

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АНІЗОТРОПНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПОЛІМЕРНИХ МАТЕРІАЛІВ

Запропонована математична модель анізотропних властивостей полімерних матеріалів, що встановлює взаємозв'язок між основними в'язкопружними параметрами полімеру. Отримано вираз для середньої деформації полімерного матеріалу, який дозволяє за відомими фізико-механічними властивостями полімеру передбачити мінімальні значення технологічних деформацій розтягу матеріалу, які необхідно створити в переробному пристрої, щоб почався процес руйнування структури полімеру.

Ключові слова: переробка, полімер, структура, релаксація, напруження, деформація, тензор.

O.M. SYNYUK

Khmelnytskyi National University

### MATHEMATICAL MODEL OF ANISOTROPIC PROPERTIES OF POLYMER MATERIALS

The mathematical model of anisotropic properties of polymeric materials was proposed in the article. It establishes the relationship between the main viscoelastic parameters of polymer. An expression for the average deformation of the polymer material was received. It allows by the known physical and mechanical properties of the polymer to provide minimum values of deformation of material tensile which must be created in a technological device to began the process of polymer structure destroying.

Key words: recycling, polymer structure, relaxation, stress, strain, tensor.

**Вступ.** Запропонована в роботі [1] модель для опису механічних властивостей природних та штучних полімерів в орієнтованому і неорієнтованому стані передбачає, що структура природних та штучних полімерів в орієнтованому і неорієнтованому стані моделюється дво- або багатоелементним шаруватим композиційним середовищем, при цьому вважають, що у першому наближенні неорієнтований полімер можна розглядати як систему анізотропних пружних елементів з такими ж пружними властивостями, як і у високоорієнтованого. Середні значення модулів пружності системи визначаються або на основі припущення про однорідність розподілу напружень у системі або на основі припущення про однорідність деформації.

У багатоелементному шаруватому композиційному середовищі шари можуть бути повернені один відносно іншого на різні кути. Полімерні матеріали в результаті технологій виготовлення є анізотропними і процес їх деформації може бути описаний лінійною теорією в'язкопружності, яка в інтегральній формі має наступний вигляд [2].

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) &= \int_0^t E_{ijkl}(t-\tau) \cdot \left[ \frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} \right] \cdot d\tau, \\ \varepsilon_{ij}(t) &= \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) \cdot \left[ \frac{d\sigma_{kl}(\tau)}{d\tau} \right] \cdot d\tau,\end{aligned}\tag{1}$$

де  $\tau$  – час релаксації;  $E_{ijkl}, J_{ijkl}$  – відповідно функції релаксації і повзучості, які утворюють тензори четвертого порядку.

При  $-\infty < t < 0$  тензори  $E_{ijkl}, J_{ijkl}$  дорівнюють нулю, тобто  $E_{ijkl}(t) = J_{ijkl}(t) = 0$ , і кожен елемент цих тензорів має обмежену варіацію в будь-якому замкнутому підінтервалі з області  $-\infty < t < \infty$ .

**Основна частина.** Скористаємося виразом узагальненого закону Гука [3, 4] у в'язкопружній постановці для анізотропних матеріалів

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,\tag{2}$$

де  $\sigma_{ij}$  і  $\varepsilon_{kl}$  – відповідно тензори напруження і деформації другого рангу відповідно;  $C_{ijkl}$  – тензор коефіцієнтів четвертого рангу, що описують пружні властивості полімерних матеріалів. Два однакові індекси позначатимуть нормальні напруження, а два різні індекси позначатимуть дотичні напруження. Причому цифра 1 позначає вісь X або повернену вісь X', цифра 2 – вісь Y або повернену вісь Y', цифра 3 – вісь Z або повернену вісь Z':

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}\tag{3}$$

Аналогічно з відносними деформаціями розумітимемо, що якщо  $k = l$ , то  $\varepsilon_{kl}$  представляють відносні деформації (подовження бо укорочення), а якщо  $k \neq l$ , то  $\varepsilon_{kl}$  представляють відносні деформації зсуву. При цьому слід мати на увазі, що у формулі (2) підсумовування проводиться за індексами, що зустрічаються двічі в правій частині формули, тобто за індексами  $k$  і  $l$ . Для обчислення всього напруженого

стану анізотропного тіла в загальному випадку буде потрібно  $3^4 = 81$  значення релаксаційних постійних. Проте симетричність тензорів  $\sigma_{ij}$  і  $\varepsilon_{kl}$  дозволяє зменшити кількість незалежних компонент до 36.

Вирішуючи рівняння (2) відносно деформації  $\varepsilon_{kl}$ , отримаємо вираз закону Гука у в'язкопружній постановці у вигляді:

$$\varepsilon_{kl} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{ij} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (4)$$

де  $S_{ijkl} = \frac{1}{C_{ijkl}} = C_{ijkl}^{-1}$  – тензор податливостей (або тензор коефіцієнтів, що описують в'язкопружні властивості полімерів).

При цьому згідно до [3] величину в'язкопружного потенціалу можна представити у вигляді квадратичної функції напруження:

$$U = \frac{1}{2} \cdot S_{ijkl} \cdot \sigma_{ij} \cdot \sigma_{kl}. \quad (5)$$

У [3–6] показано, що величина в'язкопружного потенціалу  $U$  різна для різних напружених станів, але постійна (інваріантна) для кожного даного напруженого стану і не залежить від повороту осей координат. Умова інваріантності величини в'язкопружного потенціалу від повороту координатних осей для конкретного виду напруженого стану лежить в основі визначення релаксаційних властивостей полімерних матеріалів. При цьому в процесі формування полімерних матеріалів згідно до моделі, що представлена в роботі [1], можливе чергування різних шарів, що володіють різними фізико-механічними властивостями і різними типами симетрії їх релаксаційних властивостей. Для опису в'язкопружних властивостей полімерних матеріалів необхідно мати в своєму розпорядженні рівняння, що встановлюють взаємозв'язок їх релаксаційних властивостей з типами їх анізотропії, тобто з типами їх структурної симетрії [7]. Для отримання основних визначальних співвідношень, що зв'язують різні типи структурної анізотропії текстильних матеріалів, при утворенні шарів, розглянемо тензор пружних постійних  $\chi_{ijkl}$  в компактнішому вигляді, при умові введення таких скорочених позначень для напружень і деформацій:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1, & \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1; \\ \sigma_{22} &= \sigma_2, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2; \\ \sigma_{33} &= \sigma_3, & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3; \\ \sigma_{23} &= \sigma_4, & \varepsilon_{23} &= \varepsilon_4; \\ \sigma_{13} &= \sigma_5, & \varepsilon_{13} &= \varepsilon_5; \\ \sigma_{12} &= \sigma_6, & \varepsilon_{12} &= \varepsilon_6. \end{aligned} \quad (6)$$

Виконуючи заміну компонентів тензорів напружень та деформацій в рівнянні (2), враховуючи їх симетричність, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (7)$$

Згідно з [4] матриця  $C_{ij}$  є симетричною відносно головної діагоналі. Це означає, що в рівнянні (7) коефіцієнти, що розташовані над головною діагоналлю і під нею, будуть попарно рівними між собою. В результаті лишиться 21 коефіцієнт, які розрізняються між собою:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Нехай полімер володіє по відношенню до своїх в'язкопружних властивостей віссю симетрії другого порядку [4]. Це означає, що після кожного повороту системи координат на  $180^\circ$  навколо осі симетрії значення в'язкопружних постійних в нерухомій і рухомій системі координат мають співпадати. Це дає рівність нулю таких компонентів матриці  $C_{ij}$ :

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0. \quad (9)$$

Підставляючи рівняння (9) в рівняння (8) отримаємо матрицю  $C_{ij}$ , яка має 13 незалежних

КОМПОНЕНТ:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Для випадку ортотропної полімерного матеріалу по відношенню до трьох взаємоперпендикулярних площин матриця  $C_{ij}$  буде мати 9 незалежних компонент [4]. Згідно з [7] ортотропне тіло можна представити як призму, що містить решітку з трьох взаємно перпендикулярних “стрижнів” різних розмірів та розташованих вздовж координатних осей  $x$ ,  $y$  та  $z$ , як показано на рис. 1.

Подібне уявлення ортотропного континууму, звичайно, умовно; воно служить лише зручною формою для наочного представлення матеріалу, який має різні пружні властивості в різних напрямках. З рис. 1 видно, що ортотропне тіло буде по-різному реагувати на вплив нормальних і дотичних зусиль, прикладених до різних граней призми – до граней з нормальними уздовж координатних осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Наприклад, деформація  $e_{zz}$ , пов'язана з напруженням  $\sigma_{zz}$ , буде помітно меншою за деформацію  $e_{xx}$ , що пов'язана з напруженням  $\sigma_{xx}$ . Аналогічно деформації зсуву  $e_{yz}$ , викликані дотичними напруженнями  $\sigma_{yz}$ , будуть менші, ніж деформації зсуву  $e_{xy}$ , викликані дотичними напруженнями  $\sigma_{xy}$ .

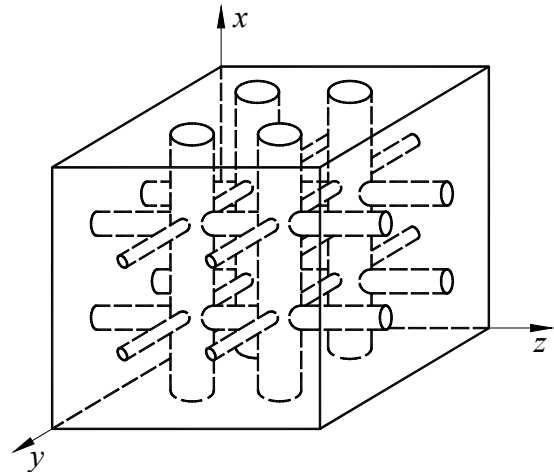


Рис. 1. Ортотропний матеріал

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Трансверсально ізотропний матеріал можна представити таким же способом, як ортотропний, за тим винятком, що взаємно перпендикулярна сітка стрижнів у двох координатних напрямках ( $y$  та  $z$ ) має однакові розміри [7]. Це показано на рис. 2, з якого видно, що напрями  $x$  і  $y$  еквівалентні.

Така еквівалентність дозволяє описати трансверсально ізотропний матеріал за допомогою п'яти постійних замість дев'яти, необхідних для ортотропного. Так як маємо ізотропність властивостей матеріалу по координатах  $y$  та  $z$ , то коефіцієнт, що стоїть перед  $\varepsilon_2(\varepsilon_y)$  в другому рівнянні системи (10), дорівнює коефіцієнту, що стоїть перед  $\varepsilon_3(\varepsilon_z)$  в третьому рівнянні даної системи, а коефіцієнт, що стоїть перед  $\varepsilon_2(\varepsilon_y)$  в першому рівнянні системи (10), дорівнює коефіцієнту, що стоїть перед  $\varepsilon_3(\varepsilon_z)$  в третьому рівнянні цієї системи, тобто  $C_{22} = C_{33}$ , а  $C_{12} = C_{13}$ .

Крім того, зсув в ізотропній площині  $y, z$  забезпечує певне співвідношення між постійними при  $\varepsilon_2(\varepsilon_{yy})$ ,  $\varepsilon_3(\varepsilon_{zz})$  в другому рівнянні системи (10) та постійною при  $\varepsilon_4(\varepsilon_{yz})$  в четвертому рівнянні цієї ж системи. Для визначення цього співвідношення розглянемо зсув під дією напруження  $\sigma_2$  на рис.3.

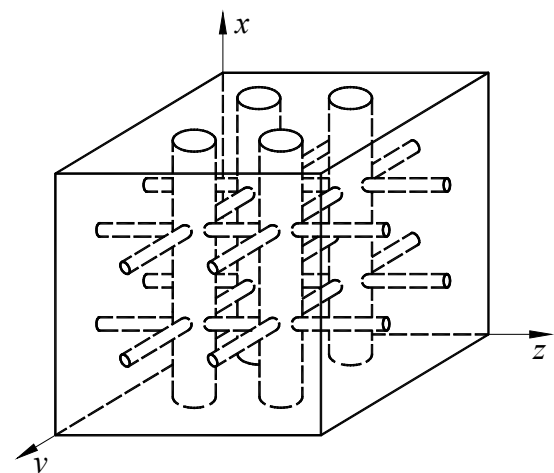
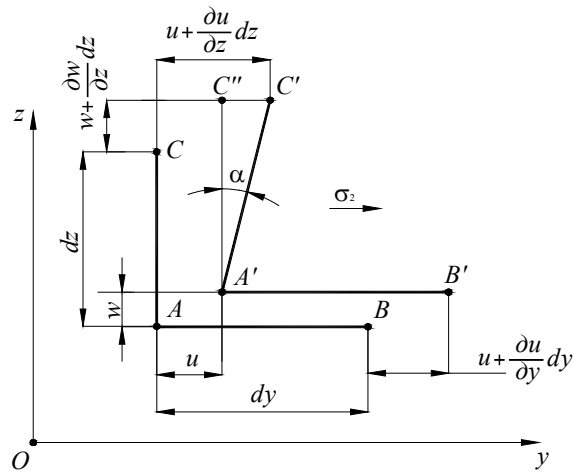


Рис. 2. Трансверсально ізотропний матеріал

Рис. 3. Схема зсуву під дією напруження  $\sigma_2$ 

Складові переміщення точки С будуть відрізнятися від складових переміщення точки А на нескінченно малу величину за рахунок зміни координати  $z$ :

$$u + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \quad w + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Довжина проекції ребра АВ на вісь  $y$  буде дорівнювати:

$$A'B' = dy - u + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy = dy + \frac{\partial u}{\partial y} dy. \quad (12)$$

Отже проекція абсолютного подовження ребра АВ на вісь  $y$ :

$$\Delta AB = A'B' - AB = dy + \frac{\partial u}{\partial y} dy - dy = \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

а відносно подовження вздовж осі  $y$  становитиме:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_y = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (13)$$

Розглянемо зміну кута між ребрами АС та АВ, що була викликана напруженням  $\sigma_2$ . Тангенс кута повороту ребра АС в площині  $yOz$ .

Обмежуючись розглядом тільки малих деформацій, можна вважати, що  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ , і знехтувати лінійною деформацією  $\varepsilon_z$  через малість у порівнянні з одиницею. Тоді кутова деформація буде дорівнювати:

$$\varepsilon_4 = \gamma_{zy} = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (14)$$

Так як розглядається зсув в ізотропній площині  $y, z$ , то будемо вважати, що:  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}$ . З цієї залежності випливає, що  $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$ .

Враховуючи залежності між дотичними і нормальними напруженнями [8] можна записати:

$$\frac{\sigma_2 - 0}{2} = \sigma_4. \quad (15)$$

де  $\sigma_2$  – нормальне напруження,  $\sigma_4$  – тангенціальне напруження.

Виразимо  $\sigma_2$  і  $\sigma_4$  з системи  $\sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j$ , де  $C_{ij}$  – матриця коефіцієнтів (11).

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \varepsilon_2 \cdot C_{22} - \varepsilon_3 \cdot C_{23}, \\ \sigma_4 &= \varepsilon_4 \cdot C_{44}. \end{aligned} \quad (16)$$

В першому рівнянні знак “-” означає протилежний напрям деформацій: по осі  $y$  – розтяг, а по осі  $z$  – стиск.

Підставивши вирази напружень  $\sigma_2, \sigma_4$  з (16) в рівняння (15), отримаємо:

$$C_{44} \cdot \varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_2 \cdot (C_{22} - C_{23})}{2}. \quad (17)$$

Тут  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$  за умови ізотропності властивостей матеріалу по координатах  $y$  та  $z$ . Враховуючи (14) формула (17) запишеться таким чином:

$$C_{44} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}. \quad (18)$$

Ізотропність властивостей матеріалу по координатах  $y$  та  $z$  задовольняє умові  $C_{44} = C_{66}$ . Враховуючи це переписемо рівняння (18) в такому вигляді:

$$C_{44} = C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}. \quad (19)$$

Враховуючи вищевикладене отримаємо матрицю постійних в такому вигляді:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} = C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} = C_{33} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Використання співвідношень (10, 11, 20) при практичних розрахунках пов'язане із значними експериментальними труднощами при визначенні компонент  $C_{ij}$ , з прямих фізико-механічних експериментів. Через це в практичних розрахунках будемо використовувати такі постійні, методи визначення яких відомі і детально викладені у роботах [2, 9]. Для цього переписемо рівняння (4) в такому вигляді:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \cdot \sigma_j \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (21)$$

Де матриця податливостей  $S_{ij}$  визначається таким чином:

$$S_{ij} = \frac{C_{ij}^T}{|C_{ij}|},$$

де  $C_{ij}^T$  – транспонована матриця, елементами якої є алгебраїчні доповнення матриці  $C_{ij}$ ,  $|C_{ij}|$  – визначник матриці.

З умови симетрії  $C_{ij} = C_{ji}$  витікає симетрія  $S_{ij} = S_{ji}$ .

Розглянемо випадок, коли  $\sigma_1$  – єдине діюче напруження, тоді  $\varepsilon_1$ , згідно до (21) можна виразити таким чином

$$\varepsilon_1 = S_{11} \cdot \sigma_1 = \frac{\sigma_1}{E_{11}}. \quad (22)$$

Якщо діє тільки напруження  $\sigma_2$ , то

$$\varepsilon_2 = S_{22} \cdot \sigma_2 = \frac{\sigma_2}{E_{22}}, \quad (23)$$

а якщо діє тільки напруження  $\sigma_3$ , то

$$\varepsilon_3 = S_{33} \cdot \sigma_3 = \frac{\sigma_3}{E_{33}}. \quad (24)$$

Деформації в перпендикулярних напрямках можна зв'язати такою залежністю [8]

$$\varepsilon_1 = -\nu_{21} \cdot \varepsilon_2. \quad (25)$$

Підставляючи рівняння (23) в (25) можна отримати

$$\varepsilon_1 = -\nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_{22}}, \quad (26)$$

де  $E_{ij}$  – в'язкопружні модулі;  $\nu_{ij}$  – коефіцієнти Пуассона (перший індекс показує напрямок прикладеного навантаження, а другий – напрямок зміни поперечних розмірів).

Для загального випадку нормального навантаження маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_{11}} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_{22}} - \nu_{31} \frac{\sigma_3}{E_{33}}, \\ \varepsilon_2 &= -\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_{11}} + \frac{\sigma_2}{E_{22}} - \nu_{32} \frac{\sigma_3}{E_{33}}, \\ \varepsilon_3 &= -\nu_{13} \frac{\sigma_1}{E_{11}} - \nu_{23} \frac{\sigma_2}{E_{22}} + \frac{\sigma_3}{E_{33}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Для загального випадку дотичного навантаження маємо

$$\varepsilon_4 = \frac{\sigma_4}{G_{23}}, \quad \varepsilon_5 = \frac{\sigma_5}{G_{13}}, \quad \varepsilon_6 = \frac{\sigma_6}{G_{12}}. \quad (28)$$

Отже, враховуючи рівняння (27) та (28) запишемо матрицю податливостей  $S_{ij}$  через в'язкопружні постійні в розгорненому вигляді для трансверсального ізотропного полімерного матеріалу

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Підставивши формулу (29) в (21) з врахуванням (20) отримаємо

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Отримана система з шести рівнянь встановлює взаємозв'язок між основними в'язкопружними параметрами полімерного матеріалу і може вважатися моделлю ізотропного орієнтованого полімеру.

У випадку однорідного напруження шарувата модель складається з  $N$  шарів, розташованих послідовно один за одним [1]. При цьому приймається, що кожен елементарний шар є трансверсальним ізотропним пружним тілом, що має площину поперечної ізотропії, а напрямком осі пружної симетрії елементарного шару визначається кут  $\varphi$  між віссю пружної симетрії і напрямком діючого напруження  $\sigma_l$ . У випадку прикладення однорідного напруження деформація кожного шару  $\varepsilon_l$  і визначається таким виразом [10]:

$$\varepsilon_l^i = \sigma_l \left[ S_{11} \cdot \sin^4 \varphi + S_{33} \cdot \cos^4 \varphi + (2S_{13} + S_{44}) \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \right], \quad (31)$$

де  $S_{11}$ ,  $S_{33}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{44}$  – коефіцієнти податливості елементарного шару, що відповідають орієнтованому стану полімеру.

Середня деформація всієї системи (структури ізотропного аморфно-кристалічного тіла)  $\varepsilon_l$  виразиться як:

$$\varepsilon_l^i = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_l^i}{N} = \sigma_l \left[ \frac{\sin^4 \varphi}{E_{11}} + \frac{\cos^4 \varphi}{E_{22}} + \left( \frac{1}{G_{23}} - \frac{2 \cdot \nu_{21}}{E_{22}} \right) \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \right], \quad (32)$$

де  $\sin^4 \varphi$ ,  $\cos^4 \varphi$ ,  $\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$  – середні значення для всього полімеру

Таким чином, вираз (32) дозволяє при відомих фізико-механічних властивостях полімеру ( $E$ ,  $\nu$  та  $G$ ) передбачити мінімальні значення технологічних деформацій розтягу матеріалу, які необхідно створити в переробному пристрої, щоб почався процес руйнування структури полімеру, при чому полімерний матеріал буде руйнуватися в площині меж між шарами.

### Висновки

Запропонована математична модель анізотропних властивостей полімерних матеріалів, що встановлює взаємозв'язок між основними в'язкопружними параметрами полімеру.

Розглянута модель, що встановлює взаємозв'язок між релаксційними компонентами технічних модулів ( $S_{ij}$ ) і релаксційними компонентами теоретичних модулів ( $C_{ij}$ ).

Отримано вираз для середньої деформації полімерного матеріалу, який дозволяє при відомих фізико-механічних властивостях полімеру передбачити мінімальні значення технологічних деформацій розтягу матеріалу, які необхідно створити в переробному пристрої, щоб почався процес руйнування структури полімеру.

### Література

1. Синюк О.М. Зменшення витрат електроенергії для частотно-імпульсних приводів / О.М. Синюк, М.Є. Скиба // Вісник ХНУ. – 2013. – № 6. – С. 54–58.
2. Вайткявичене А.-С. Э. Экспресс метод определения связи между показателями прочности клеевых соединений при сдвиге и расклеивании / А.-С. Э. Вайткявичене, В.-П. В. Пекаркас, В.Л. Раяукас // Известия вузов. Технология легкой промышленности. – 1983. – № 5. – С. 23–25.
3. Ландау Л.Д. Теоретическая физика : в 10 т. Т. VII. Теория упругости : учеб. пособие / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с.
4. Блох В.И. Теория упругости / В.И. Блох. – Харьков : Издательство Харьковского университета, 1964. – 484 с.
5. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела : учеб. пособие / Ю.Н. Работнов. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с.
6. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
7. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М. : Мир, 1987. – 328 с.
8. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности : учеб. пособие / В.И. Самуль. – М. : Высш. школа, 1982. – 264 с.
9. Испытательная техника : справочник / под ред. В.В. Клюева. – М. : Машиностроение, 1982. – 528 с.
10. Розовский М.И. Некоторые свойства специальных операторов, применяемых в теории ползучести / М.И. Розовский // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23. – № 5. – С. 978–981.

### References

1. Synyuk O.M., Skyba M.Ye. Zmshennyya vytrat elektroenerhiyi dlya chastotno-impul'snykh pryvodiv. Herald of Khmelnytsky National University. Technical sciences. – 2013. – №6. – S. 54-58.
2. Vaytkyavichene A.-S. E. Ekspress metod opredeleniya svyazi mezhdru pokazatelyami prochnosti kleevyih soedineniy pri sdvige i raskleivaniy / A.-S. E. Vaytkyavichene, V.-P. V. Pekarskas, V.L. Rayaukas // Izvestiya vuzov. Tehnologiya legkoy promyishlennosti. – 1983. – №5. – S. 23-25.
3. Landau L.D. Teoreticheskaya fizika. V 10-ti t. T. VII. Teoriya uprugosti: Ucheb. posobie / L.D. Landau, E.M. Lifshits – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. – 1987. – 248 s.
4. Bloh V.I. Teoriya uprugosti / V.I. Bloh.. – Harkov: Izdatelstvo Harkovskogo universitetya. – 1964. – 484 s.
5. Rabotnov Yu.N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela: Ucheb. posobie dlya vuzov / Yu.N. Rabotnov – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. – 712 s.
6. Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti / L.M. Kachanov – M.: Nauka, 1969. – 420 s.
7. Krauch S. Metody granichnyh elementov v mehanike tverdogo tela / S. Krauch, A. Starfield. – M.: Mir, 1987. – 328 s.
8. Samul V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti: Ucheb. posobie dlya studentov vuzov / V.I. Samul. – M.: Vyssh. shkola, 1982. – 264 s.
9. Ispytatel'naya tehnika: Spravochnik. Pod red. V.V. Klyueva. – M. : Mashinostroenie, 1982. – 528 s.
10. Rozovskiy M.I. Nekotorye svoystva spetsialnyh operatorov, primenyaemyh v teorii polzuchesti / M.I. Rozovskiy // Prikladnaya matematika i mehanika – 1959. – T. 23. – № 5. – S. 978-981.

Рецензія/Peer review : 19.12.2014 р.

Надрукована/Printed :25.1.2015 р.  
Рецензент: д.т.н., проф. Диха О.В.