УДК 519.21

І.С. ПЯТІН, І.С. КАТЕРИНЧУК, О.В. ВЕРЖБИЦЬКИЙ
Хмельницький національний університет

ВИЗНАЧЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОЇ ГУСТИНИ ПОТУЖНОСТІ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Стаття присвячена визначенню спектральної густини потужності випадкового процеса. За основу береться сигнал з випадковою початковою фазою. Це вузькосмуговий випадковий процесс. Якщо випадкова величина – струм або напруга, то середній квадрат цієї функції – це середня потужність, що виділяється на опорі 1 Ом. Ця потужність розподілена по частотам в деякій смузі. Спектральна густина середньої потужності є потужністю, що виділяється на 1 Гц при заданій частоті.

Ключові слова: випадковий процес, спектральна густина середньої потужності, активна ширина спектру.

I.S. PYATIN, I.S. KATERENCHUK, O.V. VERGBITSKIY
Khmelnitskiy national university

DEFINITION POWER SPECTRAL DENSITY OF A RANDOM PROCESS

Abstract - We consider the rules of power spectral density of a random process. The basis of a signal from a random initial phase. This narrow-band random process. If a random variable - current or voltage, the mean square of this function - is the average power emitted at 1 ohm resistance. This power is distributed in a certain frequency band. Average power spectral density is the power allocated to 1 Hz at a given frequency. If the spectral power density averaged over many implementations, it describes the whole process. In general, the spectral power density has a continuous part of the spectrum, corresponding to the fluctuation component and the delta function.

Keywords : Random process, average power spectral density, active width of the spectrum.

Постановка задачі. Математичними моделями випадкових сигналів і завад є випадкові процеси. Випадковим процесом називається зміна випадкової величини в часі. До випадкових процесів відноситься більшість процесів, що протікають в радіотехнічних пристроях, а також завади, що супроводжують передачу сигналів по каналах зв'язку. Випадкові процеси можуть бути безперервними, або дискретними залежно від того, яка випадкова величина безперервна або дискретна змінюється у часі [1].

Передача інформації в системах зв’язку відбувається випадковими сигналами.

Сигналом називають змінну в часі фізичну величину, що відображає повідомлення. Для детермінованих сигналів розглядають такі характеристики: форма сигналу, спектр сигналу, комплексна обвідна, енергія, функція невизначеності сигналу, автокореляційна і частотна кореляційна функції.

Між спектральною густиною середньої потужності випадкового процесу і його кореляційною функцією є зв’язок, що виражається теоремою Вінера- Хінчина:

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau ,$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega .$$

Середня потужність випадкового процесу

Визначимо середню потужність випадкового процесу з математичною моделлю:
$s(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \Theta_0)$ з випадковою початковою фазою. Це вузькосмуговий випадковий процес.
Початковий момент другого порядку (математичне очікування) визначається виразом [2]:

$$M\left\{\xi^2(t)\right\} = M\left\{\frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2}{2}\cos(4\pi f_0 t + 2\Theta_0)\right\} =$$

$$= \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\cos(4\pi f_0 t + 2\Theta_0) d\Theta = \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2}{\pi}\sin(4\pi f_0 t) .$$

Оскільки математичне очікування залежить від часу, випадковий процес $\xi(t)$ нестаціонарний і неергодичний.

Для знаходження середньої потужності процесу усереднимо математичне очікування за часом:

$$P_\xi = \overline{M\left\{\xi^2(t)\right\}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[\frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2}{\pi}\sin(4\pi f_0 t)\right] dt = \frac{A_0^2}{2} .$$

Спектральна густина середньої потужності випадкового процесу $\xi(t)$ визначається виразом:

$$W_\xi(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{M\left\{\left|S_{T_b}(f)\right|^2\right\}}{T} .$$

Визначимо спектральну густину k-ої реалізації випадкового процесу $\xi(t)$. Тривалість k-ої реалізації дорівнює T.

$$S_{T_b} = \int_{-T/2}^{T/2} A_0 \cos(2\pi f_0 t + \Theta_0) e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \frac{A_0}{2} e^{j\Theta} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi(f_0 - f)t} dt + \frac{A_0}{2} e^{-j\Theta} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi(f_0 + f)t} dt =$$

$$= \frac{A_0}{2} \left\{ e^{j\Theta} \frac{\sin\left[\pi(f_0 - f)T\right]}{\pi(f_0 - f)} + e^{-j\Theta} \frac{\sin\left[\pi(f_0 + f)T\right]}{\pi(f_0 + f)} \right\} =$$

$$= \frac{A_0 T}{2} \left\{ e^{j\Theta} \,\mathrm{Sinc}\left[(f_0 - f)T\right] + e^{-j\Theta} \,\mathrm{Sinc}\left[(f_0 + f)T\right] \right\}.$$

Визначимо квадрат модуля спектральної густини k-ої реалізації випадкового процесу $\xi(t)$.

$$\left|S_{T_b}(f)\right|^2 = S_{T_b}(f) S^*_{T_b}(f) =$$

$$= \frac{A_0^2 T^2}{4} \left\{ e^{j\Theta} \,\mathrm{Sinc}\left[(f_0 - f)T\right] + e^{-j\Theta} \,\mathrm{Sinc}\left[(f_0 + f)T\right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ e^{-j\Theta} \,\mathrm{Sinc}\left[(f_0 - f)T\right] + e^{j\Theta} \,\mathrm{Sinc}\left[(f_0 + f)T\right] \right\} =$$

$$= \frac{A_0^2 T^2}{4} \begin{Bmatrix} \mathrm{Sinc}^2\left[(f_0 - f)T\right] + \mathrm{Sinc}^2\left[(f_0 + f)T\right] + \\ +2\cos(2\Theta) Sinc\left[(f_0 - f)T\right] Sinc\left[(f_0 + f)T\right] \end{Bmatrix}.$$

Визначимо математичне очікування:

$$M\left\{ \left|S_{T_b}(f)\right|^2 \right\} = \frac{A_0^2 T^2}{4} \left\{ \mathrm{Sinc}^2\left[(f_0 - f)T\right] + \mathrm{Sinc}^2\left[(f_0 + f)T\right] \right\} +$$

$$+2 Sinc\left[(f_0 - f)T\right] Sinc\left[(f_0 + f)T\right] M\left\{\cos(2\Theta)\right\}.$$

Випадкова величина $\Theta \subset \left[0, \pi/2\right]$ і на цьому інтервалі розподілена рівномірно. Це означає, що густина імовірності випадкової величини Θ має вигляд:

$$f_0(x) = \begin{cases} 2/\pi, & \Theta \subset \left[0, \pi/2\right] \\ 0, & \Theta \not\subset \left[0, \pi/2\right] \end{cases},$$

Тоді

$$M\left\{\cos(2\Theta)\right\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2\Theta) d\Theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) dx = 0.$$

Отже,

$$M\left\{ \left|S_{T_b}(f)\right|^2 \right\} = \frac{A_0^2 T^2}{4} \left\{ \mathrm{Sinc}^2\left[(f_0 - f)T\right] + \mathrm{Sinc}^2\left[(f_0 + f)T\right] \right\}.$$

Спектральна густина середньої потужності визначається виразом:

$$W_\xi(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{M\left\{ \left|S_{T_b}(f)\right|^2 \right\}}{T} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A_0^2 T}{4} \left\{ \mathrm{Sinc}^2\left[(f_0 - f)T\right] + \mathrm{Sinc}^2\left[(f_0 + f)T\right] \right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A_0^2 T}{4} \mathrm{Sinc}^2\left[(f_0 - f)T\right] + \lim_{T\to\infty} \frac{A_0^2 T}{4} \mathrm{Sinc}^2\left[(f_0 + f)T\right].$$

Функція $\delta_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{\varepsilon}\left[\dfrac{\sin(\pi t/\varepsilon)}{\pi t/\varepsilon}\right]^2$ при $\varepsilon \to 0$ прямує до дельта-функції $\delta(t)$. В нашому випадку цей вираз можна записати так:

$\lim\limits_{T\to\infty} T Sinc^2\left[(f_0 \pm f)T\right] = \delta(f_0 \pm f)$. Тоді шукана спектральна густина середньої потужності випадкового процесу $\xi(t)$ набуває вигляду:

$$W_\xi(f) = \frac{A_0^2}{4}\left[\delta(f_0 - f) + \delta(f_0 + f)\right].$$

Середню потужність випадкового процесу можна визначити інтегруванням його спектральної густини:

$$P_{\xi} = \frac{A_0^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(f_0 - f) + \delta(f_0 + f) \right] df = \frac{A_0^2}{2}$$

Активна ширина спектру сигналу

Значення амплітудних спектрів усіх фізичних сигналів швидко зменшуються зі збільшенням частоти. У зв'язку з цим основну роль при формуванні сигналів відіграють спектральні складові, зосереджені в обмеженому діапазоні частот. Активною шириною спектра сигналу $s(t)$ є той діапазон частот, спектральні складові якого формують (апроксимують) цей сигнал із заданою точністю. Для оцінювання точності апроксимації на практиці найчастіше використовують енергетичний критерій. У такому випадку активною шириною спектра сигналу $s(t)$ називається той інтервал частот, який містить в собі спектральні складові, що містять переважну частину ($\eta =$ 0,9-0,95) енергії сигналу.

Енергію сигналу визначають за виразом: $E = 2\int_{0}^{\infty} G(f)df$. Тоді активну ширину спектра F_{η} за рівнем η можна знайти, розв'язавши рівняння:

$$\int_{0}^{F_{\eta}} G(f)df = \eta \int_{0}^{\infty} G(f)df$$

Розглянемо спектральну густину потужності $G_b(f)$. Для визначення активної ширини спектру складемо рівняння:

$$U_b^2 \int_{0}^{F_{\eta}} \left(\frac{\sin(\pi f T_b)}{\pi f T_b} \right)^2 d(fT_b) = U_b^2 \eta \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi f T_b)}{\pi f T_b} \right)^2 d(fT_b)$$

Частина енергії сигналу, що міститься у першій арці спектру прямокутного відеоімпульсу визначається програмою в середовищі Matlab:

```
syms x;
S=(sin(x)/x)^2;
I=int(S,x,0,inf);
S1=(sin(x)/x)^2;
I1=int(S1,x,0,pi);
E=I1/I;
subs(E)
```

Енергія першої арки спектра складає величину 90,28% по відношенню до енергії не обмеженого за частотою спектра.

Висновки

В роботі проаналізована спектральна густина потужності випадкового процесу. Якщо випадкова величина – струм або напруга, то середній квадрат цієї функції – це середня потужність, що виділяється на опорі 1 Ом. Ця потужність розподілена по частотам в деякій смузі. Спектральна густина середньої потужності є потужністю, що виділяється на 1 Гц при заданій частоті. Якщо спектральна густина потужності усереднена по багатьом реалізаціям, то вона характеризує весь процес в цілому. В загальному випадку спектральна густина потужності містить в собі суцільну частину спектра, що відповідає флуктуаційній складовій і дельта-функцію.

Література

1. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці: Підручник для студентів вищих навчальних закладів, том 1.-Харків: «Компанія СМІТ».-2003. - 580с.

2. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці: Підручник для студентів вищих навчальних закладів, том 2.-Харків: «Компанія СМІТ».-2003. - 444с.

References

1. Voloshuk Yu.I. Signali ta procesi u radiotehnitsi: Pidruchnik dlia studentiv vishih navchalnih zakladiv, tom 1.-Kharkiv: «Kompania SMIT».-2003. – 580s.

2. Voloshuk Yu.I. Signali ta procesi u radiotehnitsi: Pidruchnik dlia studentiv vishih navchalnih zakladiv, tom 2.-Kharkiv: «Kompania SMIT».-2003. – 444s.

Рецензія/Peer review : 13.6.2014 р. Надрукована/Printed : 12.7.2014 р.
Рецензент: О.М. Шинкарук