H.E., Webb R.L., Pool boiling of R-11 refrigerant and water on oxidized enhanced tubes, Fundamentals of Phase Change: Boiling and Condensation, ASME-HTD, vol. 273, p. 1–9, 1994.
3. Chang J.Y., You S.M., Enhanced boiling heat transfer from microporous surfaces: effects of a coating composition and method, Int J. Heat Mass Transfer, vol. 40, 18, p. 4449–4460, 1997.
4. Nimkar N.D., Bhavnani S.H., Jaeger R.C., Effect of nucleation site spacing on the pool boiling characteristics of a structured surface, Int. J. of Heat and Mass Transfer, vol. 49, p. 2829–2839, 2006.
5. Hwang U.P., Moran K.F., Boiling heat transfer of silicon integrated circuits chip mounted on a substrate, Heat Transfer Electron. Equip. ASME HTD 20, p. 53–59, 1981.
6. Orzechowski T., Intensification of the heat exchange process on laser-beam modified surfaces. Advances in Manufacturing Science and Technology, PAN, Vol. 25, 3, p. 101–115. 2001.
7. Orzechowski T., Wymiana ciepła przy wrzeniu na żebrach z mikropowierzchnią strukturalną, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2003.
8. Orman Ł.J., Nucleate boiling heat transfer on a smooth surface of a fin, Proc of XII Int. Symposium „Heat Transfer and Renewable Sources of Energy”, Szczecin, p. 363–369, 2008.

Рецензія/Peer review : 14.9.2013 р. Надрукована/Printed :21.11.2013 р.
Рецензент:

УДК 512.25: 519.25:53.088: 621.438

А.В. ГОРОШКО, В.П. РОЙЗМАН
Хмельницький національний університет, Україна

ШЛЯХИ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВОРОТНИХ ЗАДАЧ

В статті показано зв'язок числа обумовленості матриць і відносної та абсолютної похибок розв'язку зворотних задач, що описуються лінійними моделями. Обґрунтовано застосування методу найменших квадратів для покращення стійкості і підвищення точності розв'язків. Запропоновано метод забезпечення стійкості розв'язків, що базується на залученні додаткової інформації шляхом збільшення кількості вимірювань вихідних параметрів лінійної моделі. Розроблено спосіб і статистичний алгоритм забезпечення заданої точності розв'язку погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: зворотні задачі, стійкість, лінійна модель, похибки, погана обумовленість

ANDRII VOLODYMYROVYCH GOROSHKO, VULEN PETROVYCH ROYZMAN
Khmelnytskyi National University, Ukraine

WAYS TO IMPROVE THE ACCURACY SOLUTION OF INVERSE PROBLEMS

Abstract - The paper shows the relationship among the conditionality of matrices and the relative and absolute errors in solution of inverse problems described by linear models. Application of the method of least squares to enhance stability and improve the accuracy of solutions. The method of stability of solutions is based on attracting additional information by increasing the number of measurement outputs of the linear model. A method and a statistical algorithm to ensure the desired accuracy of solution poorly conditioned systems of linear algebraic equations.

Keywords: inverse problems, stability, linear model, errors, ill-conditioning

Вступ

Значна частина задач проектування, виробництва структурно-складних технічних виробів і

технологічних процесів їх виготовлення, їх діагностування є зворотними задачами. Часто ці задачі або описуються лінійними моделями, або ж їх розв'язок зводиться до розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Внаслідок некоректності постановки таких задач їх розв'язок може сильно відрізнятись від істинних значень шуканих параметрів об'єкта, в першу чергу через свою нестійкість, і чисельне розв'язання СЛАР навіть на найсучасніших обчислювальних системах не звільняє дослідника від необхідності врахування впливу похибок у вхідних даних на результат.

Нехай технічний об'єкт описується лінійною моделлю виду

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_m\mathbf{a}_m, \quad (1)$$

де $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ - вектор невідомих (об'єкт), $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ - вектор даних спостережень, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, m$ - вектор-стовбці матриці \mathbf{A} , $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Матриця \mathbf{A} може розглядатись як математичний запис лінійного оператора \mathbf{A} , що здійснює відображення абстрактного кінцевомірного дійсного простору \mathbb{R}^m в інший кінцевомірний простір \mathbb{R}^n . Також передбачається, що в обох просторах задані ортогональні системи координат.

Якщо вибрана модель коректна, то застосовуються відомі обчислювальні алгоритми, які дозволяють визначити невідомі первинні фактори досліджуваного об'єкта. Зокрема, нормальним псевдорозв'язком СЛАР (1) є

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{y}, \quad (2)$$

де $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ - псевдообернена матриця Мура-Пенроуза, $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Якщо $m = n$ і \mathbf{A} - квадратна не вироджена матриця, то псевдообернена матриця Мура-Пенроуза \mathbf{A}^+ співпадає з оберненою \mathbf{A}^{-1} і розв'язок (2) перетворюється на нормальний (інверсний) розв'язок

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}, \quad (3)$$

де $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Однак практика показує, що не зважаючи на принципову можливість знайдення розв'язку СЛАР (1) і його єдиність, задача стає набагато складніше в тих випадках, коли число обумовленості матриці \mathbf{A} велике, і розв'язок слабо стійкий.

Постановка проблеми.

Без втрати загальності, розглянемо випадок $m = n$, тобто матриця \mathbf{A} - квадратна. Оцінку відносної похибки шуканої величини можна отримати наступним чином. Нехай замість системи (1) насправді розв'язується система

$$(\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}, \quad (4)$$

тобто елементи матриці, шуканого вектора і правої частини мають деякі невідомі абсолютні похибки $\Delta\mathbf{A}$, $\Delta\mathbf{x}$ і $\Delta\mathbf{y}$ відповідно, що залежать від точності контрольно-вимірювальної апаратури та інших факторів. При цьому, очевидно, похибки вимірюваних величин малі у порівнянні із істинними значеннями цих величин \mathbf{A}_0 , \mathbf{x}_0 і \mathbf{y}_0 .

Віднімаючи від рівняння (4) рівняння (1) і нехтуючи членами другого порядку малості, отримаємо

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}_0^{-1}\Delta\mathbf{y} - \mathbf{A}_0^{-1}\Delta\mathbf{A}\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{y}_0.$$

В довільній нормі $\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{y}\| + \|\mathbf{A}_0^{-1}\|^2 \cdot \|\Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{y}_0\|$. Після перетворень, маємо

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_0\|} \leq \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}_0\| \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}_0\|} + \|\mathbf{A}_0^{-1}\|^2 \cdot \|\mathbf{A}_0\|^2 \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}_0\|}.$$

Відомо [1], що число обумовленості матриці \mathbf{A} $cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}_0\|$. Тому

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_0\|} \leq cond(\mathbf{A}_0) \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}_0\|} + [cond(\mathbf{A}_0)]^2 \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}_0\|}. \quad (5)$$

Аналіз (5) показує, що на величину відносної похибки шуканої величини впливають число обумовленості матриці, що визначається лише її властивостями, а також відносні похибки правих частин і елементів матриці системи. У випадку, коли елементи матриці задані точно, нерівність (5) набуває вигляду

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_0\|} \leq cond(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}_0\|}. \quad (6)$$

Тут представлений кількісний взаємозв'язок точності визначення первинних факторів, обраної математичної моделі і точності вимірювальної апаратури. З нерівності (6) видно, що відносна похибка вектора первинних факторів може досягати максимальної величини

$$\left(\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_0\|}\right)_{\max} = cond(\mathbf{A}_0) \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}_0\|}. \quad (7)$$

Або для відносних похибок $\delta_y = \frac{\|\Delta\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}_0\|}$ і $\delta_x = \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_0\|}$, маємо

$$\delta_{x \max} = cond(\mathbf{A}) \delta_y.$$

Ця залежність дозволяє розв'язувати деякі достатньо цікаві практичні задачі, зокрема зумовлює

міркування інженера-дослідника про можливість вибору по двох заданих факторах із (7) третього. Наприклад, для наявної математичної моделі і заданої точності визначення первинних факторів можливо підібрати необхідну для успішного вимірювання апаратуру, або за наявною апаратурою і математичною моделлю – оцінити точність ідентифікації. Ці ж міркування дозволяють за заданою точністю методу і наявною вимірювальною апаратурою оцінювати ефективність вибраної моделі.

З іншого боку, відомо [2], що число обумовленості матриці в евклідовій формі виражається через відношення максимального і мінімального модуля її власних чисел, тобто

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = (\max |\lambda_i|) / (\min |\lambda_i|). \quad (8)$$

Як видно з (8), з ростом розмірності матриці імовірний ріст і числа обумовленості, і, відповідно, похибки розв'язку.

Прийнято вважати, що якщо число обумовленості мале, то лінійний оператор \mathbf{A} добре обумовлений. Якщо ж число обумовленості велике, то лінійний оператор \mathbf{A} погано обумовлений. Отже, чим менше $\text{cond}(\mathbf{A})$, тим меншими будуть похибки розв'язку відносно похибок в умові. Враховуючи, що $\text{cond}(\mathbf{A}) \geq 1$, найкращим числом обумовленості є 1, щоправда такий випадок зустрічається лише для ортогональних та напівортогональних матриць, які при відображенні не змінюють довжину векторів. Дійсно, $\|\mathbf{Ax}\|^2 = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Ax}) = \|\mathbf{x}\|^2$ і для таких матриць $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}^+\| = 1$, тому справедлива рівність $\|\Delta\mathbf{x}\| = \|\Delta\mathbf{y}\|$.

Слід зазначити, що безпосередньо з нерівності (6) неможливо точно визначити максимально можливу відстань між наближеним і істинним розв'язками (абсолютну похибку розв'язку), оскільки точні значення \mathbf{x}_0 і \mathbf{y}_0 апіорі невідомі. Більш змістовні результати можна отримати при обчисленні оцінок абсолютної похибки розв'язку. При цьому зручно ввести коефіцієнт найбільшого підсилення абсолютної похибки

$$q = \Delta\mathbf{x} / \Delta\mathbf{y}. \quad (9)$$

З цих позицій природно вважати, що якщо $q > 1$, то система рівнянь сильно чутлива до похибок (погано обумовлена). Тому в роботі буде йти мова про погану обумовленість, виходячи з двох позицій, в залежності від того, про які похибки йдеться – абсолютні чи відносні.

Напрямок $\Delta\mathbf{y}$ непередбачуваний і, в загальному випадку, розкладається як $\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{y}_r + \Delta\mathbf{y}_0$, де $\Delta\mathbf{y}_r \in \mathbb{R}(\mathbf{A})$ - проекція вектора $\Delta\mathbf{y}$ на ранговий простір $\mathbb{R}(\mathbf{A})$, $\Delta\mathbf{y}_0 \in \mathbb{N}(\mathbf{A}^T)$ - проекція вектора $\Delta\mathbf{y}$ на нуль-простір $\mathbb{N}(\mathbf{A}^T)$. Радіусом довірчої області (максимальне відхилення збуреного розв'язку $\Delta\mathbf{x}$ від істинного \mathbf{x}_0) є величина

$$r = \|\Delta\mathbf{x}\|_{\max} \leq \|\Delta\mathbf{y}_r\| / \sigma_{\min}, \quad (10)$$

де $\sigma_{\min} > 0$ - найменше сингулярне число у сингулярному розкладанні матриці \mathbf{A} , $\|\Delta\mathbf{y}_r\|$ - довжина проекції $\Delta\mathbf{y}$ на ранговий простір $\mathbb{R}(\mathbf{A})$ матриці \mathbf{A} ($m = n$ маємо $\|\Delta\mathbf{y}_r\| = \|\Delta\mathbf{y}\|$). В цьому випадку індикатором «поганої обумовленості» є $0 < \sigma_{\min} < 1$, причому число обумовленості пов'язане із сингулярними числами виразом

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}, \quad (11)$$

де σ_{\max} , σ_{\min} - відповідно найбільше і найменше сингулярне число матриці \mathbf{A} .

Величину $\Delta\mathbf{y}$ можна оцінити достатньо точно з умов проведення експерименту, а $\|\Delta\mathbf{y}_0\| = \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|$, є значення оптимальної нев'язки в (2), де $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}$ - нормальний псевдорозв'язок за (2). Оскільки $\Delta\mathbf{y}_r \perp \Delta\mathbf{y}_0$, то

$$\|\Delta\mathbf{y}_r\| = \sqrt{\|\Delta\mathbf{y}\|^2 - \|\Delta\mathbf{y}_0\|^2} \quad (12)$$

Отже,

$$r = \|\Delta\mathbf{x}\|_{\max} = \sqrt{\|\Delta\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^2} / \sigma_{\min}. \quad (13)$$

Після підстановки (11) у 10 маємо

$$r = \|\Delta\mathbf{x}\|_{\max} = \|\Delta\mathbf{y}\| / \sigma_{\min}. \quad (14)$$

Оскільки норма $\|\Delta\mathbf{y}\|$ може бути оцінена із матеріалів експериментів достатньо точно, з (14) можна визначити абсолютну похибку розв'язку.

З (6) і (10) видно, що величина похибки результату може набувати різних значень в широкому діапазоні. Природно постає питання визначення умов, за яких похибка найменша (найбільша). Необхідно відзначити, що величина $\|\Delta\mathbf{x}\|$ залежить не тільки від величини $\|\Delta\mathbf{y}\|$, але і від напрямку вектора $\Delta\mathbf{y}$. Для кращої наочності

звернемося до конкретного прикладу. Розглянемо погано обумовлену матрицю ($cond(\mathbf{A}) = 86,99$) (15) і розв'язок СЛАР для різних векторів \mathbf{y}_i .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \det(\mathbf{A}) = 2. \tag{15}$$

Нехай $\mathbf{y}_0 = (7, 3)^T$ - точне значення правої частини СЛАР, тоді точний розв'язок системи $\mathbf{x}_0 = (0, 1)^T$. Якщо коефіцієнти містять похибки вимірів, наприклад $\mathbf{y}_1 = (7,20, 3,08)^T$ і довжина вектора похибок вимірів $\|\Delta\mathbf{y}_1\| = 0,22$, то збурений розв'язок буде $\mathbf{x}_0 = (0,02, 1,00)^T$. Це непоганий результат, адже незважаючи на велике $cond(\mathbf{A})$, $\delta_x = 0,02 < \delta_y = 0,03$. Нехай тепер при більш ретельних вимірах одержані коефіцієнти $\mathbf{y}_2 = (6,97, 3,05)^T$, тобто довжина вектора похибок вимірювань $\|\Delta\mathbf{y}_2\| = 0,06$. Тоді $\mathbf{x}_2 = (-0,22, 1,31)^T$. Цей результат не можна вважати задовільним, оскільки похибка розв'язку досягла свого найбільшого значення $\|\Delta\mathbf{x}_2\| = \|\Delta\mathbf{y}_2\| / \sigma_{\min} = 0,39$, і відносна похибка $\delta_x = 0,39 \gg \delta_y = 0,01$.

В цьому прикладі $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_2\| \ll \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_1\|$, але $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2\| \gg \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|$, тобто менші похибки у вихідних даних викликають більші збурення у розв'язку, ніж більші похибки. Цей парадоксальний ефект пов'язаний із тим, що напрям $\Delta\mathbf{y}_1$ - найбільш сприятливий і співпадає з напрямом першого власного вектора матриці \mathbf{A} , а напрям $\Delta\mathbf{y}_2$ - найбільш несприятливий і співпадає з напрямом другого власного вектора (рис. 1). Обертаючи вектор $\Delta\mathbf{y}_2$ довжиною $\|\Delta\mathbf{y}_2\| = 0,06$, одержимо область допустимих оцінок (ОДО) у вигляді сильно видовженого еліпса (рис. 2), довжини півосей якого пропорційні значенням сингулярних чисел матриці \mathbf{A} ($\sigma_1 = 13,19$, $\sigma_2 = 0,15$). ОДО симетрично відносно точного розв'язку $\mathbf{x}_0 = (0, 1)^T$. При сильній анізотропії ОДО ті області, які знаходяться далеко від точного розв'язку \mathbf{x}_0 , забезпечують, однак, достатньо прийнятні відхилення від даних спостережень.

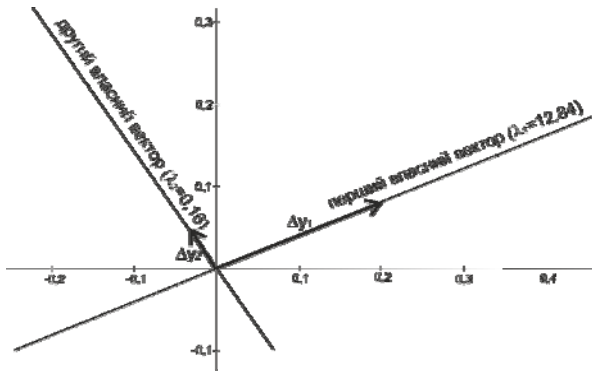


Рис. 1. Вектори похибок $\Delta\mathbf{y}_i$ і напрями власних векторів матриці (15)

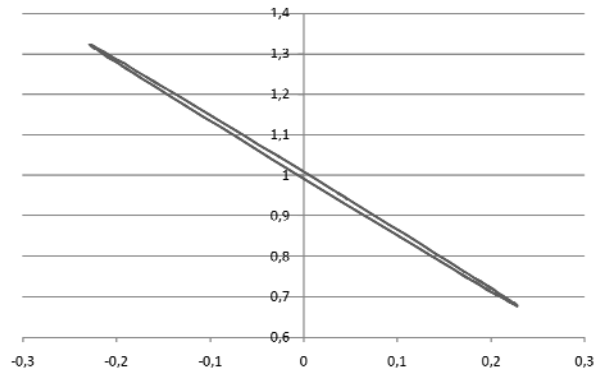


Рис. 2. Схематичне зображення ОДО для СЛАР із матрицею (15), точним значенням правої частини \mathbf{y}_0 і похибкою

$$\|\Delta\mathbf{y}_2\| = 0,06$$

Такі ж результати можна отримати при пошуку об'єднаної множини розв'язків (множини слабких рішень) інтервальної системи лінійних рівнянь, складеної на основі (15) з нижньою і верхньою гранню відповідно $\underline{\mathbf{y}} = (6,97, 2,95)^T$, $\bar{\mathbf{y}} = (7,03, 3,05)^T$

На сьогоднішній день, без перебільшення, величезний набір методів (регуляризованих алгоритмів) розв'язку некоректних задач, зокрема СЛАР (1) (див., наприклад, [3-6]). Найбільш відомим і вживаним є метод регуляризації А.Н. Тихонова, який використовується для наближеного пошуку нормального псевдорозв'язку СЛАР (2). В якості наближеного розв'язку береться розв'язок регуляризованої нормальної системи

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda_\delta \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \tag{16}$$

де $\lambda_\delta > 0$ - деякий спеціально вибраний параметр регуляризації, \mathbf{E} - одинична матриця порядку m . Тут $\lambda_\delta = \lambda(\delta, \mathbf{y})$, де оцінка точності $\delta > 0$ передбачається відомою і такою, що $\|\Delta\mathbf{y}\| \leq \delta$. Задача із некоректної стає умовно-коректною (за Тихоновим).

Відомо, що параметр регуляризації необхідно підібрати деяким оптимальним чином. На рис. 2 і 3 представлені результати чисельного моделювання розв'язків (16), для чого компоненти вектора \mathbf{y}_0 «зашумлювали» Гаусовським шумом з нульовим математичним сподіванням (м.с.), що еквівалентно $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}$. При цьому при $\lambda_\delta \rightarrow 0$ розв'язок системи (16) прямує до нормального псевдорозв'язку (2), тобто задача залишається нестійкою, а при зростанні λ_δ задача стає стійкою, але розв'язок - далеким від істинного.

Отже, загальний принцип регуляризації полягає в тому, щоб замість СЛАР (1) розв'язати (16) і отримати наперед зміщений розв'язок такий, що є точнішим за нормальний псевдорозв'язок. Отже, за стійкість приходиться платити деякою похибкою розв'язку.

Відомо [2, 4], що без залучення додаткової інформації про шуканий розв'язок або про точні дані зворотної задачі метод регуляризації не може забезпечити точність наближеного розв'язку краще за $O(\delta^{2/3})$ на класі всіх задач типу (1). Простіше кажучи, $\|\Delta\mathbf{x}\| \geq \text{const} \cdot \|\Delta\mathbf{y}\|^{2/3}$ при довільних λ_δ .

Параметр регуляризації λ_δ підбирається так, щоб нев'язка розв'язку в просторі зображень \mathbb{R}^n узгоджувалась з експериментальними даними. На сьогодні існують два основних погляди на вибір параметра регуляризації. Перший базується на підборі норми нев'язки, що дорівнює апріорній оцінці похибок задання вхідних даних (в загальному матриці \mathbf{A} і вектора \mathbf{y} , тобто $\|\Delta\mathbf{A}\| + \|\Delta\mathbf{y}\|$). Маючи ці дані, можна вибрати норму нев'язки і, відповідно, параметр λ_δ і розв'язок $\mathbf{x}(\lambda_\delta)$.

Другим варіантом вибору λ_δ , що не ставить умови знання ніяких апріорних міркувань щодо похибки моделі, є так званий квазіоптимальний метод, згідно якого λ_δ є глобальним мінімумом нев'язки системи рівнянь

$$\Delta(\lambda_\delta) = \|\mathbf{Ax}(\lambda_\delta) - \mathbf{y}\|. \tag{17}$$

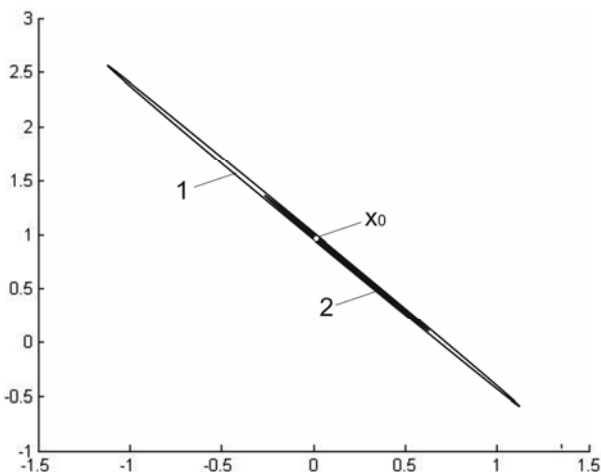


Рис. 3. Розв'язки СЛАР з матрицею (15):
ОДО, утворена нормальними псевдорозв'язками;
2 – область, утворена регуляризованими розв'язками (16) при $\lambda_\delta = 0,1$

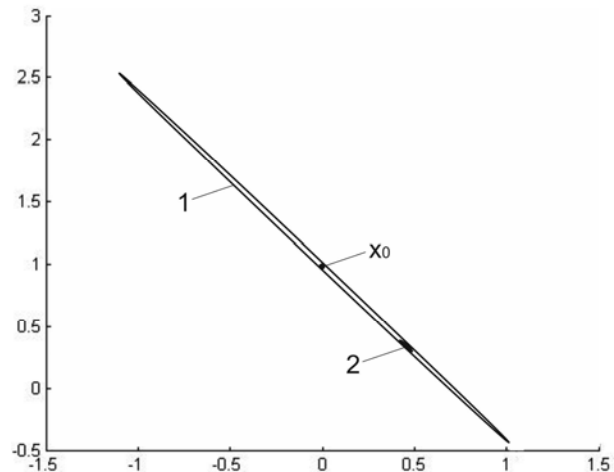


Рис. 4. Розв'язки СЛАР з матрицею (15):
ОДО, утворена нормальними псевдорозв'язками;
2 - область, утворена регуляризованими розв'язками (16) при $\lambda_\delta = 1$

Статистична постановка зворотної задачі і її розв'язок

Взагалі кажучи, при побудові наближених розв'язків і при оцінці їх похибок, в залежності від характеру вихідної інформації, можливий як детермінований підхід, так і імовірнісний.

Враховуючи те, що експериментальні дані завжди випадкові, найбільш природною видається постановка зворотних задач в рамках теорії статистичної оцінки невідомих параметрів. На відміну від самих числових характеристик, оцінки є випадковими, причому їх значення залежать від обсягу експериментальних даних, а закони розподілу імовірності - від законів розподілу імовірності самих випадкових чисел або значень вимірювальних величин.

Саме стохастичність формування даних є причиною нестійкості розв'язків. Суть нестійкості, яка є фундаментальною проблемою розв'язку зворотних задач, полягає в тому, що в межах природних відхилень величин (похибок вимірювань, флуктуацій шуму і т.п.) з даними спостереження приблизно в однаковій мірі узгоджується множина можливих оцінок вихідного об'єкта, включаючи і ті, які від нього суттєво відрізняються [7].

З позицій математичної і прикладної статистики, розв'язок зворотної задачі полягає у пошуку такої оцінки об'єкта, яка розглядається як сукупність невідомих параметрів, на основі експериментальних даних, а також апріорних відомостей відносно об'єкта і моделі формування відображення. Оскільки реалізація

відображення \mathbf{y} випадкова, оцінка об'єкта $\mathbf{x}(\mathbf{y})$ теж є випадковою, і загалом, багатомірною величиною.

Оскільки знайти «точний» розв'язок зворотних задач для систем, які описуються погано обумовленими СЛАР, неможливо в принципі, мова може йти лише про наближений розв'язок. Для підвищення точності такого розв'язку необхідно звужувати ОДО.

Всі відомі, перераховані у вступі методи розв'язання погано обумовлених СЛАР по суті направлені на підвищення стійкості системи шляхом дії на матрицю \mathbf{A} з метою зниження її числа обумовленості.

Враховуючи ж статистичний характер вимірювальних вихідних характеристик, можна застосувати нові підходи до підвищення точності розв'язків погано обумовлених СЛАР, суть яких у наступному.

Оскільки у випадку $m = n$ задача нестійка, пропонується збільшувати інформацію про об'єкт шляхом збільшення кількості рівнянь $n \gg m$, отримуючи при цьому перевизначену СЛАР. На практиці це означає збільшення кількості вимірювань.

Розглянемо перевизначену СЛАР. В строгому сенсі, отримана система рівнянь є несумісною, оскільки, вибравши з неї різні сукупності по m рівнянь кожна, ми отримаємо різні результати при розв'язанні підсистем.

Отже, пропонується знайти розв'язок у вигляді єдиного об'єкту $\hat{\mathbf{x}}$, при підстановці якого замість \mathbf{x} в праву частину (1) досягається найточніше представлення всієї сукупності експериментальних даних.

Для цього використаємо найпоширеніший спосіб одержання оцінок оригінала – метод максимальної правдоподібності (ММП). Хоча оцінка ММП є нестійкою, її ОДО вужче, ніж ОДО нормального розв'язку. Більш того, оцінку ММП можна наближати до істинного значення, збільшуючи кількість реалізацій.

Для (1) ММП вимагає, щоб нев'язка $\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0\|^2$ була мінімальною. Отже, для випадку нормального розподілу похибок МП-оцінкою є оцінка методу найменших квадратів (МНК). МНК відносять до умовно-регулярних стохастичних методів розв'язку зворотних задач, оскільки даний метод звужує множину можливих розв'язків до класу коректності, а саме до компакту [8].

Як відомо [7], для нормального закону розподілу похибок, оцінка МНК (ОНК) є спроможною, незміщеною і ефективною оцінкою. Спроможність забезпечується тим фактом, що імовірність події $\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| < \varepsilon$

при $n \rightarrow \infty$ прямує до одиниці. Незміщеність (асимптотична) випливає із факту $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\hat{\mathbf{x}})_k = \mathbf{x}_0$. Більш того,

МНК можна застосовувати навіть тоді, коли похибки вимірювань не підпорядковуються нормальному закону, щоправда в таких випадках одержуються квазіправдоподібні оцінки, які можуть стати правдоподібними при застосуванні так званих вагових характеристик.

Для перевизначеної СЛАР (1) ОНК називають оптимальним розв'язком і знаходять з (2). На рис. 5 приведені результати чисельного експерименту для СЛАР з матрицею (15). Для наочності було змодельовано результати вимірювань при $n = 1000$ і 5% розкидом значень компонент \mathbf{y} . Рисунок демонструє нестійкість ОНК, яка пояснюється тим, що ОНК випадкових величин є сама випадковою величиною. Загалом кажучи, ОНК $\hat{\mathbf{x}}$ знаходиться дещо в стороні від істинного значення \mathbf{x}_0 , тобто є наближеним розв'язком. Слід відзначити, що з ростом n $\hat{\mathbf{x}}$ наближається до $\mathbf{x}_0 = (0, 1)^T$, що підтверджує регулярність розв'язків, одержаних як ОНК.

Класичний МНК передбачає розв'язок (1) за повною вибіркою експериментальних даних n . На практиці, часто дослідник має змогу провести деяку кількість вимірювань l так, що $l = k * m$, $k = 1, 2, \dots, N$, тобто провести k вимірювань для кожного із параметрів y_i . В цьому разі для розв'язку СЛАР (1) замість того, щоб знаходити ОНК з (2), пропонується прийняти $m = n$ і використати інверсний розв'язок (3), при цьому замість кожного із m параметрів вектора \mathbf{y} підставляти осереднені значення $\bar{y}_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Покажемо, що одержана оцінка співпадає з ОНК.

Після проведення k вимірювань для кожного із параметрів y_i , $i = 1, \dots, m$ згрупуємо рівняння системи (1) так, що $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $\mathbf{y} = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1k}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2k}, \dots, y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mk})^T$, $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i1}, \dots, a_{i1}, a_{i2}, a_{i2}, \dots, a_{i2}, \dots, a_{mi}, a_{mi}, \dots, a_{mi})^T$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, 2, \dots, m$ -вектор-стовбці матриці \mathbf{A} , $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Додамо між собою по k рівнянь з однаковою лівою частиною, і поділимо систему на k , в результаті чого отримаємо

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{1i} \\ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{2i} \\ \dots \\ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \dots \\ \bar{y}_m \end{pmatrix}.$$

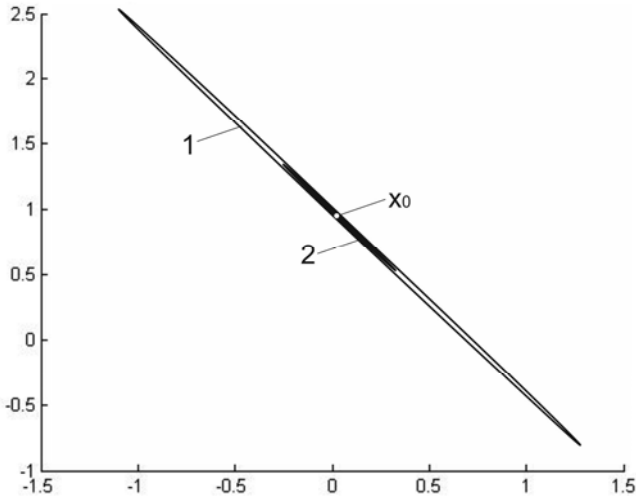


Рис. 5. Розв'язки СЛАР з матрицею (15):
ОДО, утворена нормальними псевдорозв'язками;
2 - область, утворена ОНК

Така реалізація МНК більш інтуїтивно зрозуміла досліднику. Необхідно зауважити, що в такій постановці запропонований метод згладжування експериментальних даних фактично є статистичним методом регуляризації. Крім того, як буде показано в подальшому, такий спосіб дозволить перейти до методу забезпечення заданої точності розв'язку зворотної задачі. Таким чином, вказаний підхід відноситься до умовно-регулярних методів розв'язку зворотних задач.

Доцільним видається суміщати відомі регуляризаційні методи і запропонований статистичний метод регуляризації, що базується на ОНК. При цьому вдасться значно наблизити розв'язок регуляризованої СЛАР (16) до істинного розв'язку. Більш того, можна визначити необхідну кількість вимірювань для забезпечення заданої точності і стійкості розв'язку, задавшись довірчою областю.

Спосіб і алгоритм забезпечення заданої точності розв'язку погано обумовленої СЛАР

З (7) очевидно, що підвищити точність розв'язку можна двома шляхами – зменшуючи $cond(\mathbf{A})$ або зменшуючи відносну похибку δ_y вектора \mathbf{y} . Методи покращення обумовленості матриці \mathbf{A} достатньо широко описані в літературі і не є предметом досліджень даної роботи, тому зупинимось детальніше на шляхах зменшення відносної похибки δ_y . Розглянемо вектор вимірних величин $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}$. Очевидно, що імовірнісні властивості \mathbf{y} визначаються густиною розподілу вектора похибок $\Delta\mathbf{y}$. Внесемо деякі обмеження, а саме будемо вважати густину розподілу i -го елемента вектора \mathbf{y} нормальною $y_i \sim N(M, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тоді \mathbf{y} є багатомірною нормальною величиною $\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, де $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}(\mathbf{y})$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ - вектор м.с. \mathbf{y} , $\boldsymbol{\Sigma} = cov(\mathbf{y})$ - коваріаційна матриця розміром $m \times m$.

Для зменшення $\|\Delta\mathbf{y}\|$ пропонується проводити k вимірювань випадкової величини \mathbf{y} , і замість \mathbf{y} в рівняння (1) підставляти оцінку м.с. (вбіркове м.с.) $\mathbf{M}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^k \mathbf{y}_i$ вектора \mathbf{y} . При цьому відносна похибка

$$\|\Delta\mathbf{y}\|/\|\mathbf{y}_0\| \approx \|\mathbf{M}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}_0\|/\|\mathbf{y}_0\|. \tag{18}$$

Більш того, можна встановити необхідну кількість вимірювань k величини \mathbf{y} , які треба провести для досягнення заданої точності δ_x . Відомо, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_0$. В реальних задачах при обмеженому k $\mathbf{M}(\mathbf{y})$ дозволяє визначити м.с. деякою похибкою, якою і можна замінити δ_y . Оцінимо цю похибку, для чого виразимо м.с. величини \mathbf{y} , обчислене після k вимірювань, за рекурентною формулою

$$\mathbf{M}(\mathbf{y})_k = \left[(k-1)\mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1} + \mathbf{y}_k \right] / k, \tag{19}$$

де $\mathbf{M}(\mathbf{y})_k$ - оцінка м.с., k - обсяг вбірки, $\mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1}$ - оцінка м.с. на попередньому кроці при величині вбірки $k-1$.

Визначимо абсолютне значення відносної похибки оцінювання м.с. як

$$\frac{\|\Delta \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}_0\|} = \left\| \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})_k - \mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1}}{\mathbf{y}_0} \right\|. \quad (20)$$

Підставивши у (20) значення $\mathbf{M}(\mathbf{y})_k$ із (19), після перетворень отримаємо

$$\frac{\|\Delta \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}_0\|} = \left\| \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1} - \mathbf{y}_l}{k\mathbf{y}_0} \right\|.$$

Оскільки максимальне можливе значення похибки складає $\left\| \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1}}{k\mathbf{y}_0} \right\|$, маємо

$$\frac{\|\Delta \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}_0\|} \leq \frac{1}{k} \cdot \left\| \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1}}{\mathbf{y}_0} \right\|. \quad (21)$$

Враховуючи, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1} = \mathbf{y}_0$, для великих значень k можна прийняти

$$\delta_y \leq 1/k. \quad (22)$$

Звідси, для забезпечення заданої точності δ_y вимірювань вектора \mathbf{y} кількість вимірювань має скласти

$$k \geq 1/\delta_y. \quad (23)$$

Для забезпечення заданої точності δ_x розв'язку погано обумовленої СЛАР (1) кількість вимірювань вектора \mathbf{y} має скласти

$$k \geq \text{cond}(\mathbf{A})/\delta_x. \quad (24)$$

Співвідношення (24) зручне тим, що взагалі кажучи, не вимагає апріорної інформації про \mathbf{x}_0 . Для знаходження необхідної кількості вимірювань потрібно лише знати число обумовленості матриці \mathbf{A} і бажане значення відносної похибки результату. Недоліком такого способу є занадто висока кількість необхідних вимірювань. Наприклад, при 5% точності результату і числі обумовленості 1000, кількість необхідних вимірювань дорівнює 20000, що в більшості випадків дуже важко реалізувати. Однак (24) може бути з успіхом застосована для оцінки точності розв'язку при відносно невеликих $\text{cond}(\mathbf{A})$.

Якщо кількість необхідних вимірювань, обчислена за (24), достатньо велика і не може бути реалізована на практиці, пропонується наступний наближений статистичний алгоритм одержання необхідної кількості вимірювань для забезпечення заданої точності розв'язку СЛАР. Спосіб базується на статистичній оцінці кількості вимірювань k , необхідних для отримання $\mathbf{M}(\mathbf{y})$ із заданою похибкою і з заданою довірчою імовірністю.

Розглянемо вектор виміряних величин $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}$. Очевидно, що імовірнісні властивості \mathbf{y} визначаються густиною розподілу вектора похибок $\Delta \mathbf{y}$. При цьому густина розподілу \mathbf{y}

$$f(\mathbf{y}) = \left((2\pi)^n \Sigma \right)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right], \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (25)$$

де $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}(\mathbf{y})$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ - вектор м.с. (середніх значень) \mathbf{y} , $\Sigma = \text{cov}(\mathbf{y})$ - квадратна невід'ємно визначена симетрична коваріаційна матриця розміром $n \times n$, на діагоналі якої розташовуються дисперсії компонент вектора, а зовнішньодіагональні елементи є коваріації між компонентами \mathbf{y}_i , $|\Sigma| = \det(\Sigma)$ - визначник матриці Σ , а Σ^{-1} - зворотна до неї матриця.

Нагадаємо, що при виборці k (k - кількість вимірювань вектора \mathbf{y}) вираз для вибіркової коваріаційної матриці Σ

$$\Sigma = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T, \quad \text{де } \bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i. \quad (26)$$

Основним методом оцінювання параметрів багатомірних випадкових величин є метод вибіркового аналізу. Згідно цього методу із генеральної сукупності досліджуваного випадкового вектора добувається вибірка, яка аналізується, і результати аналізу поширюються на всю генеральну сукупність. Зауважимо, що аналогом довірчого інтервалу для одномірної випадкової величини для багатомірної випадкової величини є довірча область.

Оцінимо довірчу область для \mathbf{y} . Нехай знайдено вектор точкових оцінок м.с. (вбіркових середніх) $\bar{\mathbf{y}}$ вектора \mathbf{y} і матриця оцінок коваріацій Σ . Для $n > 1$ при побудові довірчої області використовують статистику T^2 (статистику Хотеллінга)

$$T^2 = k(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu})\mathbf{C}^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}). \quad (27)$$

При заданій довірчій імовірності P , відомих значеннях k і n статистика T^2 пов'язана із статистикою Фішера F

$$T^2 = [n(k-1)/(k-n)]F. \quad (28)$$

Враховуючи це співвідношення, довірча область м.с. вектора \mathbf{y} з довірчою імовірністю P описується рівнянням поверхні

$$(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}) = [n(k-1)/(k(k-n))]F_{1-P}, \quad (29)$$

де F_{1-P} - значення F , що відповідає рівню значущості $\alpha = 1 - P$ при числах ступенів вільності $f_1 = n$ і $f_2 = k - n$.

Довірча область визначає n -мірний еліпсоїд з центром $\bar{\mathbf{y}}$, оскільки $(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu})$ являє собою додатну визначену квадратичну форму. Співвідношення (29) придатне для визначення допустимої похибки $\delta_y = (\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu})/\boldsymbol{\mu}$ вимірювань вектора \mathbf{y} за умов відомої кількості вимірювань k .

В припущенні, що з ростом обсягу вибірки (кількості вимірювань) k м.с. вектора похибок $\Delta\mathbf{y} \rightarrow 0$, середні значення вимірених величин наближаються до істинних і $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{y}_0$. Тоді перепишемо (29) у формі

$$(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0) = [n(k-1)/(k(k-n))]F_{1-P}. \quad (30)$$

Співвідношення (30) можна переписати у вигляді:

$$(\Delta\mathbf{y})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \Delta\mathbf{y} = [n(k-1)/(k(k-n))]F_{1-P}. \quad (31)$$

Враховуючи (31) можна наближено знайти необхідну кількість вимірювань k для досягнення заданої точності розв'язку $\Delta\mathbf{x}$, для чого пропонується наступний ітераційний алгоритм.

Алгоритм застосовується для заданих довірчій ймовірності P та допустимій похибці розв'язку $\|\Delta\mathbf{x}_{\text{дон}}\|$.

Перед початком алгоритму здійснюють k вимірювань вектора $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Роботу алгоритму можна представити у вигляді трьох кроків.

Крок 1 (обчислення похибки). Розраховують вибіркоче середнє $\bar{\mathbf{y}}^{(t)}$, обернену коваріаційну матрицю $(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{(t)}$, значення F -статистики Фішера $(F_{1-P})^{(t)}$, і, використовуючи (17), обчислюють $\boldsymbol{\mu}^{(t)}$ і похибку вимірювань $\Delta\mathbf{y}^{(t)} = \bar{\mathbf{y}}^{(t)} - \boldsymbol{\mu}^{(t)}$, і з допомогою (9) знаходять значення максимальної похибки розв'язку $\|\Delta\mathbf{x}\|^{(t)}$.

Крок 2 (порівняння). Максимальну похибку розв'язку $\|\Delta\mathbf{x}\|^{(t)}$ порівнюють з допустимою похибкою $\|\Delta\mathbf{x}_{\text{дон}}\|$. Якщо $\|\Delta\mathbf{x}\|^{(t)} \leq \|\Delta\mathbf{x}_{\text{дон}}\|$, то отримана задовільна точність, інакше, якщо $\|\Delta\mathbf{x}\|^{(t)} > \|\Delta\mathbf{x}_{\text{дон}}\|$, то обчислюють коефіцієнт зменшення похибки $\xi = \|\Delta\mathbf{x}\|^{(t)} / \|\Delta\mathbf{x}_{\text{дон}}\|$.

Крок 3 (виправлення і уточнення). Обчислюють «виправлений» вектор похибок $\Delta\mathbf{y}^{(t+1)} = \Delta\mathbf{y}^{(t)} / \xi$ і далі за формулою (18) - значення $k^{(t+1)}$. Оскільки значення $k^{(t+1)}$ було розраховане за результатами першого кроку t , воно вимагає уточнення, тому методом Монте-Карло генерують $k^{(t+1)}$ векторів експериментальних даних з похибками вимірювань, що дорівнюють похибкам проведених k експериментів.

Ітераційний процес припиняється тоді, коли $\|\Delta\mathbf{x}\|^{(t)} \leq \|\Delta\mathbf{x}_{\text{дон}}\|$. Одержане значення k є шуканим.

Збіжність алгоритму досягається гарантованим існуванням розв'язку рівняння (31). Алгоритм можна реалізувати на сучасних комп'ютерних системах, які використовують відомі методи оптимізації та їх бібліотеки, наприклад Matlab.

Висновки і обговорення

В роботі показаний зв'язок числа обумовленості матриць і точності розв'язку зворотних задач у вигляді СЛАР та обґрунтовано застосування методу найменших квадратів для підвищення стійкості лінійних моделей. Запропоновано метод забезпечення стійкості їх розв'язку, що базується на залученні додаткової інформації шляхом збільшення кількості вимірювань вихідних параметрів. Розроблено спосіб і статистичний алгоритм забезпечення заданої точності рішення погано обумовлених СЛАР.

Здавалося б, збільшуючи кількість вимірювань k , можна отримати результат з будь-яким ступенем точності. Однак точність істотно збільшується лише до тих пір, поки випадкова похибка не стане порівнянною із систематичною. Подальше збільшення числа вимірювань недоцільно, тому кінцева точність результату буде

залежати лише від систематичної похибки. Накопичувати експериментальні дані і зменшувати за рахунок цього стандартне відхилення м.с. має сенс лише до тих пір, поки за умовою ним не можна знехтувати у порівнянні з аналогом середнього квадратичного відхилення, яке враховує дефіцит інформації. Точність багаторазового вимірювання, отже, обмежується дефіцитом інформації, що і викликає систематичну похибку [9].

Якщо систематична похибка, що викликана неточністю вимірювальних приладів і результатами моделювання, суттєво менша випадкової похибки вимірювань, то нею можна знехтувати, інакше її слід додати до випадкової похибки і врахувати при оцінці точності розв'язку зворотної задачі.

Систематичну похибку можна оцінити, промоделивавши за допомогою методу Монте-Карло деяку велику кількість розв'язків прямої задачі із відомими вхідними величинами і порівнюючи результати статистичного моделювання із вимірювальними. В результаті можна підвищити точність розв'язку зворотної задачі, наприклад, промоделивавши методом Монте-Карло деяку достатньо велику кількість вимірювань із випадковою похибкою, що дорівнює похибці вимірювальних приладів, і систематичною похибкою, знайденою шляхом моделювання прямої задачі.

Литература

1. Андрушевский Н.М. Анализ устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений: Учебное пособие. / Н.М. Андрушевский –М. : Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. – 71 с.
2. Белман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Белман - М. : Изд. ИЛ, 1954. - 300 с.
3. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин — М. : Наука, 1979.
4. Иванов В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин В.П. Танана. — М. : Наука, 1978.
5. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач / В.А. Морозов — М. : Изд-во Моск. Ун-та, 1987.
6. Бакушинский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач / А.В. Бакушинский, А.В. Гончарский. — М. : Наука, 1989.
7. Теребиж В.Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач / В.Ю. Теребиж – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 376 с.
8. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности. В 2-х т.: / Ю.М. Мацевитый / НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного - Киев: Наукова думка, 2003.
9. Новицкий П.Ф. Оценка погрешностей результатов измерений / П.Ф. Новицкий, И.А. Зограф – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1985.-248 с.

References

1. Andrushevsky N.M. The analysis of the stability of solutions of systems of linear algebraic equations: the manual. -M. : Publishing Department of the Faculty of Moscow State University named after MV University; MAKS Press , 2008 . - 71 .
2. Bellman R. Stability theory of differential equations / Bellman R. - M. Ed. IL, 1954 . - 300 .
3. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Methods for solving ill-posed problems. - Moscow: Nauka, 1979 .
4. V.K. Ivanov, V.V. Vasin, VP Tanana, Theory of linear ill-posed problems and its applications. - Moscow: Nauka, 1978 .
5. V.A. Morozov, Regularization methods unstable problems. - Moscow: Mosk. University Press , 1987 .
6. Bakushinskii A.V, Goncharkii A.V. Iterative methods for solving ill-posed problems. - Moscow: Nauka, 1989 .
7. Terebizh V.Y. Introduction to the statistical theory of inverse problems. - Moscow: FIMZMATLIT 2005. - 376 p.
8. Matsevity Y.M. Inverse heat conduction problem. In 2 volumes: - National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Problems of Mechanical Engineering. - Kiev: Naukova Dumka , 2003 .
9. Novitsky, PF, IA Zograph Evaluation results of measurement errors . - L. Energoatomizdat. Leningrad. Dep-tion , 1985.-248 with .

Рецензія/Peer review : 1.11.2013 р. Надрукована/Printed :24.11.2013 р.
Статтю представляє: Ройзман В.П., д.т.н., проф.