

4. Лукашенко В. М. О перспективности таблично-алгоритмических методов при реализации высоких информационных технологий [Текст] / В. М. Лукашенко // Вісник ЧІТІ. – 2000. - № 4. - С. 18 – 22.

5. Пат. України 40745, Україна, МПК G06G7/00. Цифровий пристрій для обчислення функцій / Лукашенко В.М., Дахно С.В., Лукашенко А.Г., Рудаков К.С., Лукашенко В.А., Вербицький О.С.; заявник Черкаський державний технологічний університет. - №u200813059; заявл. 10.11.2008; опубл. 27.04.2009; Бюл. №8.

References

1. Klassyfykatsiya y struktura mykrokontrolerov [Elektronnyi resurs] / Elektronika prosto y poniatno – Rezhym dostupa : \WWW/ URL: <http://naf-st.ru/articles/mpmc/m011/> 20.03.2010 h. – Nazva z ekranu.

2. Lukashenko A. H. Vyivlennia rezervu predmeta doslidzhennia na osnovi teorii nepovnoi podobnosti ta rozmirnosteï / A. H. Lukashenko, O. A. Kulyhin, V. M. Lukashenko // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. – 2009. №3. С. 184 – 187.

3. Lukashenko A. H. Metodolohiia udoskonalennia modeli odno krystalnoho mikrokontrolera / A. H. Lukashenko, K. S. Rudakov, R. Ye. Yupyn, D. A. Lukashenko // Vostochno-Evropeyskyi zhurnalпередовыkh tekhnolohiyi. – 2011. – №5/9 (53). – С. 51–54.

4. Lukashenko V. M. O perspektyvnyosti tablychno-alhorytmicheskykh metodov pry realizatsyy vysokyykh ynformatsyonnykh tekhnolohiyi / V. M. Lukashenko // Visnyk ChITi. – 2000. №4. С. 18 – 22.

5. Pat. Ukrainy 40745, Ukraina, MPK G06G7/00. Tsyfrovyy prystrii dlia obchyslennia funktsii / Lukashenko V.M., Dakhno S.V., Lukashenko A.H., Rudakov K.S., Lukashenko V.A., Verbytskyi O.S.; zaiavnyk Cherkaskyyi derzhavnyi tekhnolohichnyi universytet. - №u200813059; zaiavl. 10.11.2008; opubl. 27.04.2009; Biul. №8.

Рецензія/Peer review : 15.9.2013 р. Надрукована/Printed :24.11.2013 р.

Рецензент: Тимченко А.А., д.т.н., проф.

УДК 621.317.73

В.Д. КОСЕНКОВ, В.В. МАРТИНЮК

Хмельницький національний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У РЕГУЛЯРНІЙ RC ЛІНІЇ ПЕРЕДАЧІ З ВТРАТАМИ

В статті проаналізовано схему заміщення регулярної RC лінії передачі з втратами. Визначено вираз комплексного опору регулярної RC лінії передачі з втратами. Отримано вираз перехідного опору регулярної RC лінії передачі з втратами шляхом розкладання комплексного опору лінії в ряд та знаходження оберненого перетворення Лапласа для цього ряду.

Ключові слова: регулярна RC лінія передачі з втратами, комплексний опір, перехідний опір, перехідний процес.

V. D. KOSENKOV, V. V. MARTYNYUK

Khmelnytsky National University

MODELLING OF THE TRANSIENT PROCESSES IN THE REGULAR RC TRANSMISSION LINE WITH LOSSES

Abstract – The equivalent circuit of the regular RC transmission line with losses was analyzed. The impedance expression of the regular RC transmission line with losses was defined. The transient resistance of the regular RC transmission line with losses was obtained by means of expanding of the impedance expression of the regular RC transmission line with losses into series and defining of the inverse Laplace transform for this series.

Key words: the regular RC transmission line with losses, impedance, transient resistance, transient process

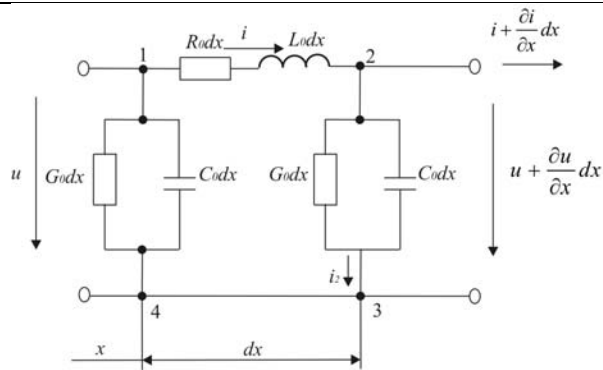
Вступ

Регулярні лінії передачі широко застосовуються в електротехнічних та радіотехнічних пристроях та засобах зв'язку. При передачі енергії по регулярній лінії передачі виникають втрати енергії за рахунок активного опору провідників лінії та кінцевого опору їх ізоляції, що спричинює появу струмів через ізоляцію по всій довжині регулярної лінії передачі. Важливу роль у регулярних лініях передачі відіграють перехідні процеси, які виникають у лінії при під'єднанні до неї джерела напруги або струму.

Дослідженню перехідних процесів у регулярних лініях передачі присвячено велику кількість публікацій, але у них в більшості випадках розглядають регулярні лінії передачі без втрат. Для таких ліній отримані аналітичні вирази струму і напруги в лінії, що дозволяє промодельовати перехідні процеси в регулярних лініях передачі без втрат. Що стосується регулярних ліній передачі з втратами, то для них відсутні аналітичні вирази струму і напруги в лінії. Тому метою даної роботи є отримання аналітичних виразів струму і напруги в регулярній лінії передачі з втратами.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Питанням дослідження регулярних ліній передачі присвячено велику кількість літературних джерел. Регулярну лінію передачі з втратами можна представити у вигляді розподілених по довжині лінії L активного опору $R_0 dx$ провідників лінії, їх індуктивності $L_0 dx$, а також паразитної провідності між провідниками лінії $G_0 dx$ та паразитної ємності $C_0 dx$, яка виникає між провідниками (рис. 1) [1, 2].

Рис. 1. Схема заміщення регулярної лінії передачі довжиною dx

Регулярна лінія передачі характеризується погонними електричними параметрами R_0 , L_0 , G_0 та C_0 , які визначаються на одиницю довжини регулярної лінії передачі.

З літературних джерел [1, 2] відома система диференціальних рівнянь, які описують напругу та струм у лінії, як функції двох змінних – просторової координати x , яка визначає відстань від початку лінії, та часу t . Ці рівняння отримали назву телеграфних рівнянь (1).

Отримати аналітичний розв'язок наведеної системи рівнянь в часткових похідних при визначених початкових та граничних умовах до теперішнього часу є не вирішеною задачею. Розв'язок цієї задачі є можливим лише при використанні чисельних методів інтегрування та застосуванні ПЕОМ.

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (1)$$

МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНОГО ОПОРУ РЕГУЛЯРНОЇ RC ЛІНІЇ ПЕРЕДАЧІ З ВТРАТАМИ

Частковий аналітичний розв'язок поставленої задачі можна отримати для спрощеної регулярної лінії передачі, якщо припустити, що погонні індуктивність L_0 та провідність лінії G_0 дорівнюють нулю. Таке припущення є можливим на низьких частотах роботи регулярної лінії передачі, коли вплив індуктивності та провідності лінії передачі є незначним, але значними є погонні втрати R_0 та ємність C_0 лінії передачі. Прикладом такої регулярної лінії передачі може бути пористий електрод суперконденсатора, який характеризується значною погонною ємністю та активним погонним опором. Схема регулярної RC лінії з втратами та ємністю зображена на рис. 2.

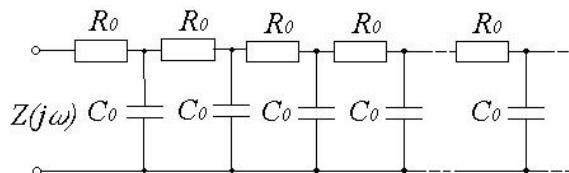


Рис. 2. Схема заміщення регулярної RC лінії передачі р втратами

Нехай струм i та напруга в лінії змінюються у часі по синусоїдальному закону з кутовою швидкістю ω . Користуючись комплексним методом, представимо рівняння лінії для комплексних діючих напруг \dot{U} та \dot{I} [1, 2]:

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = R_0 \dot{I}, \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = j\omega C_0 \dot{U}. \end{cases} \quad (2)$$

Комплексні \dot{U} та \dot{I} є функціями тільки x , і, відповідно, рівняння в часткових похідних для миттєвих u та i перейшли в звичайні диференціальні рівняння для \dot{U} та \dot{I} .

Виразимо комплексну амплітуду струму \dot{I} у першому рівнянні через комплексну амплітуду напруги \dot{U} із другого рівняння, а комплексну амплітуду напруги \dot{U} у другому рівнянні через комплексну амплітуду струму \dot{I} із першого рівняння. Отримаємо систему регулярних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку (3) для елементарної ділянки dx [1, 2].

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{U}, \\ \frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{I}. \end{cases} \quad (3)$$

де $\gamma = \sqrt{j\omega R_0 C_0} = \sqrt{j\omega \tau}$ – коефіцієнт розповсюдження лінії, τ – постійна часу лінії.

Загальний розв'язок першого однорідного лінійного диференційного рівняння другого порядку із системи (3) шукають для \dot{U} елементарної ділянки dx у вигляді (4) [1, 2].

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}. \quad (4)$$

де A_1 та A_2 – константи інтегрування.

Якщо підставити вираз комплексної напруги \dot{U} (4) у перше рівняння системи (2), то можна отримати вираз для комплексної амплітуди струму \dot{I} елементарної ділянки регулярної лінії передачі dx (5) [1,2].

$$\dot{I} = \frac{1}{Z} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}). \quad (5)$$

де $Z = \sqrt{\frac{R_0}{j\omega C_0}}$ – хвильовий або характеристичний опір лінії.

В подальшому будемо позначати струм та напругу на початку лінії ($x=0$) індексом 1 (\dot{I}_1, \dot{U}_1) та в кінці лінії ($x=l$, l – довжина лінії) – індексом 2 (\dot{I}_2, \dot{U}_2).

Для визначення постійних інтегрування A_1 та A_2 достатньо знати дві з цих чотирьох величин. Виразимо ці постійні через напругу \dot{U}_1 та струм \dot{I}_1 на початку лінії при $x=0$

$$\dot{U}_1 = A_1 + A_2 \text{ та } \dot{I}_1 = \frac{1}{Z} (A_1 - A_2);$$

$$A_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) \text{ та } A_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z).$$

Тоді

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z) e^{\gamma x}; \\ \dot{I} = \frac{1}{Z} \left[\frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z) e^{\gamma x} \right]. \end{cases} \quad (6)$$

Ці вирази для напруги \dot{U} і струму \dot{I} в будь-якій точці регулярної RC лінії передачі можна записати також в іншій формі, використовуючи співвідношення:

$$\frac{1}{2} (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = ch \gamma x \text{ та } \frac{1}{2} (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = sh \gamma x.$$

Отримаємо

$$\dot{U} = \dot{U}_1 ch \gamma x - \dot{I}_1 Z sh \gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 ch \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z} sh \gamma x.$$

Значення напруги та струму в кінці лінії отримують, якщо прийняти $x=l$:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 ch \gamma l - \dot{I}_1 Z sh \gamma l; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 ch \gamma l - \frac{\dot{U}_1}{Z} sh \gamma l.$$

З цих рівнянь можна визначити \dot{I}_1, \dot{U}_1 через \dot{I}_2, \dot{U}_2 . Маємо

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 ch \gamma l + \dot{I}_2 Z sh \gamma l, \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z} sh \gamma l + \dot{I}_2 ch \gamma l. \end{cases} \quad (7)$$

Враховуючи, що комплексний вхідний опір регулярної RC лінії з втратами $Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$, а комплексний

вихідний опір лінії $Z_{вих} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$, після математичних перетворень отримаємо вираз для $x' = l - x$:

$$Z_{ex} = Z \frac{e^{\gamma x'} + \frac{Z_{eux} - Z}{Z_{eux} + Z} e^{-\gamma x'}}{e^{\gamma x'} - \frac{Z_{eux} - Z}{Z_{eux} + Z} e^{-\gamma x'}}. \quad (8)$$

В режимі холостого ходу, коли вихідний кінець регулярної RC лінії з втратами розімкнутий ($Z_{eux} = \infty$), вираз (8) можна записати у вигляді:

$$Z_{ex} = Z \cdot \operatorname{cth} \gamma x'. \quad (9)$$

Зробимо заміну Z та γ їх виразами відповідно $Z = \sqrt{\frac{R_0}{j\omega C_0}}$ та $\gamma = \sqrt{j\omega R_0 C_0} = \sqrt{j\omega \tau}$. В результаті отримаємо вираз:

$$Z_{ex}(j\omega) = \sqrt{\frac{R_0}{j\omega C_0}} \operatorname{cth}[\sqrt{j\omega R_0 C_0} x'] = \sqrt{\frac{R_0}{j\omega C_0}} \operatorname{cth}[\sqrt{j\omega \tau} x']. \quad (10)$$

Запишемо вираз операторного вхідного опору для розімкнutoї регулярної RC лінії з втратами. Для цього зробимо заміну у виразі (10) $p = j\omega$.

$$Z_{ex}(p) = \sqrt{\frac{R_0}{p C_0}} \operatorname{cth}[\sqrt{p R_0 C_0} x'] = \sqrt{\frac{R_0}{p C_0}} \operatorname{cth}[\sqrt{p \tau} x']. \quad (11)$$

Для знаходження перехідного опору розімкнutoї регулярної RC лінії з втратами необхідно знайти обернене перетворення Лапласа для виразу операторного вхідного опору (11). Відомі таблиці прямого та оберненого перетворення Лапласа не містять перетворення, яке б задовольняло б вираз (11). Класичне інтегрування для виразу (11) є досить складною задачею і не описане в літературних джерелах. Тому для знаходження оберненого перетворення Лапласа для виразу операторного вхідного опору (11) необхідно цей вираз розкласти в ряд.

Класичним розкладанням функції гіперболічного котангенса є ряд Лорана:

$$\operatorname{cthx} = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!}, \quad (12)$$

де $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} r^n$ – числа Бернуллі; $0 < |x| < \pi$;
 $\binom{k}{r}$ – біноміальні коефіцієнти.

У нашому випадку $x = \sqrt{p R_0 C_0} x' = \sqrt{p \tau} x'$. Тоді вираз операторного вхідного опору для розімкнutoї регулярної RC лінії з втратами можна записати з урахуванням виразу (12):

$$\begin{aligned} Z_{ex}(p) &= \sqrt{\frac{R_0}{p C_0}} \left[\frac{1}{\sqrt{p R_0 C_0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n (\sqrt{p R_0 C_0})^{2n-1}}{(2n)!} \right] = \frac{1}{p C_0} + \frac{R_0}{3} - \frac{p R_0^2 C_0}{45} + \frac{2p^2 R_0^3 C_0^2}{945} - \frac{p^3 R_0^4 C_0^3}{4725} + \dots = \\ &= \frac{1}{p C_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n p^{n-1} R_0^n C_0^{n-1}}{(2n)!} \end{aligned} \quad (13)$$

Для визначення перехідного вхідного опору розімкнutoї регулярної RC лінії з втратами необхідно знайти обернене перетворення Лапласа для виразу операторного вхідного опору (13).

$$Z_{ex}(t) = \frac{1}{C_0} + \frac{R_0}{3} \delta(t) - \frac{R_0^2 C_0}{45} \delta'(t) + \frac{2R_0^3 C_0^2}{945} \delta''(t) - \frac{R_0^4 C_0^3}{4725} \delta'''(t) + \dots = \frac{1}{C_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n t^{(n-1)} R_0^n C_0^{n-1}}{(2n)!}, \quad (14)$$

де $\delta(t)$ – дельта функція Дірака; $\delta'(t), \delta''(t), \delta'''(t), \dots, \delta^{(n-1)}(t)$ – відповідно перша, друга, третя, ..., $n-1$ похідна від дельта функції Дірака.

Отриманий вираз (14) перехідного опору розімкнutoї регулярної RC лінії з втратами є теоретичним і не дозволяє провести практичне моделювання перехідних процесів у регулярній RC лінії з втратами за допомогою ПЕОМ, тому що похідні від дельта функції Дірака математично невизначені.

Тому необхідно виконати інше розкладання в ряд виразу операторного вхідного опору для розімкнutoї регулярної RC лінії з втратами (11). Для цього запишемо вираз функції гіперболічного котангенса у вигляді:

$$\operatorname{cthx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = -1 + \frac{2}{1 - e^{-2x}}. \quad (15)$$

З математики відомо, що сума членів спадаючої геометричної прогресії визначається виразом:

$$S_n \rightarrow \frac{b_1}{1-q} \text{ при } |q| < 1 \text{ та } n \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

У нашому випадку $q = e^{-2x}$ та $b_1 = 1$, тоді функцію гіперболічного котангенса у вигляді:

$$cthx = -1 + 2 \cdot \frac{1}{1 - e^{-2x}} = -1 + 2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nx}. \quad (17)$$

Тоді вираз операторного вхідного опору для розімкнутої регулярної RC лінії з втратами можна записати з урахуванням виразу (17):

$$Z_{ex}(p) = \sqrt{\frac{R_0}{pC_0}} \left[-1 + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n(\sqrt{pR_0C_0})} \right]. \quad (18)$$

По таблицям оберненого перетворення Лапласа [6] знайдемо оригінали для доданків, які входять до складу операторного вхідного опору для розімкнутої регулярної RC лінії з втратами:

$$\sqrt{\frac{R_0}{C_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \leftrightarrow \sqrt{\frac{R_0}{C_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \quad (19)$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \cdot e^{-\sqrt{a}\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot e^{-k\sqrt{p}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{k^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{4t}}. \quad (20)$$

У відповідності до виразу операторного вхідного опору для розімкнутої регулярної RC лінії з втратами та виразу $\sqrt{\alpha} = 2 \cdot n \cdot \sqrt{R_0 C_0}$, отримаємо вираз перехідного вхідного опору розімкнутої регулярної RC лінії з втратами:

$$Z_{ex}(t) = -\sqrt{\frac{R_0}{\pi t C_0}} + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{4n^2 R_0 C_0}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left(2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{4n^2 R_0 C_0}{4t}} - \sqrt{\frac{R_0}{C_0}} \right). \quad (18)$$

ВИСНОВКИ

1. В роботі встановлено, що промоделювати перехідний вхідний опір розімкнутої регулярної RC лінії з втратами з використанням класичного розкладання функції гіперболічного котангенса в ряд Лорана неможливо, тому що у виразі присутні відповідно перша, друга, третя, ..., $n-1$ похідні від дельта функції Дірака. Це робить неможливим застосування ПЕОМ для розрахунків значень цього виразу, тому що похідні від дельта функції Дірака є невизначеними.

2. Запропоновано розкласти вираз операторного вхідного опору для розімкнутої регулярної RC лінії з втратами у ряд, використовуючи вираз суми членів спадаючої геометричної прогресії. Це дозволило знайти обернене перетворення Лапласа для цього виразу та визначити вираз операторного вхідного опору для розімкнутої регулярної RC лінії з втратами без застосування похідної від дельта функції Дірака. Такий підхід дозволяє застосовувати ПЕОМ для моделювання перехідних процесів у розімкнутій регулярній RC лінії з втратами.

Література

1. Атабеков Г.И. Основы теории цепей / Атабеков Г.И. – Издательство: М.: Энергия, 1969. – 427 с.
2. Попов В.П. Основы теории цепей / Попов В.П. – «Радиотехника». – М.: Высшая школа, 1985. – 496 с.
3. Песков С.Н. / Основы теории линий передачи на высоких частотах / Песков С.Н. – Часть 1: Режимы работы длинной линии. «Телеспутник», - 2009г., №5, с.74-78.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами / Баскаков С.И. – М.: Высшая школа, 1982. – 152с.
5. Улахович Д.А. / Основы теории линейных электрических цепей / Улахович Д.А – СПб.: БХВ – Петербург, 2009. -816с.
6. Абрамовиц М. / Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Абрамовиц М., Стиган И. – Издательство: М.: Наука, 1979. – 832 с.

References

1. Atabekov G.I. Osnovy teorii cepej. Izdatel'stvo, Moskva, E`nergiya, 1969, 427 p.
2. Popov V.P. Osnovy teorii cepej. Radiotexnika. Moskva, Vy`sshaya shkola, 1985, 496 p.
3. Peskov S.N. Osnovy teorii linij peredachi na vy`sokix chastotax. Chast' 1, Rezhimy` raboty` dlinnoj linii, Telesputnik, 2009, No. 5, pp. 74-78.
4. Baskakov S.I. Radiotexnicheskie cepi s raspredelenny`mi parametrami. Moskva, Vy`sshaya shkola, 1982, 152 p.
5. Ulahovich D.A. Osnovy teorii linejny`x elektricheskix` cepej. SPb. BXV. Peterburg, 2009, 816 p.
6. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables Izdatel'stvo, Moskva, Nauka, 1979, 832 p.

Рецензія/Peer review : 24.10.2013 р. Надрукована/Printed :24.11.2013 р.
Рецензент: Диха О.В., д.т.н., проф.