

## ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ЛІНІЙНИМИ МОДЕЛЯМИ

В роботі розглянуті недоліки оцінки похибки розв'язку систем лінійних рівнянь за числом обумовленості і запропоновано оцінку дисперсій окремих розв'язків за дисперсіями вимірних величин при точних коефіцієнтах матриці. Запропоновано метод зменшення уявної обумовленості лінійних моделей, який не потребує у дослідника врахування особливостей поставлених задач. Метод базується на розгляді еквівалентної системи лінійних рівнянь, одержаної за допомогою еквівалентних перетворень з початкової, з попереднім відшукуванням такого оптимального вектора коефіцієнтів, щоб еквівалентна система лінійних рівнянь мала обумовленість найменшу із усіх можливих. Поставлену задачу формалізовано як задачу векторної оптимізації і запропоновано комп'ютерний засіб її реалізації. Показана ефективність запропонованого методу при розв'язанні обернених задач параметричної ідентифікації фізико-механічних характеристик нових матеріалів та ідентифікації пружно-інерційних характеристик роторів, що швидко обертаються.

Ключові слова: обернені задачі, стійкість, лінійна модель, похибки, погана обумовленість.

ANDRII VOLODYMYROVYCH GOROSHKO  
Khmelnytsky National University, Ukraine

### IMPROVING THE EFFICIENCY OF SOLVING INVERSE PROBLEMS DESCRIBED BY LINEAR MODELS

*Abstract - The paper shows the shortcomings error estimates to solve systems of linear equations according to the number of conditionality and offered some solutions of the variance estimate variances for measured values with the exact coefficients matrix. The method of reducing the apparent conditioning of linear models, which does not require the researcher to take into account characteristics of the tasks is presented. The method is based on consideration of the equivalent system of linear equations obtained by using equivalent transformations of the original, with the previous finding of the optimal vector of coefficients is equivalent to a system of linear equations conditionality was the least of all possible. Tasked formalized as a vector optimization problem and proposes a means of computer implementation. The efficiency of the proposed method for solving inverse problems of parametric identification of physical and mechanical properties of new materials and identification of elastic-inertial characteristics of rotors that rotate rapidly.*

*Keywords: inverse problems, stability, linear model, errors, ill-conditioning.*

**Вступ.** На сьогодні в більшості технічних задач дослідники користуються лінійними математичними моделями. Розрахунки таких технічних систем найчастіше є оберненими задачами, що приводять до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Внаслідок некоректності постановки таких задач їх розв'язок може істотно відрізнитись від істинних значень шуканих параметрів об'єкта, в першу чергу, через свою нестійкість, і чисельне розв'язання СЛАР навіть на найсучасніших обчислювальних системах не звільняє дослідника від необхідності врахування впливу похибок у вхідних даних на результат.

Нехай технічний об'єкт описується лінійною моделлю виду

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_m\mathbf{a}_m, \quad (1)$$

де  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  – вектор невідомих (об'єкт),  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  – вектор даних спостережень,  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  – вектор-стовбці матриці  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Матриця  $\mathbf{A}$  може розглядатись як математичний запис лінійного оператора  $\mathbf{A}$ , що здійснює відображення абстрактного кінцевомірного дійсного простору  $\mathbb{R}^m$  в інший кінцевомірний простір  $\mathbb{R}^n$ . Також передбачається, що в обох просторах задані ортогональні системи координат.

Без втрати загальності, розглянемо випадок  $m = n$ , тобто матриця  $\mathbf{A}$  квадратна. Нехай замість системи (1) насправді розв'язується система

$$(\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}, \quad (2)$$

тобто елементи матриці, шуканого вектора і правої частини мають деякі невідомі абсолютні похибки  $\Delta\mathbf{A}$ ,  $\Delta\mathbf{x}$  і  $\Delta\mathbf{y}$  відповідно, що залежать від точності контрольно-виміральної апаратури та інших факторів. При цьому, очевидно, похибки вимірних величин малі у порівнянні із істинними значеннями цих величин  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{x}_0$  і  $\mathbf{y}_0$ .

В роботах [1–3] показаний зв'язок числа обумовленості матриці  $\text{cond}(\mathbf{A}_0)$  і відносної та абсолютної похибок розв'язку зворотних задач, що описуються лінійними моделями. Зокрема у роботі [3], із (2) випливає наступне співвідношення

$$\|\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}_0\| \leq \text{cond}(\mathbf{A}_0) \cdot \|\Delta\mathbf{y}\|/\|\mathbf{y}_0\| + [\text{cond}(\mathbf{A}_0)]^2 \cdot \|\Delta\mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}_0\|, \quad (3)$$

де  $\|\cdot\|$  – знак довільної норми.

Аналіз (3) показує, що на величину відносної похибки шуканої величини впливають число обумовленості матриці, що визначається лише її властивостями, а також відносні похибки правих частин і елементів матриці системи. У випадку, коли елементи матриці задані точно, нерівність (3) набуває вигляду

$$\|\Delta \mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}_0\| \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \|\Delta \mathbf{y}\|/\|\mathbf{y}_0\|. \quad (4)$$

Тут представлений кількісний взаємозв'язок точності визначення первинних факторів, обраної математичної моделі і точності вимірювальної апаратури. З нерівності (4) видно, що відносна похибка вектора первинних факторів може досягати максимальної величини

$$\left(\|\Delta \mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}_0\|\right)_{\max} = \text{cond}(\mathbf{A}_0) \cdot \|\Delta \mathbf{y}\|/\|\mathbf{y}_0\|. \quad (5)$$

Враховуючи, що числа обумовленості матриць при розв'язанні реальних практичних задач можуть досягати тисяч, очевидно, що розв'язок таких задач не буде мати практичної цінності без спеціальних прийомів.

Слід зауважити, що оцінка (4) є оцінкою «зверху». Нерівність (4) може перетворитись на рівняння (5) лише для винятково рідкісних матриць  $\mathbf{A}$  і векторів  $\mathbf{y}$ , а для абсолютно більшості векторів і матриць, які зустрічаються у реальних задачах, ліва частина формули (4) набагато менша її правої частини і «число обумовленості» найчастіше дає дуже грубу, сильно завищену оцінку похибки норми розв'язку при похибках коефіцієнтів. Пропонується навіть ввести важливий третій клас задач, окрім відомих коректних та некоректних клас задач, які змінюють свою коректність під час еквівалентних перетворень, що використовуються при їх розв'язанні [4].

Недоліком оцінки за числом обумовленості є те, що вона може виявитись достатньо грубою і такою, що може бути суттєво покращена за допомогою більш тонких методів розрахунку, які враховують специфіку тієї або іншої конкретної задачі [4]. «Наближеність» оцінок за числом обумовленості є принциповим недоліком, оскільки він пов'язаний з самим виведенням співвідношень (3) і (4) через систему нерівностей.

Насправді, ситуація із точністю розв'язків СЛАР ще гірша, ніж представляється у (4). Наприклад, в роботах [4, 5] оцінка похибок за числом обумовленості піддається критиці як недостатньо надійна. Зокрема вказується, що основним недоліком оцінки похибки за числом обумовленості є те, що оцінюється лише осереднена норма вектора розв'язків  $\mathbf{x}$  досліджуваної СЛАР, а похибка конкретного розв'язку  $x_j$  залишається невідомою. Наприклад, для евклідової норми маємо  $\|\Delta \mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ , і оцінці підлягає відносна похибка  $\|\Delta \mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ . При цьому може зустрітись випадок, коли при задовільній нормі похибки розв'язку  $\left(\|\Delta \mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}_0\|\right)_{\max}$  окремо взятий розв'язок  $x_j$  може мати неприйнятні великі похибки  $\Delta x_j/x_j$ , які значно перевищують похибки норма вектора розв'язків  $\mathbf{x}$ . Тому оцінка норми похибки розв'язку за числом обумовленості не є достатньою [4].

#### Постановка задачі досліджень.

Часто, простота і універсальність методу оцінки за числом обумовленості переважає зазначені вище недоліки, адже при його використанні не потрібно думати над особливостями конкретної задачі, що приводить до розв'язку СЛАР (1). Тим не менше в більшості практичних задач слід уникати хибних оцінок похибок норми розв'язків, оскільки вони, по-перше, вимагають невиправдано великих витрат на забезпечення стійкості розв'язків СЛАР, а, по-друге, часто не є достатніми. Крім того, досліднику зручно, не вдаючись до особливостей задачі, мати дієві засоби зменшення числа обумовленості і покращення точності і надійності отриманих розв'язків. Один із шляхів розв'язання цієї проблеми представлений у даній роботі нижче.

#### Основна частина.

Покажемо один із способів оцінки окремо взятого розв'язку  $x_j$  СЛАР (2). Нехай для вектора невідомих  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}$  у формулі (2) маємо вектор абсолютних похибок виду  $\Delta \mathbf{y} = [\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n]^T$ . Для обчислення  $x_j$  використаємо формулу Крамера  $x_j = D_j/D$ , де  $D$  – визначник матриці  $\mathbf{A}$ ,  $D_j$  – визначник матриці  $\mathbf{A}$ , у якій  $j$ -й стовпець замінюється на вектор невідомих  $\mathbf{y}$ . Розкладемо визначник  $D_j$  за елементами  $j$ -го стовпця. Отримаємо  $x_j$ :

$$x_j = \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} y_i M_{ij} \right) / D,$$

де  $M_{ij}$  – відповідні мінори матриці  $\mathbf{A}$ .

Враховуючи, що кожен елемент вектора відомих визначається як  $y_i = y_{0i} + \Delta y_i$ ,  $j$ -й елемент вектора шуканих невідомих визначається як  $x_j = \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} y_{0i} M_{ij} \right) / D + \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta y_i M_{ij} \right) / D = x_{0j} + \Delta x_j$ , де  $x_{0j}$  – значення  $x_j$ , що відповідає  $\Delta y_j = 0$ , тобто обчислюється при номінальних значеннях  $y_i$ , а  $\Delta x_j$  – приріст  $x_j$ , що відбувся внаслідок варіацій  $y_i$ . Звідси випливає [4], що абсолютну похибку  $j$ -го розв'язку можна знайти як

$$\Delta x_j = \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta y_i M_{ij} \right) / D, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

З цієї формули видно, що максимальною похибка розв'язку  $x_j$  буде тоді, коли знаки  $\Delta y_i$  і

$(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$  будуть співпадати. Якщо елементи вектора  $\Delta y$  – розподілені нормально з нульовим математичним сподіванням  $\Delta y_i \sim N(0, \sigma_{yi}^2)$ , то найбільша похибка розв’язку дорівнює

$$(\Delta x_j)_{\max} = \left( \sum_{i=1}^n |\Delta y_i M_{ij}| \right) / D. \tag{7}$$

На практиці найчастіше дослідник має справу з певною вибіркою результатів вимірювань і тоді зручніше описувати неточність коефіцієнтів СЛАР не абсолютними похибками, а дисперсіями у відповідності до методів теорії ймовірностей і математичної статистики. Тоді, якщо наближено вважати, що  $\Delta y_i \sim N(0, \sigma_{yi}^2)$  – випадкові величини з нульовим математичним сподіванням і дисперсією  $\sigma_{yi}^2$  і в припущенні, що всі  $\Delta y_i$  некорельовані між собою, з врахуванням формули (6) можна визначити випадкову похибку  $j$ -го розв’язку  $\Delta x_j \sim N(0, \sigma_{xj}^2)$  як випадкову величину з нульовим математичним сподіванням і дисперсією

$$\sigma_{xj}^2 = \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \sigma_{yi}^2 M_{ij} \right) / D. \tag{8}$$

Відомі методи розв’язку погано обумовлених СЛАР, такі як ітераційні методи з передобумовленням, а також методи зниження числа обумовленості шляхом ортогоналізації строк [1, 2] та ін. Оскільки єдиним способом покращення точності розв’язку погано обумовленої СЛАР є приведення множини можливих розв’язків до компакту шляхом зменшення числа обумовленості, далі пропонується достатньо ефективний метод деякого зменшення числа обумовленості.

Можна показати, що залежність числа обумовленості від еквівалентних перетворень рівнянь СЛАР удавана, тобто дійсна обумовленість матриць  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{A}'$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ і } \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & \dots & k_1 a_{1n} \\ k_2 a_{21} & k_2 a_{22} & \dots & k_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n a_{n1} & k_n a_{n2} & \dots & k_n a_{nn} \end{pmatrix}, \quad k_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

однакова, хоча числа обумовленості цих матриць різні  $cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \neq cond(\mathbf{A}') = \|\mathbf{A}'\| \cdot \|(\mathbf{A}')^{-1}\|$ .

Нехтування цим фактом веде до невіправдано грубих оцінок похибок розв’язку, особливо якщо це стосується повторень проведення дорогих експериментів для накопичення додаткової інформації щодо об’єкту, як пропонується у [3].

Між тим представляється розумним вибрати такий вектор коефіцієнтів  $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ , при якому б еквівалентна матриця  $\mathbf{A}'$  мала би найменше з усіх можливих число обумовленості  $cond(\mathbf{A}')$ , тобто удавана обумовленість зменшилась би до дійсної. Тоді розв’язанню підлягає не початкова СЛАР, а еквівалентна їй. Це забезпечило б найкращу оцінку і таку, що найбільш близька до дійсної похибки розв’язку.

В роботі пропонується знайти такий оптимальний вектор  $\mathbf{k}_{opt}$ , при якому  $cond(\mathbf{A}') \rightarrow \min$ . Це можна зробити, одержавши аналітичну залежність числа обумовленості СЛАР від  $\mathbf{k}$  і знайшовши мінімум функції  $cond(\mathbf{A}')$ , наприклад, продиференціювавши її та прирівнявши до 0. Однак при  $n > 2$  такий шлях дуже проблематичний.

Іншим, набагато зручнішим способом є приведення цієї задачі до задачі векторної оптимізації. Позначимо скалярну функцію  $f(\mathbf{k}) = cond(\mathbf{A}')$ . Ставиться задача пошуку такого вектора  $\mathbf{k}$ , який оптимізує векторну функцію  $\min_{\mathbf{k}} \{f_1(\mathbf{k}), f_2(\mathbf{k}), \dots, f_k(\mathbf{k})\}$ ,  $k \geq 2$ , елементи якої відповідають цільовим функціям  $f_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, k$ .

Цю задачу можна розв’язати, наприклад, в комп’ютерному середовищі Matlab, використовуючи функцію *fminunc*. Функція здійснює пошук мінімуму скалярної функції декількох змінних, стартуючи з деякої початкової точки. В загальному, виконує нелінійну оптимізацію без обмежень [6]. В якості початкового слід обрати вектор  $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T$  з координатами  $k_i = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

Далі наведені результати практичного використання розробленого методу і його ефективність для оцінок похибок розв’язків СЛАР у обернених задачах.

**Приклади застосування.**

*Приклад 1. Розв’язок оберненої задачі параметричної ідентифікації фізико-механічних характеристик.*

В роботі [7] розроблений метод ідентифікації фізико-механічних характеристик конструкції керамічний виріб-компунд, а саме розрахунково-експериментальний метод пробних параметрів, який дозволяє одночасно ідентифікувати коефіцієнт лінійного температурного розширення (КЛТР), модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу при різних температурах.

Модель для розрахунку контактного тиску в матеріалах циліндричного керамічного виробу і компаунда

при усталеній температурі представлена у вигляді лінійного рівняння відносно невідомих  $\chi_1, \chi_2, \alpha_2$

$$PB\chi_2 - P\chi_1 + \alpha_2\Delta t = -(E + CD)P + \alpha_1\Delta t, \quad (9)$$

де  $B = R_3^2 / (R_3^2 - R_2^2)$ ,  $C = (2 - \mu_1) / E_1$ ,  $D = R_1^2 / (R_2^2 - R_1^2)$ ,  $E = (1 - 2\mu_2) / E_1$ ,  $\chi_1 = (1 - 2\mu_2) / E_2$ ,  $\chi_2 = (2 - \mu_2) / E_2$ . Тут  $P$  – контактний тиск між виробом і герметиком,  $\alpha_1, \alpha_2$  – КЛТР матеріалу виробу і компаунда, відповідно;  $E_1, E_2$  – їх модулі пружності,  $\mu_1, \mu_2$  – їх коефіцієнти Пуассона,  $R_1, R_2, R_3$  – внутрішній і зовнішній радіус виробу та зовнішній радіус компаунда відповідно. Коефіцієнти  $\alpha_1, \mu_1, E_1$  вважаються відомими.

Для визначення трьох невідомих  $\chi_1, \chi_2, \alpha_2$  необхідно записати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). З цією метою спочатку припустимо, що виготовлено три зразка з різними наборами значень всієї сукупності первинних факторів і виміряні відповідні їм значення контактних тисків. Це дозволяє записати наступну СЛАР

$$P_i B_i \chi_2 - P_i \chi_1 + \alpha_2 \Delta t = -(E_i - C_i D_i) P_i + \alpha_1 \Delta t, \quad i=1,2,3, \quad (10)$$

де індекси коефіцієнтів  $B_i, C_i, D_i, E_i$  і контактного тиску  $P_i$  відповідають номеру вектора параметрів  $\mathbf{x}_i = \{\alpha_{1i}, \mu_{1i}, E_{1i}, R_{1i}, R_{2i}, R_{3i}\}$   $i$ -го пробного зразка ( $i=1,2,3$ ).

Розв'язок СЛАР (10) дозволяє знайти характеристики досліджуваного матеріалу, які ідентифікуються, а саме  $\alpha, \mu, E$ . Представимо СЛАР (10) у вигляді матричного рівняння  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} P_1 B_1 & -P_1 & \Delta t \\ P_2 B_2 & -P_2 & \Delta t \\ P_3 B_3 & -P_3 & \Delta t \end{bmatrix},$$

$\mathbf{y}$  – вектор відомих з елементами  $y_i = -(E_i - C_i D_i) P_i + \alpha_1 \Delta t, i=1,2,3$ ,  $\mathbf{x} = [\chi_2 \ \chi_1 \ \alpha_2]^T$  – вектор невідомих.

Маємо СЛАР

$$\begin{bmatrix} -7.2033 & 6.7164 & 40.0000 \\ -10.3422 & 7.6524 & 70.5110 \\ -6.9447 & 5.1618 & 58.0699 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0019 \\ 0.0034 \\ 0.0028 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де матриця  $\mathbf{A}$  з числом обумовленості  $cond(\mathbf{A})=230$  була погано обумовлена, отже можлива максимальна похибка визначення критичної частоти могла скласти тисячі відсотків. Запропонованим в роботі методом вдалося знайти вектор коефіцієнтів  $\mathbf{k} = [1,000 \ 1,773 \ 1,465]^T$ , що мінімізує число обумовленості, і таким чином зменшити уявну обумовленість до  $cond(\mathbf{A})=212$ , тобто на 8%. Еквівалентна СЛАР має вигляд (12).

$$\begin{bmatrix} -7.2033 & 6.7164 & 40.0000 \\ -18.3367 & 13.5677 & 125.0160 \\ -10.1740 & 7.5620 & 85.0724 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0019 \\ 0.0060 \\ 0.0041 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

Тепер, застосовуючи до (12), наприклад, статистичний метод забезпечення стійкості розв'язків, описаний у роботі [3], для досягнення, 1-відсоткової точності визначення фізико-механічних характеристик за 1% точності вимірювань необхідна кількість експериментів зменшилась у 1,17 рази. Найефективнішим шляхом розв'язання СЛАР (11) буде одночасне застосування розробленого у [3] статистичного методу забезпечення стійкості розв'язків і відомих методів регуляризації [1,2].

На цьому ж реальному прикладі покажемо, що оцінка (5) є недостатньою. Розглянемо СЛАР (12) і представимо її у матричному вигляді  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

Нехай відносна похибка кожного із елементів  $y_i$  правої частини за абсолютним значенням дорівнює 0,01, причому знаки  $\Delta y_i$  виберемо так, щоб вектор абсолютної похибки дорівнював  $\Delta \mathbf{y} = [1,9 \cdot 10^{-5} \ -3,4 \cdot 10^{-5} \ 2,8 \cdot 10^{-5}]^T$ . Тоді норма вектора похибки  $\|\Delta \mathbf{y}\| = 4,7969 \cdot 10^{-5}$ , норма вектора відомих  $\|\mathbf{y}\| = 4,8 \cdot 10^{-3}$ . Оскільки дійсні значення  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$  на практиці завжди невідомі, покладемо  $\mathbf{x}_0 \approx \mathbf{x}, \mathbf{y}_0 \approx \mathbf{y}$  і тоді максимально можлива відносна похибка розв'язку при оцінці за числом обумовленості (5) складе  $\|\Delta \mathbf{x}\| / \|\mathbf{x}\| = cond(\mathbf{A}) \cdot \|\Delta \mathbf{y}\| / \|\mathbf{y}\| = 2,1146$ , тобто розв'язок може змінитись на 211,46%.

Оцінимо абсолютні похибки розв'язків  $x_j$  за запропонованим вище методом. Використавши розкладання визначника  $D_i$  за елементами  $j$ -го стовпця згідно з (6), маємо

$$\Delta x_j = \left( \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+j} \Delta y_i M_{ij} \right) / D, \quad i, j = 1,2,3, \quad (13)$$

де  $M_{ij}$  – відповідні мінори матриці  $\mathbf{A}$ .

В результаті обчислень, маємо:  $\Delta x_1 = 7,9886 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Delta x_2 = 4,2352 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Delta x_3 = 4,6668 \cdot 10^{-6}$ , і реальна

норма похибки  $\|\Delta x\|/\|x\|=1,4836$ . Це узгоджується з (10), тобто  $\|\Delta x\|/\|x\|\leq 2,1146$ . Оцінимо тепер відносні похибки окремих розв'язків  $\Delta x_1/x_1=2,5677$ ,  $\Delta x_2/x_2=-8,3151$ ,  $\Delta x_3/x_3=0,0893$ . Звідси видно, що похибка розв'язку  $x_1$  становить 256,77%, похибка розв'язку  $x_2$  становить 831,51%, похибка розв'язку  $x_3$  становить 8,93%. Для розв'язку  $x_2$  помилка в методі оцінювання похибки за числом обумовленості становила 3,93 рази!

Цінність співвідношення (13) у тому, що воно дозволяє оцінити похибку обчислення окремо взятого розв'язку  $x_j$ . Як показує практика, відносна похибка  $(\Delta x_j/x_{0j})_{\max}$  може значно перевищувати  $(\|\Delta x\|/\|x_0\|)_{\max}$ , обчислене за (5). Така ситуація спостерігається для розв'язку  $x_{0j}$ , значно меншого від всіх інших при порівняно однакових  $\Delta x_j$ . В такому разі норма  $\|\Delta x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  і, відповідно, оцінка  $(\|\Delta x\|/\|x_0\|)_{\max}$  не чутливі до похибки розв'язку  $x_j$ , натомість оцінка (13) здатна оцінити реальну похибку.

Враховуючи, що під конкретним розв'язком  $x_j$  розуміється реальна фізична величина, можна зробити висновок, що узагальнена оцінка норми всіх складових вектора розв'язку є абсолютно не достатньою. Зауважимо, що оцінки (6–8) одержані при точних коефіцієнтах матриці, а у випадку, коли елементи матриці  $A$  теж містять похибки, ситуація з точністю обчислень ще гірша. Ця обставина зайвий раз підкреслює необхідність відповідального ставлення до розв'язування погано обумовлених СЛАР, зокрема до зниження їх числа обумовленості.

*Приклад 2. Обернена задача ідентифікації пружно-інерційних характеристик.*

Ротор компресора авіаційного газотурбінного двигуна АІ-20 дисково-барабанного типу містить десять окремих дисків, які несуть на своїх вінцях робочі лопатки, задній вал ротора і лабіринти ущільнення вузлів заднього і переднього підшипника (рис. 1).

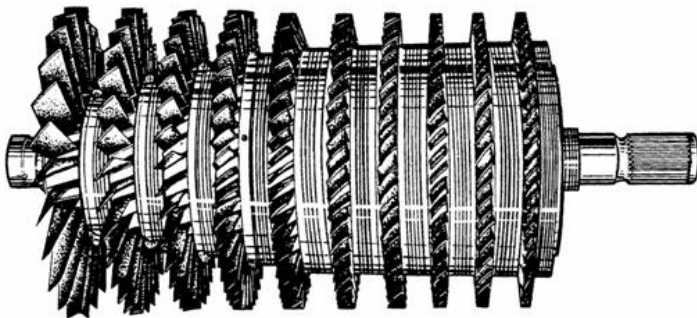


Рис. 1. Зовнішній вигляд ротора компресора газотурбінного двигуна АІ-20

Всі диски і задній вал компресора після механічної обробки піддаються статичному балансуванню в динамічному режимі, а зібраний ротор компресора – динамічному балансуванню до залишкового дисбалансу 5 г·см на кожному опорі.

В процесі експлуатації двигунів АІ-20 і при проведенні тривалих випробувань на стендах були знайдені такі дефекти, як погнутість заднього вала, поломки штифтового з'єднання ротора компресора, головним чином, у

зчленуванні заднього вала з десятим ступенем ротора, а також низка дефектів по корпусу камери згорання.

Передбачалось, що виникнення вказаних дефектів пов'язано з проходженням через критичні частоти обертання ротора компресора в системі двигуна; це припущення підсилювалось також недопустимо високим рівнем вібрацій окремих екземплярів двигунів АІ-20 на режимі малого газу, де коливання носять резонансний характер.

Спроба визначити за кресленням сучасного двигуна, який не має вивчених раніше прототипів, кількісні характеристики маси, пружності, демпфування і т.д. надзвичайно складана задача.

З метою уточнення величини критичної частоти обертання ротора, а також визначення характеристик жорсткості і стабільності жорсткостей роторів компресора двигуна АІ-20 була проведена робота зі статичних випробувань декількох роторів цієї конструкції.

Таблиця 1

Статичні коефіцієнти впливу  $\alpha_{ij}$  для ротора К603244,  $cond(A)=3696$

| Місце прикладання навантаження | Номера ступенів і коефіцієнти впливу $\alpha_{ik} \cdot 10^{-7}$ м/Н |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--------------------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                                | 1  | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
| 1 ступінь                      | 2,000  | 2,3   | 2,35  | 2,355 | 2,2   | 2,15  | 1,77  | 1,575 | 1,55  | 1,125 |
| 2 ступінь                      | 2,300  | 2,5   | 3,72  | 3,800 | 3,675 | 3,57  | 3,425 | 3,25  | 2,925 | 2,550 |
| 3 ступінь                      | 2,350  | 3,725 | 4,75  | 4,900 | 4,700 | 4,525 | 4,300 | 4,300 | 4,375 | 3,450 |
| 4 ступінь                      | 2,355  | 3,800 | 4,900 | 5,450 | 5,470 | 5,675 | 5,425 | 5,300 | 5,525 | 5,075 |
| 5 ступінь                      | 2,200  | 3,675 | 4,900 | 5,470 | 6,350 | 6,375 | 5,950 | 6,625 | 6,375 | 6,400 |
| 6 ступінь                      | 2,150  | 3,570 | 4,700 | 5,675 | 6,375 | 7,200 | 7,375 | 7,375 | 7,500 | 7,450 |
| 7 ступінь                      | 1,770  | 3,425 | 4,525 | 5,425 | 5,950 | 7,375 | 7,700 | 8,500 | 8,325 | 8,750 |
| 8 ступінь                      | 1,575  | 3,250 | 4,300 | 5,300 | 6,625 | 7,375 | 8,500 | 9,100 | 9,600 | 8,900 |
| 9 ступінь                      | 1,550  | 2,925 | 4,375 | 5,525 | 6,375 | 7,500 | 8,325 | 9,600 | 10,40 | 10,12 |
| 10 ступінь                     | 1,125  | 2,550 | 3,450 | 5,075 | 6,400 | 7,450 | 8,75  | 8,900 | 10,12 | 9,900 |

Для визначення статичних коефіцієнтів впливу (податливості) ротора проводились його статичні

випробування на спеціальному обладнанні. Коефіцієнти впливу  $\alpha_{ij}$ , які дорівнюють величині прогину у  $i$ -му перерізі від дії одиничної сили у  $j$ -му перерізі,  $i, j=1,2,\dots,10$ , визначали за методикою, викладеною в [8].

Сформована із даних табл. 1 матриця коефіцієнтів впливу  $\mathbf{A}$  розміром  $10 \times 10$  з числом обумовленості  $\text{cond}(\mathbf{A})=3974$  була погано обумовлена, отже можлива максимальна похибка визначення критичної частоти могла скласти тисячі відсотків. Запропонованим в даній роботі методом вдалося зменшити уявну обумовленість до  $\text{cond}(\mathbf{A})=2568$ , тобто у 1,55 рази, відшукавши вектор коефіцієнтів  $\mathbf{k}=[1,000 \ 1,823 \ 5,384 \ 5,572 \ 1,502 \ 3,142 \ 0,834 \ 3,106 \ 0,405 \ 2,429]^T$  і провівши еквівалентні перетворення СЛАР. Тепер, застосовуючи статистичний метод забезпечення стійкості розв'язків, описаний у [3], для досягнення, наприклад, 1% точності визначення критичної частоти обертання ротора, а також визначення характеристик жорсткості жорсткостей роторів при 1% точності вимірювань необхідна кількість експериментів зменшилась у 2,4 разу.

### Висновки

Показано, що оцінка розв'язків СЛАР за числом обумовленості є ненадійною і запропоновано оцінку дисперсій окремих розв'язків за дисперсіями вимірних величин при точних коефіцієнтах матриці.

Запропоновано метод зменшення уявної обумовленості лінійних моделей, який не потребує у дослідника врахування їх специфіки. Метод базується на розгляді еквівалентної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаної за допомогою еквівалентних перетворень з початкової, з попереднім відшуканням такого оптимального вектора коефіцієнтів, щоб еквівалентна система лінійних рівнянь мала обумовленість найменшу із усіх можливих. Поставлену задачу формалізовано як задачу векторної оптимізації і запропоновано комп'ютерний засіб її реалізації.

Показана ефективність запропонованого методу при розв'язку обернених задач параметричної ідентифікації фізико-механічних характеристик матеріалів та ідентифікації пружно-інерційних характеристик роторів, що швидко обертаються.

### Література

1. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979.
2. Андрушевский Н.М. Анализ устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений : учебное пособие / Н.М. Андрушевский. – М. : Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. – 71 с.
3. Горошко А.В. Шляхи підвищення точності розв'язків зворотних задач / А.В. Горошко, В.П. Ройзман // Вісник Хмельницького національного університету. – 2013. – № 6. – С. 60–69.
4. Петров Ю.П. Как получать надежные решения систем уравнений / Ю.П. Петров. – СПб. : БХВ-Петербург, 2009. – 176 с.
5. Петров Ю.П. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов / Ю.П. Петров. – СПб. : БХВ-Петербург, 2008. – 160 с.
6. MathWorks [Електронний ресурс] / The MathWorks, Inc. 1994–2014. – Режим доступу : <http://www.mathworks.com/>
7. Горошко А.В. Обернена задача ідентифікації фізико-механічних характеристик матеріалів структурно-складних технічних систем / А.В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. – 2014. – № 4. – С. 135–139.
8. Исаев Р.И. Экспериментальное исследование жесткости роторов компрессоров двигателя АИ-20. Техническая справка № 5186 / Р.И. Исаев, В.П. Ройзман. – М. : ЦИАМ, 1961.

### References

1. Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. Methods of ill-posed problems solving. – 1979.
2. Andrushevsky N.M. The analysis of the stability of solutions of systems of linear algebraic equations: the manual. -M. : Publishing Department of the Faculty of Moscow State University named after MV University; MAKS Press, 2008. - 71 P.
3. Goroshko A.V. Ways to improve the accuracy of solutions of inverse problems / A.V. Goroshko, V.P. Royzman // Journal of Khmelnytsky National University. -2013. Number 6. -P. 60-69
4. Petrov Yu.P. How to obtain reliable solutions of systems of equations / Yu.P. Petrov // St. Petersburg.: BHV-Petersburg. - 2009. 176 p.
5. Petrov Yu.P. Ensuring the credibility and reliability of computer simulations / Y.P. Petrov // St. Petersburg.: BHV-Petersburg. - 2008. 160 p.
6. MathWorks: [Electronic resource]. The MathWorks, Inc. 1994-2014 URL: <http://www.mathworks.com/>
7. Isaev R.I., Royzman V.P. Experimental investigation of the stiffness of the compressor rotor engine AI-20. Technical reference number 5186. CIAM, 1961. D.s.p.

Рецензія/Peer review : 04.08.2014 р.

Надрукована/Printed :30.9.2014 р.  
Рецензент: д.т.н., проф. В.П. Ройзман